Semitransitive関係とFerrers関係のいくつかの初等的性質

橋　本　　　寛

Abstract

Semitransitive relations and Ferrers relations are binary relations which are important for fundamental discussion of utility. We consider semitransitive relations and Ferrers relations using Boolean matrices having zeros and ones as their elements. We obtain some properties of semitransitive relations and Ferrers relations by combining their well-known properties and other sufficient conditions. They show some facets of semitransitive relations and Ferrers relations and give conditions that given relations become semitransitive relations or Ferrers relations.

1．はじめに

効用に関する基礎的な議論［4,5,9］などにおいて重要な二項関係である semitransitive 関係と Ferrers 関係について考察をおこなっている。この semitransitive 関係と Ferrers 関係を 0，1 の要素をもつブール行列によって表現し，その性質について調べている。従来 semitransitive 関係や Ferrers 関係については多くの研究があり種々の性質が知られているが［1,6,7,8］，本論文ではすでに報告している semitransitive 関係や Ferrers 関係に関する基本的な性質の条件の一部を，別のそれらの十分条件で置き換えることにより，形式的に新しい性質を導いている。このようにして得られた性質は semitransitive 関係と Ferrers 関係のもつ性質や，また与えられた関係が semitransitive 関係や Ferrers 関係となるための条件を与えている。

2．定義

関係を表現するブール行列の演算や記法は文献［2］によるものとするが，いくつかの注意すべきものについて以下に示す。

0，1の要素をもつ n 次ブール行列 $R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$ に対して

$\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]=[1-r_{ij}]$,

$R'=[r_{ji}]$ (転置),

$\nabla R=R\wedge R'$,

$R\times S=[(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})]$,

$R\diamond S=[(r_{i1}\vee s_{1j})\wedge(r_{i2}\vee s_{2j})\wedge\cdots\wedge(r_{in}\vee s_{nj})]$,

と定義する。また I で単位行列，E で全要素が1の行列を示す。

上記の演算のもとで semitransitive 関係は $R^2\leqq R\diamond R$ なるブール行列 R で表現され，Ferrers 関係は $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$ なる行列 R で表現される。

3．結果

すでに知られている semitransitive 関係や Ferrers 関係の性質に関して，その条件の一部をその十分条件で置き換えることにより新しい性質を導いている。またsemitransitive関係やFerrers関係に関しては，行列 R が semitransitive 関係行列または Ferrers 関係行列となることと，$\overline{R}$ が semitransitive 関係行列または Ferrers 関係行列となることとは同値であるので，これを利用してすでに知られている性質中の R を $\overline{R}$ に置き換えて，双対的な性質を得ている。

［性質1］[2]

$R^2\leqq R,\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R}\ \Rightarrow\ R^2\leqq R\diamond R$

［性質2］[2]

$R^2\leqq R,\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R}\ \Rightarrow\ R\times\overline{R}'\times R\leqq R$

［性質3］[3]

(1) $R^2\leqq R\diamond R,\ \overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'\ \Rightarrow\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(2) $R^2\leqq R\diamond R,\ \overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R\ \Rightarrow\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

［性質4］[3]

(1) $R\times\overline{R}'\times R\leqq R,\ \overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'\ \Rightarrow\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(2) $R\times\overline{R}'\times R\leqq R,\ \overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R\ \Rightarrow\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

［性質5］

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ R^2\leqq R,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow\ R^2\leqq R\Diamond R$

(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ R^2\leqq R,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow\ R^2\leqq R\Diamond R$

(証明) 性質 4 (1) (2) を性質 1 に代入すればよい。 (証明終)

［性質 6 ］

(1) $R^2\leqq R\Diamond R,\ R^2\leqq R,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(2) $R^2\leqq R\Diamond R,\ R^2\leqq R,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(証明) 性質 3 (1) (2) を性質 2 に代入すればよい。 (証明終)

［性質 7 ］

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ R'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'\ \Rightarrow\ R^2\leqq R\Diamond R$

(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ R'\wedge\overline{I}\leqq R'\times\overline{R}\ \Rightarrow\ R^2\leqq R\Diamond R$

(証明) 一般に

$$\overline{R}\times R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R$$

$$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\Diamond\overline{R}\ \Leftrightarrow\ R^2\leqq R\Diamond R$$

