Semitransitive関係とFerrers関係のNegative推移性

橋 本 寛

Abstract

We consider negative transitivity of semitransitive relations and Ferrers relations using Boolean matrices with zeros and ones. From generalized properties of negatively transitive relations we obtain some elementary properties of semitransitive relations and Ferrers relations which become negatively transitive or transitive under certain conditions. Moreover, as special cases connectedness, antisymmetry, reflexivity, and irreflexivity of some types of relations are examined shortly.

1．はじめに

一般に2項関係は0, 1の要素をもつブール行列で表現できる。本論文では，与えられた2項関係がsemitansitive 関係やFerrers関係であるとき，その関係がnegatively transitive関係または推移関係となるための条件について，ブール行列を用いて考察をおこない，これに関するいくつかの初等的性質を示している。このsemitransitive関係やFerrers関係は応用上有用な関係であり，様々な分野で出現する2項関係である。たとえば，効用に関する基礎理論で重要な役割を演じるsemiorderの条件の中にはsemitransitive関係やFerrers関係であるための条件が含まれている［1,12,14,20］。Semitransitive関係やFerrers関係のいくつかの基本的性質は古くからよく知られているが［2,16,17,18］，ここではそれらとは別のタイプの性質を示している。また，本論文ではnegatively transitive関係の考察の過程において得られた関係の連結性，反対称性，反射性，非反射性に関しても若干の性質を示している。

2．定義

2項関係を0, 1の要素をもつ n 次ブール行列で表す。ブール行列に関する

演算や記法は文献［11］に従うものとする。また，以下においては，一般に n 次ブール行列を $R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$，$T=[t_{ij}]$ などで示し，とくに I で単位行列，O で零行列，E で全要素が1の行列を示す。よく知られているように，semitransitive 関係を表現するブール行列 R は $R^2 \leqq R \diamond R$ となり，Ferrers 関係を表現する行列 R は $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$ となる。ここで演算 $R \diamond S$ は，$R \diamond S = [(r_{i1} \vee s_{1j}) \wedge (r_{i2} \vee s_{2j}) \wedge \cdots \wedge (r_{in} \vee s_{nj})]$ で定義される。また negatively transitive 関係を表現する行列 R は $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ となる。

3．結果

まず，すでに報告している negatively transitive 関係に関する性質を一般化した性質をもとにして，これから semitransitive 関係および Ferrers 関係に関する性質を導く。次に，それらの性質の特別な場合として種々の関連する性質を得る。

［性質1］［10］ $S \vee T' \vee I = E$ のとき

(1) $R \times T \leqq R \;\Rightarrow\; \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R}$　　(2) $T \times R \leqq R \;\Rightarrow\; \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

［性質2］ 次の条件は同値である。

(1) $\overline{S'} \wedge \overline{I} \leqq T$　　(4) $\overline{T} \wedge \overline{I} \leqq S'$

(2) $\overline{S} \wedge \overline{I} \leqq T'$　　(5) $T \vee S' \vee I = E$

(3) $\overline{T'} \wedge \overline{I} \leqq S$　　(6) $S \vee T' \vee I = E$

（証明） (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\overline{S'} \wedge \overline{I} \leqq T \;\Leftrightarrow\; (\overline{S'} \wedge \overline{I})' \leqq T' \;\Leftrightarrow\; \overline{S} \wedge \overline{I} \leqq T'$

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\overline{S} \wedge \overline{I} \leqq T' \;\Leftrightarrow\; \overline{I} \leqq S \vee T' \;\Leftrightarrow\; \overline{T'} \wedge \overline{I} \leqq S$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) $\overline{T'} \wedge \overline{I} \leqq S \;\Leftrightarrow\; (\overline{T'} \wedge \overline{I})' \leqq S' \;\Leftrightarrow\; \overline{T} \wedge \overline{I} \leqq S'$

(4) $\Leftrightarrow$ (5) $\overline{T} \wedge \overline{I} \leqq S' \;\Leftrightarrow\; \overline{T} \wedge \overline{I} \wedge \overline{S'} \leqq O \;\Leftrightarrow\; T \vee I \vee S' \geqq E \;\Leftrightarrow\; T \vee S' \vee I = E$

(5) $\Leftrightarrow$ (6) $T \vee S' \vee I = E \;\Leftrightarrow\; (T \vee S' \vee I)' = E' \;\Leftrightarrow\; T' \vee S \vee I = E \;\Leftrightarrow\; S \vee T' \vee I = E$　　（証明終）

［性質3］ $\overline{S'} \wedge \overline{I} \leqq T$ のとき

(1) $R \times T \leqq R \Rightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R}$　　(2) $T \times R \leqq R \Rightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

（証明） 性質2によって，$\overline{S'} \wedge \overline{I} \leqq T \Leftrightarrow S \vee T' \vee I = E$ であるから性質1によ

る。　(証明終)

[性質4]　次の条件は同値である。

(1) $\overline{S'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$

(2) $\overline{S}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'$

(3) $(R\Diamond\overline{R'})\wedge\overline{I}\leqq S$

(4) $(\overline{R}\Diamond R')\wedge\overline{I}\leqq S'$

(5) $(R\times\overline{R'})\vee S'\vee I=E$

(6) $S\vee(\overline{R}\times R')\vee I=E$

(証明) 性質2において $T=R\times\overline{R'}$ とおけばよい。　(証明終)

[注意1] 上の性質4(2)に関して，一般には「$\overline{S}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'\Rightarrow\overline{S}\leqq\overline{R}\times R'$」とならない。いま $S=\overline{I}$, $R=O$ とおけば，$\overline{S}=I$ であるから $\overline{S}\wedge\overline{I}=O$ となり，また $\overline{R}\times R'=O$ となる。したがって $\overline{S}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'$ であるが，$\overline{S}\leqq\overline{R}\times R'$ とはならない。しかし，「$(\overline{S}\wedge\overline{I})\times\overline{R}\leqq\overline{R}\Leftrightarrow\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$」すなわち「$\overline{S}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\Diamond R'\Leftrightarrow\overline{S}\leqq\overline{R}\Diamond R'$」は成立する[11]。

[性質5]　次の条件は同値である。

(1) $\overline{S'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$

(2) $\overline{S}\wedge\overline{I}\leqq R'\times\overline{R}$

(3) $(\overline{R'}\Diamond R)\wedge\overline{I}\leqq S$

(4) $(R'\Diamond\overline{R})\wedge\overline{I}\leqq S'$

(5) $(\overline{R'}\times R)\vee S'\vee I=E$

(6) $S\vee(R'\times\overline{R})\vee I=E$

(証明) 性質2において $T=\overline{R'}\times R$ とおけばよい。　(証明終)

[性質6]　$\overline{S'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$ のとき

(1) $R^2\leqq R\Diamond R\Rightarrow\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$

(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R\Rightarrow\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) 性質3において $T=R\times\overline{R'}$ とおけば，$\overline{S'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$ のとき，「$R\times(R\times\overline{R'})\leqq R\Rightarrow\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$」となり，明らかに「$R\times(R\times\overline{R'})\leqq R\Leftrightarrow R^2\leqq R\Diamond R$」であるから，「$R^2\leqq R\Diamond R\Rightarrow\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$」となる。また，「$R\times\overline{R'}\times R\leqq R\Rightarrow\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$」となる。　(証明終)

上記の性質6における前提条件の $\overline{S'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$ を性質4の同値条件で置き換えることができる。

