非対称性のもとでの推移関係

橋　本　　　寛
Hiroshi Hashimoto

Necessary and sufficient conditions for a given binary relation to be irreflexive and transitive are examined under asymmetry by using Boolean matrices which represent binary relations. An irreflexive transitive relation is also called a strict partial order and has many important examples in areas of application. Not only equivalent conditions on irreflexive transitive relations but also some elementary equivalent conditions on arbitrary binary relations are presented in this paper. Some already-known properties of relational matrices are somewhat extended. Furthermore, a few basic properties of a asymmetric part of a relation are shown by using a unary operation on Boolean matrices.

1．はじめに

一般に，有限集合上の２項関係はブール行列によって表現できるので，与えられた２項関係が非反射的推移関係となるための必要十分条件を，非対称性の条件のもとでブール行列を用いて調べている。非反射的推移関係は狭義の半順序（strict partial order）とも呼ばれ，具体例も多数存在し，応用上重要である[３，７，９，18]。たとえば，よく知られているように，推移関係の非対称部分（asymmetric part）は非反射的推移関係となり［４，22]，またScott and Suppesのsemiorderは非反射的推移関係の特別な場合となっている［８，11，20]。

非反射的推移関係に関しては，これまでにも多くの同値条件が知られてお

り，とくに非反射的推移性と非対称的推移性は同値である[2，8]。本論文においては，非反射的推移関係に関する同値条件だけでなく，ブール行列に関して一般に成立するいくつかの基本的な同値条件を示すとともに，すでに知られているブール行列に関する同値条件の一般化もおこなっている。さらに関係の非対称部分に関する若干の初歩的性質も示している。

2．定義

以下の議論において用いるブール行列に関する演算と記法は文献［14］などに従うものとするが，主要なものは次のとおりである。いま$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$を0，1の要素をもつn次ブール行列とするとき

$R'=[r_{ji}]$（転置）

$\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]=[1-r_{ij}]$

$\Delta R=R\wedge\overline{R'}$（非対称部分）

$\nabla R=R\wedge R'$（対称部分）

$R\times S=[(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})]$

$R^0=I=[\delta_{ij}]$（単位行列）

$R^k=R^{k-1}\times R$　$(k=1, 2, \cdots)$

と定める。

なお，$R\wedge I=O$（Oは零行列）なるブール行列Rは非反射的関係を表現し，$R\wedge I=I$なるRは反射的関係を表現する。$\nabla R=O$であればRは非対称的関係を表現し，$\nabla R\leqq I$なるRは反対称的関係を表現する。また，$R^2\leqq R$なるRは推移的関係を表現する。本論文においては，R，S，Tなどで0，1の要素をもつn次ブール行列を表すものとし，それらの要素をr_{ij}，s_{ij}，t_{ij}のように示すものとする。さらに，Eで全要素が1の行列を表す。

3．結果

非対称性に関する非反射的推移関係の同値条件を調べるために，まず非対称性のもとで推移性と同値な条件を求める。次の性質は推移性のもとでの非反射性に関するよく知られた同値条件を示している。

［性質1］［2，8，13，16，19］ $R^2 \leqq R$ のとき次の条件は同値である。

(1) $R \wedge I = O$

(2) $\nabla R = O$

(3) $R^n = O$

［性質2］［13，16，22］ 次の条件は同値である。

(1) $\nabla R = O$

(2) $R = \Delta R$

(3) $R = R \wedge \bar{I} = \Delta R$

［性質3］ $\nabla R = O$ のとき次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $R^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(3) $R^2 \leqq \Delta R$

(4) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R$

(5) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

(6) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R$

(7) $R \times \Delta R \leqq R$

(8) $R \times \Delta R \leqq R \wedge \bar{I}$

(9) $R \times \Delta R \leqq \Delta R$

(10) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R$

(11) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$

(12) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \Delta R$

(13) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R$

(14) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(15)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq\Delta R$

(16)　$(R\wedge\bar{I})\times\Delta R\leqq R$

(17)　$(R\wedge\bar{I})\times\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}$