であるから性質 5 において R を $\overline{R}$ とおけばよい。 (証明終)

［性質 8 ］

(1) $R^2\leqq R\Diamond R,\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ R'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'\ \Rightarrow\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(2) $R^2\leqq R\Diamond R,\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ R'\wedge\overline{I}\leqq R'\times\overline{R}\ \Rightarrow\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(証明) 一般に

$$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\Diamond\overline{R}\ \Leftrightarrow\ R^2\leqq R\Diamond R$$

$$\overline{R}\times R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R$$

であるから性質 6 において R を $\overline{R}$ とおけばよい。 (証明終)

［性質 9 ］［2］

$R^2\leqq R\Diamond R,\ \nabla R\leqq I\ \Rightarrow\ R^2\leqq R$

［性質10］［2］

$R^2\leqq R\Diamond R,\ R\vee R'\vee I=E\ \Rightarrow\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

［性質11］

$R^2\leqq R\Diamond R,\ \nabla R\leqq I\ ,\ R\vee R'\vee I=E\ \Rightarrow\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(証明) 性質 9 および性質10を性質 2 に代入すればよい。 (証明終)

［性質12］

(1) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R',\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'} \ \Rightarrow\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(2) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R',\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R \ \Rightarrow\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(3) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R},\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'} \ \Rightarrow\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(4) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R},\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R \ \Rightarrow\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(証明) 性質 3 (1) (2) を性質 8 (1) (2) に代入すればよい。　(証明終)

［性質13］

(1) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R',\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'} \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R \Diamond R$

(2) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R',\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R \Diamond R$

(3) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R},\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'} \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R \Diamond R$

(4) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R},\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R \Diamond R$

(証明) 性質 4 (1) (2) を性質 7 (1) (2) に代入すればよい。　(証明終)

［性質14］

(1) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ \nabla R \leqq I,\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'} \ \Rightarrow\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(2) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ \nabla R \leqq I,\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R \ \Rightarrow\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(証明) 性質9を性質6 (1) (2) に代入すればよい。　(証明終)

［性質15］

(1) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R \vee R' \vee I = E,\ R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R' \ \Rightarrow\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(2) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R \vee R' \vee I = E,\ R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R} \ \Rightarrow\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(証明) 性質14において R を $\overline{R}$ とおけばよい。　(証明終)

［性質16］［2］

$$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R},\ \nabla R \leqq I \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R \Diamond R$$

［性質17］

(1) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ \nabla R \leqq I,\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'} \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R \Diamond R$

(2) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ \nabla R \leqq I,\ \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R \Diamond R$

(証明) 性質 4 (1) (2) を性質16に代入すればよい。　(証明終)

［性質18］

(1) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E,\ R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R' \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R \Diamond R$

(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ R\vee R'\vee I=E,\ R'\wedge\overline{I}\leqq R'\times\overline{R}\ \Rightarrow R^2\leqq R\Diamond R$

(証明) 性質17において R を $\overline{R}$ とおけばよい。 (証明終)

[性質19] [2]

$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$, $\nabla R\leqq I\ \Rightarrow\ R^2\leqq R$

[性質20]

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ \nabla R\leqq I,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow R^2\leqq R$

(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ \nabla R\leqq I,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow R^2\leqq R$

(証明) 性質 4 (1) (2) を性質19に代入すればよい。 (証明終)

[性質21]

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ R\vee R'\vee I=E,\ R'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'\ \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ R\vee R'\vee I=E,\ R'\wedge\overline{I}\leqq R'\times\overline{R}\ \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(証明) 性質20において R を $\overline{R}$ とおけばよい。 (証明終)

[性質22]

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ \nabla R\leqq I,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow R^2\leqq R\wedge(R\Diamond R)$

(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ \nabla R\leqq I,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow R^2\leqq R\wedge(R\Diamond R)$

(証明) 性質17および性質20による。 (証明終)

[性質23]

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ R\vee R'\vee I=E,\ R'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'\ \Rightarrow R\vee R^2\leqq R\Diamond R$

(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R,\ R\vee R'\vee I=E,\ R'\wedge\overline{I}\leqq R'\times\overline{R}\ \Rightarrow R\vee R^2\leqq R\Diamond R$