[性質7]　$\overline{S'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$ のとき

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R\Rightarrow\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$

(2) $R^2\leqq R\Diamond R\Rightarrow\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) 性質3において $T=\overline{R'}\times R$ とおけばよい。　(証明終)

なお，上記の性質7は性質6において R を R'，S を S' とおき，転置する

ことによっても得られる。また，上記の性質7の前提条件の $\overline{S'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$ を性質5の同値条件で置き換えることができる。

[性質8]　$\overline{S'}\leqq R\times\overline{R'}$ のとき

(1)　$R^2\leqq R\Diamond R \Rightarrow \overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$　　(2)　$R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Rightarrow \overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明)　性質6による。　(証明終)

[性質9]　$\overline{S'}\leqq\overline{R'}\times R$ のとき

(1)　$R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Rightarrow \overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$　　(2)　$R^2\leqq R\Diamond R \Rightarrow \overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明)　性質7による。　(証明終)

[性質10]　$\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$ のとき

(1)　$R^2\leqq R\Diamond R \Rightarrow \overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$　　(2)　$R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Rightarrow \overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明)　性質6による。　(証明終)

上の性質10は性質6から形式的に得られたものであるが，以下の性質21で示すように上の性質の条件を満たす R は1次行列となる。したがって S も1次行列となる。R，S が1次行列であれば，$\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$，$\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$ は一般に成立する。

[性質11]　$\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$ のとき

(1)　$R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Rightarrow \overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$　　(2)　$R^2\leqq R\Diamond R \Rightarrow \overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明)　性質7による。　(証明終)

この性質11に関しても，性質10の場合と同様であり，上の性質の条件を満たす R は一般に1次行列となる。

[性質12][10]　次の条件は同値である。

(1)　$R\leqq S$

(2)　$(R\times\overline{S'})\wedge I=O$

(3)　$(\overline{S'}\times R)\wedge I=O$

(4)　$(R'\times\overline{S})\wedge I=O$

(5)　$(\overline{S}\times R')\wedge I=O$

[性質13]　(1)　$(R\times\overline{R'})\wedge I=O$

(2)　$(\overline{R'}\times R)\wedge I=O$

(3)　$(R'\times\overline{R})\wedge I=O$

(4)　$(\overline{R}\times R')\wedge I=O$

(証明)　$R\leqq R$ が一般に成り立つので，性質12において $S=R$ とおけばよい。

(証明終)

[性質14]　(1) $R\times\overline{R'}\leqq\overline{I}$　[13]　(3) $R'\times\overline{R}\leqq\overline{I}$

(2) $\overline{R'}\times R\leqq\overline{I}$　(4) $\overline{R}\times R'\leqq\overline{I}$

(証明) 性質13による。　(証明終)

[性質15]　(1) $\overline{R}\Diamond R'\geqq I$　(3) $\overline{R'}\Diamond R\geqq I$

(2) $R'\Diamond\overline{R}\geqq I$　(4) $R\Diamond\overline{R'}\geqq I$

(証明) 性質14による。　(証明終)

上の性質15はよく知られている[11,15,19]。

[性質16]　(1) $\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\Leftrightarrow\overline{I}=R\times\overline{R'}$　(3) $\overline{I}\leqq R'\times\overline{R}\Leftrightarrow\overline{I}=R'\times\overline{R}$

(2) $\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\Leftrightarrow\overline{I}=\overline{R'}\times R$　(4) $\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'\Leftrightarrow\overline{I}=\overline{R}\times R'$

(証明) (1) (a) $\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$のとき

性質14によって，一般に$R\times\overline{R'}\leqq\overline{I}$であるから$\overline{I}=R\times\overline{R'}$となる。

(b) $\overline{I}=R\times\overline{R'}$のとき：明らかに$\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$となる。

(2)－(4) (1)と同様である。　(証明終)

[注意2]　$\overline{I}=R\times\overline{R'}$となる$R$の例として$R=I$や次の行列がある。

$$R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

[性質17]　$\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$, $R^2\leqq R\Diamond R\Leftrightarrow R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$

(証明) (1) $\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$, $R^2\leqq R\Diamond R$のとき

Rの次数をnとし，$n\geqq2$のとき矛盾が生じることを示す。$\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$のとき性質16(1)によって$\overline{I}=R\times\overline{R'}$となる。また$R^2\leqq R\Diamond R$から$R\times R\times\overline{R'}\leqq R$となり，$\overline{I}=R\times\overline{R'}$を用いて$R\times\overline{I}\leqq R$となる。この$R\times\overline{I}\leqq R$と，一般に成り立つ$R\times I\leqq R$を用いて，$R\times(\overline{I}\vee I)\leqq R$すなわち$R\times E\leqq R$が得られる。ところで$I\leqq E$であるから$R\times E=R$となる。$E=[e_{ij}]\,(e_{ij}=1)$とおけば$R\times E=R$から$(r_{i1}\wedge e_{1j})\vee(r_{i2}\wedge e_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge e_{nj})=r_{ij}$となり，$e_{1j}=e_{2j}=\cdots=e_{nj}=1$だから$r_{i1}\vee r_{i2}\vee\cdots\vee r_{in}=r_{ij}$となる。これから$r_{ij}=0$ならば$r_{i1}\vee r_{i2}\vee\cdots\vee r_{in}=0$すなわち$R$の第$i$行はすべて0となる。したがって$R$の各行はすべて0であるか，またはすべて1である。

(a) R の第1行がすべて0のとき：$R\times\overline{R'}$ の $(1, j)$ 要素は，$(r_{11}\wedge\overline{r_{j1}})\vee(r_{12}\wedge\overline{r_{j2}})\vee\cdots\vee(r_{1n}\wedge\overline{r_{jn}})=0$ となる。しかし $j\neq1$ のときは $\overline{I}=R\times\overline{R'}$ から $(r_{11}\wedge\overline{r_{j1}})\vee(r_{12}\wedge\overline{r_{j2}})\vee\cdots\vee(r_{1n}\wedge\overline{r_{jn}})=1$ とならねばならない。これは矛盾する。

(b) R の第1行がすべて1のとき：$R\times\overline{R'}$ の $(1, j)$ 要素は

$$(r_{11}\wedge\overline{r_{j1}})\vee(r_{12}\wedge\overline{r_{j2}})\vee\cdots\vee(r_{1n}\wedge\overline{r_{jn}})=\overline{r_{j1}}\vee\overline{r_{j2}}\vee\cdots\vee\overline{r_{jn}}$$

となる。$j\neq1$ のときは $\overline{I}=R\times\overline{R'}$ から $\overline{r_{j1}}\vee\overline{r_{j2}}\vee\cdots\vee\overline{r_{jn}}=1$ となり，ある k に対して $r_{jk}=0$ となる。したがって R の第 j 行はすべて0となり，$R\times\overline{R'}$ の $(j, 1)$ 要素は

$$(r_{j1}\wedge\overline{r_{11}})\vee(r_{j2}\wedge\overline{r_{12}})\vee\cdots\vee(r_{jn}\wedge\overline{r_{1n}})=0$$

となる。しかし，$\overline{I}=R\times\overline{R'}$ によって $j\neq1$ のとき $R\times\overline{R'}$ の $(j, 1)$ 要素は1であるから，これは矛盾する。

(2) $R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$ のとき

このとき $\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$, $R^2\leqq R\diamond R$ となることは明らかである。　(証明終)

[性質18]　$\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$, $R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Leftrightarrow R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$

(証明) (1) $\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$, $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$ のとき

$\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$ のとき性質16(1)によって $\overline{I}=R\times\overline{R'}$ となるので，$R\times\overline{R'}\times R\leqq R$ から $\overline{I}\times R\leqq R$ となる。これから $\overline{I}\leqq R\diamond\overline{R'}$ となり，$I\geqq\overline{R}\times R'$ すなわち $I\geqq R\times\overline{R'}$ が得られる。ところで性質13(1)によって $(R\times\overline{R'})\wedge I=O$ であるから $R\times\overline{R'}=O$ となる。したがって $\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}=O$ となり，これが成り立つためには $I=[1]\,(1\times1)$ でなければならず，$R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$ となる。

(2) $R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$ のとき

明らかに $\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$, $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$ となる。　(証明終)

[性質19]　$\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$, $R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Leftrightarrow R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$

(証明) (1) $\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$, $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$ のとき

$\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$ から性質16(2)によって $\overline{I}=\overline{R'}\times R$ となるので，$R\times\overline{R'}\times R\leqq R$ から $R\times\overline{I}\leqq R$ となる。これから $\overline{I}\leqq\overline{R'}\diamond R$ となり，$I\geqq R'\times\overline{R}$ となる。ところで性質13(3)によって $(R'\times\overline{R})\wedge I=O$ であるから $R'\times\overline{R}=O$ すなわち $\overline{R'}\times R=$

O となる。したがって $\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R=O$ となるが，これが成り立つためには $I=[1]\,(1\times1)$ でなければならず，$R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$ となる。

(2) $R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$ のとき

$\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R,\ R\times\overline{R}'\times R\leqq R$ となることは明らかである。　(証明終)

[性質20]　$\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R,\ R^2\leqq R\diamond R \Leftrightarrow R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$

(証明) (1) $\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R,\ R^2\leqq R\diamond R$ のとき

R の次数を n とし，$n\geqq2$ のとき矛盾が生じることを示す。$\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R$ のとき性質16(2)によって $\overline{I}=\overline{R}'\times R$ となる。また $R^2\leqq R\diamond R$ から $\overline{R}'\times R\times R\leqq R$ となり，$\overline{I}=\overline{R}'\times R$ によって $\overline{I}\times R\leqq R$ となる。この $\overline{I}\times R\leqq R$ と，一般に成り立つ $I\times R\leqq R$ を用いて，$(\overline{I}\vee I)\times R\leqq R$ すなわち $E\times R\leqq R$ が得られる。ところで $I\leqq E$ であるから $E\times R=R$ となる。$E=[e_{ij}]\,(e_{ij}=1)$ とおけば，$E\times R=R$ から

$$(e_{i1}\wedge r_{1j})\vee(e_{i2}\wedge r_{2j})\vee\cdots\vee(e_{in}\wedge r_{nj})=r_{ij}$$

となり，$e_{i1}=e_{i2}=\cdots=e_{in}=1$ だから $r_{1j}\vee r_{2j}\vee\cdots\vee r_{nj}=r_{ij}$ となる。これから $r_{ij}=0$ ならば $r_{1j}\vee r_{2j}\vee\cdots\vee r_{nj}=0$ すなわち R の第 j 列はすべて 0 となる。したがって R の各列はすべて 0 であるか，またはすべて 1 である。

(a) R の第 1 列がすべて 0 のとき

$\overline{R}'\times R$ の $(j,\ 1)$ 要素は，

$$(\overline{r_{1j}}\wedge r_{11})\vee(\overline{r_{2j}}\wedge r_{21})\vee\cdots\vee(\overline{r_{nj}}\wedge r_{n1})=0$$

となる。しかし $j\neq1$ のときは $\overline{I}=\overline{R}'\times R$ から

$$(\overline{r_{1j}}\wedge r_{11})\vee(\overline{r_{2j}}\wedge r_{21})\vee\cdots\vee(\overline{r_{nj}}\wedge r_{n1})=1$$

とならねばならない。これは矛盾する。

(b) R の第 1 列がすべて 1 のとき

$\overline{R}'\times R$ の $(j,\ 1)$ 要素は

$$(\overline{r_{1j}}\wedge r_{11})\vee(\overline{r_{2j}}\wedge r_{21})\vee\cdots\vee(\overline{r_{nj}}\wedge r_{n1})=\overline{r_{1j}}\vee\overline{r_{2j}}\vee\cdots\vee\overline{r_{nj}}$$

となる。$j\neq1$ のときは $\overline{I}=\overline{R}'\times R$ から $\overline{r_{1j}}\vee\overline{r_{2j}}\vee\cdots\vee\overline{r_{nj}}=1$ となり，ある k に対して $r_{kj}=0$ となる。したがって R の第 j 列はすべて 0 となるので，$\overline{R}'\times R$ の $(1,\ j)$ 要素は

$$(\overline{r_{11}} \wedge r_{1j}) \vee (\overline{r_{21}} \wedge r_{2j}) \vee \cdots \vee (\overline{r_{n1}} \wedge r_{nj}) = 0$$

となる。しかし，$\overline{I}=\overline{R'}\times R$ によって $j \neq 1$ のとき $\overline{R'}\times R$ の $(1, j)$ 要素は1であるから，これは矛盾する。

(2) $R=[1]\,(1\times1)$ または $R=[0]\,(1\times1)$ のとき

このとき，明らかに $\overline{I} \leqq \overline{R'}\times R$，$R^2 \leqq R \diamond R$ となる。　(証明終)

[性質21]　次の条件は同値である。

(1) $\overline{I} \leqq R\times\overline{R'}$, $R^2 \leqq R \diamond R$

(2) $\overline{I} \leqq R\times\overline{R'}$, $R\times\overline{R'}\times R \leqq R$

(3) $\overline{I} \leqq \overline{R'}\times R$, $R^2 \leqq R \diamond R$

(4) $\overline{I} \leqq \overline{R'}\times R$, $R\times\overline{R'}\times R \leqq R$

(5) R は1次行列である。

(証明) 性質17－20による。　(証明終)

[性質22]　次の条件は同値である。

(1) $\overline{I} \leqq \overline{R}\times R'$, $R^2 \leqq R \diamond R$

(2) $\overline{I} \leqq \overline{R}\times R'$, $R\times\overline{R'}\times R \leqq R$

(3) $\overline{I} \leqq R'\times\overline{R}$, $R^2 \leqq R \diamond R$

(4) $\overline{I} \leqq R'\times\overline{R}$, $R\times\overline{R'}\times R \leqq R$

(5) R は1次行列である。

(証明) 性質21による。　(証明終)

[性質23]　$\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R\times\overline{R'}$ のとき

(1) $R^2 \leqq R \diamond R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$　　(2) $R\times\overline{R'}\times R \leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質6において $S=R$ とおけばよい。　(証明終)

[性質24]　$\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'}\times R$ のとき

(1) $R\times\overline{R'}\times R \leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$　　(2) $R^2 \leqq R \diamond R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質7において $S=R$ とおく。　(証明終)

[性質25]　$\overline{R'} \leqq R\times\overline{R'}$ のとき

(1) $R^2 \leqq R \diamond R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$　　(2) $R\times\overline{R'}\times R \leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質23による。　(証明終)

[注意3] 一般には，「$\overline{R'} \leqq R\times\overline{R'}$，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Rightarrow R^2 \leqq R \diamond R$」とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$(\overline{R})^2=\begin{bmatrix}0100\\0000\\0000\\0000\end{bmatrix}\leqq\overline{R},\qquad R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}0000\\1001\\1001\\1000\end{bmatrix}\geqq\overline{R'}$$