(証明) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\wedge(\overline{R}\Diamond\overline{R})\ \Leftrightarrow\ R\Diamond R\geqq R\vee R^2$

であるから性質22において R を $\overline{R}$ とおけばよい。 (証明終)

[性質24] [3]

(1) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow R\vee R'\vee I=E$

(2) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow R\vee R'\vee I=E$

[性質25]

(1) $R^2\leqq R\Diamond R,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow R\vee R'\vee I=E$

(2) $R^2\leqq R\Diamond R,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow R\vee R'\vee I=E$

(証明) 性質 3 (1) を性質24 (1) に，性質 3 (2) を性質24 (2) に代入すればよい。

(証明終)

［性質26］

(1) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R' \wedge \bar{I} \leqq \bar{R} \times R' \ \Rightarrow\ \nabla R \leqq I$

(2) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R' \wedge \bar{I} \leqq R' \times \bar{R} \ \Rightarrow\ \nabla R \leqq I$

(証明) 性質25において R を $\bar{R}$ とおけばよい。 (証明終)

［性質27］［3］

(1) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R' \wedge \bar{I} \leqq \bar{R} \times R' \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R' \wedge \bar{I} \leqq R' \times \bar{R} \ \Rightarrow\ R^2 \leqq R$

［性質28］［3］

(1) $R^2 \leqq R,\ R' \wedge \bar{I} \leqq \bar{R} \times R' \ \Rightarrow\ \nabla R \leqq I$

(2) $R^2 \leqq R,\ R' \wedge \bar{I} \leqq R' \times \bar{R} \ \Rightarrow\ \nabla R \leqq I$

［性質29］

(1) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R' \wedge \bar{I} \leqq \bar{R} \times R' \ \Rightarrow\ \nabla R \leqq I$

(2) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ R' \wedge \bar{I} \leqq R' \times \bar{R} \ \Rightarrow\ \nabla R \leqq I$

(証明) 性質27(1)を性質28(1)に，性質27(2)を性質28(2)に代入すればよい。

(証明終)

［性質30］

(1) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ \overline{R'} \wedge \bar{I} \leqq R \times \overline{R'} \ \Rightarrow\ R \vee R' \vee I = E$

(2) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ \overline{R'} \wedge \bar{I} \leqq \overline{R'} \times R \ \Rightarrow\ R \vee R' \vee I = E$

(証明) 性質29において R を $\bar{R}$ とおけばよい。 (証明終)

4. まとめ

これまで一般には知られていないと思われる semitransitive 関係と Ferrers 関係の初等的な性質を示した。いずれもほとんど自明で命題の機械的な代入で得られており，具体的な応用において特に有用とは思われないが，semitransitive 関係と Ferrers 関係のもつ基本的な性質の一面を示していると考えられる。

前回の報告[3]でもふれたが，関係に関する条件の組み合せで得られるあ

る特殊な関係が semitransitive 関係や Ferrers 関係と類似の性質をもつようである。その関係の有用性については今のところよくわからないが，その基本的性質を明らかにすることは今後の課題の一つである。

文 献

[1] Doignon, J.-P., Monjardet, B., Roubens, M., and Vincke, Ph.: "Biorder families, valued relations, and preference modelling," Journal of Mathematical Psychology, 30, pp.435-480 (1986).

[2] 橋本　寛: "推移性のもとでの Semitransitive 関係と Ferrers 関係," 山口経済学雑誌，第53巻，第5号，pp.425-448（平成17年1月）.

[3] 橋本　寛: "Semitransitive 関係と Ferrers 関係の Negative 推移性," 山口経済学雑誌，第54巻，第5号，pp.657-681（平成18年1月）.

[4] Jamison, D. T. and Lau, L. J.: "Semiorders and the theory of choice," Econometrica, Vol.41, No.5, pp.901-912 (1973).

[5] Luce, R. D.: "Semiorders and a theory of utility discrimination," Econometrica, Vol.24, pp.178-191 (1956).

[6] Riguet, J.: "Les relations de Ferrers," C. R. Acad. Sci. Paris 232, pp.1729-1730 (1951).

[7] Roubens, M. and Vincke, Ph.: "Preference Modelling," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[8] Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).

[9] Scott, D. and Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement," The Journal of Symbolic Logic, 23, pp.113-128 (1958).