であるが，

$$R^2=\begin{bmatrix}1111\\1111\\1111\\1111\end{bmatrix},\qquad R\diamondsuit R=\begin{bmatrix}1011\\1111\\1111\\1111\end{bmatrix}$$

となって $R^2\leqq R\diamondsuit R$ とはならない。

なお，性質54(1)(2)で示すように，$\overline{R'}\leqq R\times\overline{R'}$ かつ $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ のとき $R\vee R'=E$ となる。

[注意4] 一般には，「$\overline{R'}\leqq R\times\overline{R'}$，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\Rightarrow R\times\overline{R'}\times R\leqq R$」とはならない。

いま

$$R=\begin{bmatrix}1011\\1111\\1111\\1101\end{bmatrix}$$

とおけば

$$(\overline{R})^2=\begin{bmatrix}0000\\0000\\0000\\0000\end{bmatrix}\leqq\overline{R},\qquad R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}0001\\1001\\1001\\1000\end{bmatrix}\geqq\overline{R'}$$

であるが，

$$R\times\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}1101\\1111\\1111\\1011\end{bmatrix}$$

となって，$R\times\overline{R'}\times R\leqq R$ とはならない。

[注意5] 一般には，「$\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\Rightarrow\overline{R'}\leqq R\times\overline{R'}$」とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

とおけば，

$$\overline{R'}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I,\qquad R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

となり，$\overline{R'}\leqq R\times R'$ とはならない。

[性質26]　$\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ のとき

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R\Rightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$　　(2) $R^2\leqq R\Diamond R\Rightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(証明) 性質24による。　(証明終)

[性質27]　$I\leqq R$ のとき

(1) $R^2\leqq R\Diamond R\Rightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$　　(2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R\Rightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(証明) $I\leqq R$ から $\overline{R'}\leqq R\times\overline{R'}$ となるので性質25による。　(証明終)

上の性質は，$I\leqq R$ のとき $\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ ともなるから，性質26からも得られる。また，上の性質27(1)は $I\leqq R$ のとき $R\leqq R^2$ となるから次の性質28からもいえる。

[性質28]　$R\leqq R^2$，$R^2\leqq R\Diamond R\Rightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(証明) $R\leqq R^2\leqq R\Diamond R$ から $R\leqq R\Diamond R$ となり，したがって $(\overline{R})^2\leqq R$ となる。

(証明終)

[注意6] 一般には，「$R=R^2$, $R\times\overline{R'}\times R\leqq R\Rightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$」とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば

$$R^2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=R,\quad R\times\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\leqq R$$

となるが，

$$(\overline{R})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であって $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ とはならない。

[性質29]　[1, 11]

(1) $R^2 \leqq R \diamondsuit R \Leftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \diamondsuit \overline{R}$　　(2) $R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times R' \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

[性質30]

(1) $R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R',\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R},\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(3) $R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R',\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(4) $R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R},\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(証明) 性質23 , 性質24において R を $\overline{R}$ とおき, 性質29を用いる。(証明終)

[性質31]

(1) $R \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'},\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R,\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(3) $R \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'},\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(4) $R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R,\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(証明) 性質30による。　(証明終)

[性質32]

(1) $R' \leqq \overline{R} \times R',\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R' \leqq R' \times \overline{R},\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(3) $R' \leqq \overline{R} \times R',\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(4) $R' \leqq R' \times \overline{R},\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(証明) 性質30による。　(証明終)

[性質33]　[11]

(1) $R \leqq R \times \overline{R'},\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \leqq \overline{R'} \times R,\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(3) $R \leqq R \times \overline{R'},\ R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(4) $R \leqq \overline{R}' \times R,\ R \times \overline{R}' \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）性質32による。　　　　（証明終）

［性質34］　［2, 11］$R \wedge I = O$ のとき

(1) $R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$　　　(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）$R \wedge I = O$ から性質 $I \leqq \overline{R}$ となるので，$R' \leqq R' \times \overline{R}$ となる。したがって性質32による。　　　　（証明終）

［性質35］

(1) $R \leqq \overline{R} \times R',\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \leqq R' \times \overline{R},\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(3) $R \leqq \overline{R} \times R',\ R \times \overline{R}' \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(4) $R \leqq R' \times \overline{R},\ R \times \overline{R}' \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）(1) 性質13によって $R \wedge I \leqq (\overline{R} \times R') \wedge I = O$ であるから 性質34による。

(2)－(4) (1)と同様である。　　　　（証明終）

上の性質35は形式的には成立するが，以下の性質37で示すように上の性質の条件を満たす行列 R は $R = O$ に限られる。

［性質36］　(1) $R \leqq \overline{R} \times R'$, $R^2 \leqq R \Leftrightarrow R = O$　(2) $R \leqq R' \times \overline{R},\ R^2 \leqq R \Leftrightarrow R = O$

（証明）(1) (a) $R \leqq \overline{R} \times R',\ R^2 \leqq R$ のとき

$R \times R \leqq R$ から $R \leqq R \diamondsuit \overline{R}'$ すなわち $\overline{R} \geqq \overline{R} \times R'$ となる。したがって $R \leqq \overline{R} \times R' \leqq \overline{R}$ となり，$R \leqq \overline{R}$ となる。よって，これから $R = O$ となる。

(b) $R = O$ のとき：明らかに $R \leqq \overline{R} \times R',\ R^2 \leqq R$ となる。

(2) (1)と同様である。　　　　（証明終）

［性質37］

(1) $R \leqq \overline{R} \times R',\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Leftrightarrow R = O$　　(3) $R \leqq \overline{R} \times R',\ R \times \overline{R}' \times R \leqq R \Leftrightarrow R = O$

(2) $R \leqq R' \times \overline{R},\ R^2 \leqq R \diamondsuit R \Leftrightarrow R = O$　　(4) $R \leqq R' \times \overline{R},\ R \times \overline{R}' \times R \leqq R \Leftrightarrow R = O$

（証明）(1) (a) $R \leqq \overline{R} \times R',\ R^2 \leqq R \diamondsuit R$ のとき

性質35によって $R^2 \leqq R$ となるから，性質36によって $R = O$ となる。

(b) $R = O$ のとき：明らかに $R \leqq \overline{R} \times R',\ R^2 \leqq R \diamondsuit R$ となる。

(2)−(4)　(1)と同様である。　(証明終)

[注意7]　上記の性質37(3)は「$R\times\overline{R}'\times R\leqq R\leqq\overline{R}\times R' \Leftrightarrow R=O$」と表現できるが，一般には「$R\times\overline{R}'\times R\leqq\overline{R}\times R' \Rightarrow R=O$」は成立しない。これは$R$として$R=E$を考えてみればわかる。(4)についても同様である。

[性質38]

(1)　$R^2\leqq R\Diamond R$のとき　$R\leqq\overline{R}\times R' \Leftrightarrow R\leqq R'\times\overline{R} \Leftrightarrow R=O$

(2)　$R\times\overline{R}'\times R\leqq R$のとき　$R\leqq\overline{R}\times R' \Leftrightarrow R\leqq R'\times\overline{R} \Leftrightarrow R=O$

(3)　$R^2\leqq R$のとき　$R\leqq\overline{R}\times R' \Leftrightarrow R\leqq R'\times\overline{R} \Leftrightarrow R=O$

(証明)　性質36および 性質37による。　(証明終)

なお，$R=O$の同値条件として次の性質も成立する。この性質の各条件はほとんど自明であり，またよく知られていると思われるが，念のため証明を与える。また，ここで示しているもの以外にも$R=O$の同値条件が知られている[4]。

[性質39]　次の条件は同値である。

(1)　$R=O$

(2)　$R\leqq\overline{R}$

(3)　$R\times R'\leqq\overline{I}$

(4)　$R'\times R\leqq\overline{I}$

(5)　$(R\times R')\wedge I=O$　[4]

(6)　$(R'\times R)\wedge I=O$　[4]

(7)　$R'=R,\ R^2\leqq\overline{I}$

(8)　$R'=R,\ R^2\wedge I=O$　[4]

(9)　$R'=R,\ \nabla R=O$

(10)　$R^2=R,\ R\wedge I=O$　[4]

(11)　$R^2=R,\ \nabla R=O$

(12)　$R^2=R,\ R''=O$

(13)　$R'=R,\ R''=O$

(14)　$R'=R,\ R^2\leqq R,\ R\wedge I=O$　[4]

(証明)　(1) ⇔ (2)　$R=O \Leftrightarrow R\leqq O \Leftrightarrow R\wedge R\leqq O \Leftrightarrow R\leqq\overline{R}$

(2) ⇔ (3)　$R\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\leqq\overline{I}\Diamond\overline{R} \Leftrightarrow R\times R'\leqq\overline{I}$

(2) ⇔ (4)　$R\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\leqq\overline{R}\Diamond\overline{I} \Leftrightarrow R'\times R\leqq\overline{I}$

(3) ⇔ (5)　$R\times R'\leqq\overline{I} \Leftrightarrow (R\times R')\wedge I\leqq O \Leftrightarrow (R\times R')\wedge I=O$

(4) ⇔ (6)　$R'\times R\leqq\overline{I} \Leftrightarrow (R'\times R)\wedge I\leqq O \Leftrightarrow (R'\times R)\wedge I=O$

(1) ⇒ (7)　$R=O$のとき明らかに$R'=R,\ R^2\leqq\overline{I}$となる。

(7) ⇒ (4)　$R'=R,\ R\times R\leqq\overline{I}$から$R'\times R\leqq\overline{I}$となる。

(7) ⇔ (8)　$R^2 \leqq \overline{I} \Leftrightarrow R^2 \wedge I = O$ であるから明らかである。

(8) ⇔ (9)　$R^2 \wedge I = O \Leftrightarrow \triangledown R = O$ による。

(1) ⇒ (10)　明らかである。

(10) ⇒ (1)　$R = R^2 = \cdots = R^n = O$

(1) ⇒ (11) ⇒ (10)，(1) ⇒ (12) ⇒ (11)，(1) ⇒ (13)　明らかである。

(13) ⇒ (8)　$R^n = O$ から $R^2 \wedge I = O$ となる。

(1) ⇒ (14)　明らかである。

(14) ⇒ (13)　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$ のとき $R^n = O$ となる。　(証明終)

ここで，以下の議論のために $R \vee R' \vee I = E$ すなわち行列 R で表現される関係が連結的となるための必要十分条件をまとめておこう。次の性質40および性質41はほとんど自明であり，またすでによく知られていると思われる。この $R \vee R' \vee I = E$ についてはここで示しているもの以外にもいくつかの同値条件が知られている[3,5,8,10]。

[性質40]　次の条件は同値である。

(1)　$R \vee R' \vee I = E$

(2)　$\overline{I} \leqq R \vee R'$　[18]

(3)　(a)　$\overline{I} \leqq (R \wedge \overline{I}) \vee R'$

　　(b)　$\overline{I} \leqq (R' \wedge \overline{I}) \vee R$

(4)　(a)　$\overline{R'} \leqq (R \wedge \overline{R'}) \vee I$　[5]

　　(b)　$\overline{R} \leqq (R' \wedge \overline{R}) \vee I$

(5)　(a)　$\overline{R} \leqq (\overline{R} \wedge I) \vee R'$

　　(b)　$\overline{R'} \leqq (\overline{R'} \wedge I) \vee R$

(6)　(a)　$\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R$

　　(b)　$\overline{R} \wedge \overline{I} \leqq R'$

(7)　(a)　$\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{I}$

　　(b)　$\overline{R} \wedge \overline{I} \leqq R' \wedge \overline{I}$

(8)　(a)　$\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'}$

　　(b)　$\overline{R} \wedge \overline{I} \leqq R' \wedge \overline{R}$

(9)　(a)　$\overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'}$　[10]

　　(b)　$\overline{R} \wedge \overline{I} = R' \wedge \overline{R}$　[10]

(10)　(a)　$\overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$

　　(b)　$\overline{R} \wedge \overline{I} = R' \wedge \overline{R} \wedge \overline{I}$

(11)　(a)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$

　　(b)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R' \wedge \overline{R} \wedge \overline{I}$

(12)　(a)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'}$

　　(b)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R' \wedge \overline{R}$

(13)　(a)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R} \wedge I$

　　(b)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R'} \wedge I$

(14)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} = \overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge I$

(15)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge I$

(16)　$\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} = O$

(証明) (1) ⇒ (2) $R \vee R' \vee I = E$ は $E \leqq R \vee R' \vee I$ と表せる。したがって $E \wedge \overline{I} \leqq R \vee R'$ となり，$\overline{I} \leqq R \vee R'$ が得られる。

(2) ⇒ (3) (a) $\overline{I} \leqq R \vee R'$ から $\overline{I} \wedge \overline{I} \leqq (R \vee R') \wedge \overline{I}$ となるので，これから

$$\overline{I} \leqq (R \wedge \overline{I}) \vee (R' \wedge \overline{I}) \leqq (R \wedge \overline{I}) \vee R'$$

となる。

(3) (a) ⇒ (7) (a) $\overline{I} \leqq (R \wedge \overline{I}) \vee R'$ から $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{I}$ となる。

(7) (a) ⇒ (6) (a) $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{I} \leqq R$

(6) (a) ⇒ (8) (a) $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R$ から $(\overline{R'} \wedge \overline{I}) \wedge \overline{R'} \leqq R \wedge \overline{R'}$ となり，したがって $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'}$ となる。

(8) (a) ⇔ (4) (a) $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'} \Leftrightarrow \overline{R'} \leqq (R \wedge \overline{R'}) \vee I$

(4) (a) ⇒ (10) (a) $\overline{R'} \leqq (R \wedge \overline{R'}) \vee I$ から $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq ((R \wedge \overline{R'}) \vee I) \wedge \overline{I}$ となり，これから $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$ となる。したがって $\overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$ が得られる。

(10) (a) ⇒ (9) (a) 一般に $R \wedge \overline{R'} \wedge I = O$ であるから $\overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$ から $\overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'}$ が得られる。

(9) (a) ⇒ (13) (a) $\overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'}$ から $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'}$ となるので，これから $\overline{R'} \leqq (R \wedge \overline{R'}) \vee I$ となる。したがって $\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R} \wedge ((R \wedge \overline{R'}) \vee I)$ となり，$\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R} \wedge I$ が得られる。

(10) (a) ⇒ (11) (a) $\overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$ から $\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$ となる。

(11) (a) ⇒ (12) (a) 一般に $R \wedge \overline{R'} \wedge I = O$ であるから $\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{R'}$ となる。

(12) (a) ⇒ (16) $\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \wedge \overline{R'}$ から $(\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}) \wedge \overline{R} \leqq (R \wedge \overline{R'}) \wedge \overline{R} = O$ となり，$\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} = O$ が得られる。

(13) (a) ⇔ (5) (a) 明らかに $\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R} \wedge I \Leftrightarrow \overline{R} \leqq (\overline{R} \wedge I) \vee R'$ である。

(13) (a) ⇒ (14) $\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R} \wedge I$ から $(\overline{R} \wedge \overline{R'}) \wedge \overline{R'} \leqq (\overline{R} \wedge I) \wedge \overline{R'}$ となり，したがって $\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge I$ となる。これから $\overline{R} \wedge \overline{R'} = \overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge I$ となる。

(14) ⇒ (15) $\overline{R} \wedge \overline{R'} = \overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge I$ から $\overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \wedge \overline{R'} = \overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge I$ となる。

(15) ⇒ (16) $\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge I$ から

$$(\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge\overline{I})\wedge\overline{I}\leqq(\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge I)\wedge\overline{I}=O$$

となり $\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge\overline{I}=O$ が得られる。

(16) ⇒ (1) $\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge\overline{I}=O$ から $R\vee R'\vee I=E$ となる。

各項の(a), (b)については両辺を転置すれば同値であることがわかる。

（証明終）

[性質41]　次の条件は同値である。

(1) $R\vee R'\vee I=E$

(2) $\overline{R}\wedge\overline{R'}\leqq I$ [18]

(3) (a) $(\overline{R}\vee I)\wedge\overline{R'}\leqq I$

(b) $(\overline{R'}\vee I)\wedge\overline{R}\leqq I$

(4) (a) $(\overline{R}\vee R')\wedge\overline{I}\leqq R'$

(b) $(\overline{R'}\vee R)\wedge\overline{I}\leqq R$

(5) (a) $(R\vee\overline{I})\wedge\overline{R'}\leqq R$

(b) $(R'\vee\overline{I})\wedge\overline{R}\leqq R'$

(6) (a) $\overline{R}\leqq R'\vee I$ [18]

(b) $\overline{R'}\leqq R\vee I$

(7) (a) $\overline{R}\vee I\leqq R'\vee I$

(b) $\overline{R'}\vee I\leqq R\vee I$ [3]

(8) (a) $\overline{R}\vee R'\leqq R'\vee I$

(b) $\overline{R'}\vee R\leqq R\vee I$

(9) (a) $\overline{R}\vee R'=R'\vee I$

(b) $\overline{R'}\vee R=R\vee I$ [8]

(10) (a) $\overline{R}\vee R'\vee I=R'\vee I$

(b) $\overline{R'}\vee R\vee I=R\vee I$ [8]

(11) (a) $\overline{R}\vee R'\vee I\leqq R\vee R'\vee I$

(b) $\overline{R'}\vee R\vee I\leqq R\vee R'\vee I$

(12) (a) $\overline{R}\vee R'\leqq R\vee R'\vee I$

(b) $\overline{R'}\vee R\leqq R\vee R'\vee I$

(13) (a) $R\vee\overline{I}\leqq R\vee R'$

(b) $R'\vee\overline{I}\leqq R\vee R'$

(14) $R\vee R'\vee\overline{I}=R\vee R'$

(15) $R\vee R'\vee\overline{I}\leqq R\vee R'\vee I$

（証明）一般に，$S\leqq T\Leftrightarrow\overline{T}\leqq\overline{S}$；$S=T\Leftrightarrow\overline{T}=\overline{S}$ であるから，性質40の(2)から(15)に，これらの性質を適用すればよい。　（証明終）

[性質42]　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ のとき

(1) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\Rightarrow R\vee R'\vee I=E$

(2) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\Rightarrow R\vee R'\vee I=E$

(3) $\overline{R}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R'\Rightarrow R\vee R'\vee I=E$

(4) $\overline{R}\wedge\overline{I}\leqq R'\times\overline{R}\Rightarrow R\vee R'\vee I=E$

（証明）(1) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ から $R\leqq R\diamond R$ すなわち $R\times\overline{R'}\leqq R$ となり，$\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\leqq R$ が得られる。したがって性質40(6)(a)，(1)によって $R\vee R'\vee I=E$ とな

る。

(2)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ から $R \leqq R \Diamond R$ すなわち $\overline{R'} \times R \leqq R$ となり，$\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R \leqq R$ が得られる。したがって性質40(6)(a)，(1)によって $R \vee R' \vee I = E$ となる。

(3)　(1)による。

(4)　(2)による。　(証明終)

与えられた関係行列 R が $R \vee R' \vee I = E$ となるための条件については，上記のもの以外にもいくつかの条件が知られている[6, 7, 9]。

[注意8]　一般には，「$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$，$R \vee R' \vee I = E \Rightarrow \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$(\overline{R})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{R}, \qquad R \vee R' \vee I = E$$

であるが，

$$\overline{R'} \wedge \overline{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R \times \overline{R'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であって，$\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$ とはならない。

[性質43]　$R^2 \leqq R$ のとき

(1)　$R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R' \Rightarrow \triangledown R \leqq I$

(2)　$R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R} \Rightarrow \triangledown R \leqq I$

(3)　$R \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'} \Rightarrow \triangledown R \leqq I$

(4)　$R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R \Rightarrow \triangledown R \leqq I$

(証明)　明らかに，$\triangledown R \leqq I \Leftrightarrow \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I = E$ であるから性質42において R を $\overline{R}$ とおけばよい。　(証明終)

なお，上の性質中の $\triangledown R$ は $\triangledown R = R \wedge R'$ で定義され，$\triangledown R \leqq I$ なる R で表現される2項関係は反対称的といわれる。

[注意9]　一般には，「$R^2 \leqq R$，$\triangledown R \leqq I \Rightarrow R \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば,

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R \ , \qquad \triangledown R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leqq I$$

であるが,

$$R \wedge \overline{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \qquad R \times \overline{R'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり，$R \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$ とはならない。しかし，$\triangledown R \leqq I$ を $\triangledown R = I$ とすれば次の性質44で示すように「$\triangledown R = I \Rightarrow R \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$」は成立する。

[性質44]　$\triangledown R = I$ のとき

(1) $R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R'$　　(3) $R \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$

(2) $R' \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R}$　　(4) $R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R$

(証明) (1) $\triangledown R = I$ から $\triangledown R \leqq I$ であるから $R \wedge R' \wedge \overline{I} = O$ となり，$R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R}$ となる。また $\triangledown R = I$ から $I \leqq R'$ であるから $\overline{R} \leqq \overline{R} \times R'$ となるので $R' \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \leqq \overline{R} \times R'$ が得られる。

(2) (1)と同様である。

(3) (1)による。

(4) (2)による。　　(証明終)

[性質45]　$R \vee R' = \overline{I}$ のとき

(1) $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$　　(3) $\overline{R} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R'$

(2) $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R$　　(4) $\overline{R} \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R}$

(証明) $R \vee R' = \overline{I} \Leftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{R'} = I$ であるから，性質44において R を $\overline{R}$ とおけばよい。　　(証明終)

[性質46]　$R \vee R' \vee I = E$，$R \wedge I = O$ のとき

(1) $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$　　(3) $\overline{R} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R} \times R'$

(2) $\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \times R$　　(4) $\overline{R} \wedge \overline{I} \leqq R' \times \overline{R}$

(証明) $R \vee R' = \overline{I} \Leftrightarrow R \vee R' \vee I = E$，$R \wedge I = O$

であるから，性質45による。　　(証明終)

[注意10] 一般には，「$R \vee R' \vee I = E \Rightarrow \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \end{bmatrix}$$

とおけば，明らかに$R \vee R' \vee I = E$であるが，

$$\overline{R'} \wedge \overline{I} = \begin{bmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{bmatrix}, \qquad R \times \overline{R'} = \begin{bmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{bmatrix}$$

となり，$\overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq R \times \overline{R'}$とはならない。

[性質47]　[10]　$R^2 \leqq \overline{I} \Leftrightarrow R^2 \wedge I = O \Leftrightarrow \bigtriangledown R = O$

上の性質中の$\bigtriangledown R = O$はこれを満たすRによって表現される関係が非対称的であることを意味する。

[性質48]　(1)　$R^2 \leqq R \times \overline{R'} \Rightarrow \bigtriangledown R = O$　　(3)　$R^2 \leqq R' \times \overline{R} \Rightarrow \bigtriangledown R = O$

(2)　$R^2 \leqq \overline{R'} \times R \Rightarrow \bigtriangledown R = O$　　(4)　$R^2 \leqq \overline{R} \times R' \Rightarrow \bigtriangledown R = O$

(証明)　(1)　性質13(1)によって$R^2 \wedge I \leqq (R \times \overline{R'}) \wedge I = O$となるので，性質47によって$\bigtriangledown R = O$となる。

(2)−(4)　(1)と同様である。　(証明終)

上の性質48の(1)，(2)については逆も，以下の性質49で示すように成立するが，(3)，(4)の逆は次の注意11で示すように成立しない。

[注意11]　一般には次の命題はいずれも成立しない。

$$\bigtriangledown R = O \Rightarrow R^2 \leqq R' \times \overline{R}\ ;\ \bigtriangledown R = O \Rightarrow R^2 \leqq \overline{R} \times R'$$

いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,1\,1 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}, \qquad R' \times \overline{R} = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{R} \times R' = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix}$$

となり，$\bigtriangledown R = O$であるが，$R^2 \leqq R' \times \overline{R}$，$R^2 \leqq \overline{R} \times R'$のいずれも成立しない。

［性質49］　$\nabla R=O$ のとき

(1)　$R^2 \leqq R \times \overline{R'}$　　(3)　$\overline{R} \times R' \leqq (\overline{R})^2$

(2)　$R^2 \leqq \overline{R'} \times R$　　(4)　$R' \times \overline{R} \leqq (\overline{R})^2$

(証明)　(1)　$\nabla R=O$ から $R \wedge R'=O$ となり，したがって $R \leqq \overline{R'}$ となる。よって $R \times R \leqq R \times \overline{R'}$ が得られる。

(2)　(1)と同様である。

(3)　$\nabla R=O$ から $R \wedge R'=O$ だから，$R' \leqq \overline{R}$ となり，$\overline{R} \times R' \leqq \overline{R} \times \overline{R}$ となる。

(4)　(3)と同様である。　(証明終)

［注意12］一般には，

$$\overline{R} \times R' \leqq (\overline{R})^2 \Rightarrow \nabla R=O$$

とはならない。これは $R=E$ とおいてみればわかる。

［性質50］　次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R=O$　　(3)　$R^2 \leqq \overline{R'} \times R$

(2)　$R^2 \leqq R \times \overline{R'}$

(証明)　(1)　性質48(1)(2)と性質49(1)(2)による。　(証明終)

［性質51］　$R^2 \leqq R$ のとき

(1)　$R' \leqq \overline{R} \times R' \Rightarrow \nabla R=O$　　(3)　$R \leqq R \times \overline{R'} \Rightarrow \nabla R=O$

(2)　$R' \leqq R' \times \overline{R} \Rightarrow \nabla R=O$　　(4)　$R \leqq \overline{R'} \times R \Rightarrow \nabla R=O$

(証明)　(1)　$R' \leqq \overline{R} \times R'$ から $R \leqq R \times \overline{R'}$ となり，$R^2 \leqq R \leqq R \times \overline{R'}$ が得られる。したがって性質48(1)によって $\nabla R=O$ となる。

(2)　$R' \leqq R' \times \overline{R}$ から $R \leqq \overline{R'} \times R$ となり，$R^2 \leqq R \leqq \overline{R'} \times R$ が得られる。したがって性質48(2) によって $\nabla R=O$ となる。

(3)　(1)による。

(4)　(2)による。　(証明終)

上の性質の(1)は次のようにして示すこともできる。$R^2 \leqq R$ から $R \leqq R \diamond \overline{R'}$ となるので，これから $\overline{R} \geqq \overline{R} \times R' \geqq R'$ となり，$R' \leqq \overline{R}$ が得られる。したがって $R \wedge R'=O$ となる。(2)についても同様である。

［性質52］　$\nabla R=O$ のとき

(1) $R' \leqq \overline{R} \times R'$　　(3) $R \leqq R \times \overline{R'}$

(2) $R' \leqq R' \times \overline{R}$　　(4) $R \leqq \overline{R'} \times R$

(証明) (1) $\nabla R = O$ から $R \wedge I = O$ すなわち $I \leqq \overline{R}$ であるから $R' \leqq \overline{R} \times R'$ となる。

(2)−(4) (1)と同様である。　(証明終)

[性質53]　$R^2 \leqq R$ のとき次の条件は同値である。

(1) $\nabla R = O$　　(4) $R \leqq R \times \overline{R'}$

(2) $R' \leqq \overline{R} \times R'$　　(5) $R \leqq \overline{R'} \times R$

(3) $R' \leqq R' \times \overline{R}$

(証明) 性質51および性質52による。　(証明終)

[性質54]　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ のとき次の条件は同値である。

(1) $R \vee R' = E$　　(4) $\overline{R} \leqq \overline{R} \times R'$

(2) $\overline{R'} \leqq R \times \overline{R'}$　　(5) $\overline{R} \leqq R' \times \overline{R}$

(3) $\overline{R'} \leqq \overline{R'} \times R$

(証明) 性質53において R を $\overline{R}$ とおけばよい。　(証明終)

[性質55] (1) $\overline{R'} \leqq R \times \overline{R'} \Leftrightarrow I \leqq R$　　(3) $\overline{R} \leqq \overline{R} \times R' \Leftrightarrow I \leqq R$

(2) $\overline{R'} \leqq \overline{R'} \times R \Leftrightarrow I \leqq R$　　(4) $\overline{R} \leqq R' \times \overline{R} \Leftrightarrow I \leqq R$

(証明) (1) (a) 性質13(1)によって $\overline{R'} \wedge I \leqq (R \times \overline{R'}) \wedge I = O$ だから $I \leqq R$ となる。

(b) $I \leqq R$ のとき：明らかに $\overline{R'} \leqq R \times \overline{R'}$ となる。

(2) (a) $\overline{R'} \leqq \overline{R'} \times R$ のとき：性質13(2)によって $\overline{R'} \wedge I \leqq (\overline{R'} \times R) \wedge I = O$ だから $I \leqq R$ となる。

(b) $I \leqq R$ のとき：明らかに $\overline{R'} \leqq \overline{R'} \times R$ となる。

(3) (1)による。

(4) (2)による。　(証明終)

[性質56]　次の条件は同値である。

(1) $I \leqq R$　　(4) $\overline{R} \leqq \overline{R} \times R'$

(2) $\overline{R'} \leqq R \times \overline{R'}$　　(5) $\overline{R} \leqq R' \times \overline{R}$

(3) $\overline{R'} \leqq \overline{R'} \times R$

（証明） 性質55による。（証明終）

［性質57］ (1) $R' \leqq \overline{R} \times R' \Leftrightarrow I \leqq \overline{R}$　(3) $R \leqq R \times \overline{R'} \Leftrightarrow I \leqq \overline{R}$

(2) $R' \leqq R' \times \overline{R} \Leftrightarrow I \leqq \overline{R}$　(4) $R \leqq \overline{R'} \times R \Leftrightarrow I \leqq \overline{R}$

（証明） 性質55において R を $\overline{R}$ とおけばよい。（証明終）

なお，上の性質における $I \leqq \overline{R}$ は，「$I \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \wedge I = O$」であって，$R$ で表現される関係が非反射的であることを示している。

［性質58］ 次の条件は同値である。

(1) $R \wedge I = O$

(2) $R' \leqq \overline{R} \times R'$

(3) $R' \leqq R' \times \overline{R}$

(4) $R \leqq R \times \overline{R'}$

(5) $R \leqq \overline{R'} \times R$

（証明） 性質57による。（証明終）

［性質59］ (1) $\overline{R'} \leqq \overline{R} \times R' \Rightarrow I \leqq R$　(3) $\overline{R} \leqq R \times \overline{R'} \Rightarrow I \leqq R$

(2) $\overline{R'} \leqq R' \times \overline{R} \Rightarrow I \leqq R$　(4) $\overline{R} \leqq \overline{R'} \times R \Rightarrow I \leqq R$

（証明） (1) 性質13(4) によって $\overline{R'} \wedge I \leqq (\overline{R} \times R') \wedge I = O$ だから $I \leqq R$ となる。

(2) 性質13(3)によって $\overline{R'} \wedge I \leqq (R' \times \overline{R}) \wedge I = O$ だから $I \leqq R$ となる。

(3) (1)による。

(4) (2)による。（証明終）

［注意13］ 一般には，「$I \leqq R \Rightarrow \overline{R'} \leqq \overline{R} \times R'$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$\overline{R'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{R} \times R' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となり，$I \leqq R$ であるが，$\overline{R'} \leqq \overline{R} \times R'$ とはならない。

［性質60］ (1) $R' \leqq R \times \overline{R'} \Rightarrow I \leqq \overline{R}$　(3) $R \leqq \overline{R} \times R' \Rightarrow I \leqq \overline{R}$

(2) $R' \leqq \overline{R'} \times R \Rightarrow I \leqq \overline{R}$　(4) $R \leqq R' \times \overline{R} \Rightarrow I \leqq \overline{R}$

（証明） 性質59 において R を $\overline{R}$ とおけばよい。（証明終）

なお，上の性質における $I \leqq \overline{R}$ は，性質57のところでも示したように，「$I \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \wedge I = O$」となる。

4．まとめ

本論文では，semitransitive 関係および Ferrers 関係の negatively transitive 関係に関する初等的性質のいくつかを明らかにした。この negatively transitive 関係の性質は容易に推移関係の性質とすることができる。すなわち，semitransitive 関係または Ferrers 関係のもとで成り立つ negatively transitive 関係の性質は，一般に semitransitive 関係または Ferrers 関係のもとでの推移関係の性質となる。なぜなら，関係行列 R が推移的のとき，$\overline{R}$ は negatively transitive となり，R が semitransitive であれば，$\overline{R}$ も semitransitive となり，また同様に R が Ferrers 関係行列であれば，$\overline{R}$ も Ferrers 関係行列となるからである。

また，本論文では semitransitive 関係や Ferrers 関係に関するある種の条件を満たす関係行列が 1 次行列に限られることを示した。さらに，従来あまり知られていないと思われる関係の連結性や反射性に関する性質を示した。この連結性や反射性に関する性質は，反対称性や非反射性に関する性質としても表現できる。

ここで得られた semitransitive 関係や Ferrers 関係の性質はほとんど自明であり，また実際の応用において直接役に立つものとは考えられないが，これらの性質は semitransitive 関係や Ferrers 関係の性質の1つの側面を示すものと考えられる。なお，本論文において，semitransitive 関係や Ferrers 関係に関しておこなった考察と同様のことを，ある特殊な関係のクラスに対しておこなうことが可能であり，それによって若干の類似の結果が得られるが，これについては次の機会に報告したい。

文　献

[1]Doignon, J., -P., Monjardet, B., Roubens, M., and Vincke, Ph.: "Biorder families, valued relations, and preference modelling," Journal of Mathematical Psychology, 30, pp.435-480 (1986).

[2]Fodor, J. and Roubens, M.: "Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support," Kluwer Academic Pub., Dordrecht (1994).

[3]橋本　寛: "連結的関係に関する若干の性質," 山口経済学雑誌, 第36巻, 第5・6号, pp.245-261 (昭和62年5月).

[4]橋本　寛: "Vacuously Transitive 関係の性質," 山口経済学雑誌, 第37巻, 第3・4号, pp.399-426 (昭和63年3月).

[5]橋本　寛: "連結的関係行列の初等的性質," 山口経済学雑誌, 第38巻, 第3・4号, pp.557-576 (平成元年7月).

[6]橋本　寛: "関係の連結性に関するある種の十分条件について," 山口経済学雑誌, 第38巻, 第5・6号, pp.783-797 (平成元年11月).

[7]橋本　寛: "Negative Transitivity に関するいくつかの十分条件について," 山口経済学雑誌, 第41巻, 第1・2号, pp.45-60 (平成5年1月).

[8]橋本　寛: "ほとんど推移的な関係行列の性質," 山口経済学雑誌, 第43巻, 第3・4号, pp.273-288 (平成7年5月).

[9]橋本　寛: "反射的推移関係の性質," 山口経済学雑誌, 第45巻, 第6号, pp.1199-1212 (平成9年9月).

[10]橋本　寛: "Negatively Transitive 関係に関する性質の一般化," 山口経済学雑誌, 第52巻, 第4号, pp.595-620 (平成16年3月).

[11] 橋本　寛: "推移性のもとでの Semitransitive 関係と Ferrers 関係," 山口経済学雑誌, 第53巻, 第5号, pp.425-448 (平成17年1月).

[12]Jamison, D. T. and Lau, L. J. : "Semiorders and the theory of choice," Econometrica, Vol. 41, No. 5, pp.901-912 (1973).

[13]柏木芳美: "関係代数的証明," 山口経済学雑誌, 第46巻, 第3号, pp.259-269 (平成10年5月).

[14]Luce, R.D.: "Semiorders and a theory of utility discrimination," Econometrica, Vol.24, pp.178-191 (1956).

[15]Peirce, C. S.: "The logic of quantity," in: C. Hartshorne, P. Weiss, eds., Collected Papers of Charles Sanders Peirce (The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1961).

[16]Riguet, J.: "Les relations de Ferrers," C. R. Acad. Sci. Paris 232, pp.1729-1730 (1951).

[17]Roubens, M. and Vincke, Ph.: "Preference Modelling," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[18]Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).

[19]Schröder, E.: "Algebra der Logik. Vol. 3," Teubner, Leipzig (1895) (Chelsea Publishing, New York, 1966).

[20]Scott, D. and Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement," The Jounal of Symbolic Logic, 23, pp.113-128 (1958).