(18)　$(R\wedge\bar{I})\times\Delta R\leqq\Delta R$

(19)　$\Delta R\times R\leqq R$

(20)　$\Delta R\times R\leqq R\wedge\bar{I}$

(21)　$\Delta R\times R\leqq\Delta R$

(22)　$\Delta R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R$

(23)　$\Delta R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(24)　$\Delta R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\Delta R$

(25)　$(\Delta R)^2\leqq R$

(26)　$(\Delta R)^2\leqq R\wedge\bar{I}$

(27)　$(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

(証明)　性質2によって，$\nabla R=O$のとき$R=R\wedge\bar{I}=\Delta R$であるから明らかである。　(証明終)

この性質3の条件の中には互いに同値なものや，それ自身が$\nabla R=O$の条件を含むものがある。それらに関する性質を以下において調べる。

［性質4］　$S\leqq T$のとき

$$R\times S\leqq T\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times S\leqq T$$

(証明)　(1)　$R\times S\leqq T$のとき

$$(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\times S\leqq T$$

(2)　$(R\wedge\bar{I})\times S\leqq T$のとき

$S\leqq T$であるから

$$\begin{aligned}T&\geqq((R\wedge\bar{I})\times S)\vee S\\&=((R\wedge\bar{I})\times S)\vee(I\times S)\\&\geqq((R\wedge\bar{I})\times S)\vee((R\wedge I)\times S)\\&=((R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge I))\times S\\&=R\times S\end{aligned}$$

(証明終)

[性質5]　$S \leqq T$のとき

$$S \times R \leqq T \Leftrightarrow S \times (R \wedge \bar{I}) \leqq T$$

(証明)　(1)　$S \times R \leqq T$のとき

$$S \times (R \wedge \bar{I}) \leqq S \times R \leqq T$$

(2)　$S \times (R \wedge \bar{I}) \leqq T$のとき

$S \leqq T$であるから

$$\begin{aligned} T &\geqq (S \times (R \wedge \bar{I})) \vee S \\ &= (S \times (R \wedge \bar{I})) \vee (S \times I) \\ &\geqq (S \times (R \wedge \bar{I})) \vee (S \times (R \wedge I)) \\ &= S \times ((R \wedge \bar{I}) \vee (R \wedge I)) \\ &= S \times R \end{aligned}$$

(証明終)

[性質6]　$R \times S \leqq S \Leftrightarrow (R \wedge \bar{I}) \times S \leqq S$

(証明)　性質4において$T=S$とおけばよい。　(証明終)

[性質7]　$S \times R \leqq S \Leftrightarrow S \times (R \wedge \bar{I}) \leqq S$

(証明)　性質5において$T=S$とおけばよい。　(証明終)

[注意1]　一般には,

$$R \times S \leqq S \Rightarrow S \times R \leqq S$$

とはならない。

いま,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$R \times S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leqq S$$

であるが,

$$S\times R=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

であって，$S\times R\leqq S$とはならない。

［性質8］［16，17］　次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$

(2)　$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R$

(3)　$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq R$

(4)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R$

(証明)　(1)⇔(2)　性質7において$S=R$とおけばよい。

(1)⇔(3)　性質6において$S=R$とおけばよい。

(2)⇔(4)　性質4において$S=R\wedge\bar{I}$，$T=R$とおけばよい。　(証明終)

［性質9］［14］　次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$，$R\wedge I=O$

(2)　$R^2\leqq R\wedge\bar{I}$

(3)　$R^2\leqq\Delta R$

［性質10］　次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$，$\nabla R=O$

(2)　$R^2\leqq R\wedge\bar{I}$

(3)　$R^2\leqq\Delta R$

(証明)　性質1によって

$$R^2\leqq R,\ \nabla R=O\Leftrightarrow R^2\leqq R,\ R\wedge I=O$$

であるから性質9による。　(証明終)

［性質11］　次の条件は同値である。

(1)　$R\wedge I\leqq S$

(2)　$R\wedge I\leqq S'$

(3)　$R\wedge\bar{S}\leqq R\wedge\bar{I}$

(4)　$R\wedge\overline{S'}\leqq R\wedge\bar{I}$

(証明)　(1)⇔(2)　$R \wedge I \leqq S \Leftrightarrow (R \wedge I)' \leqq S'$

$(R \wedge I)' = R \wedge I$であるから

$$R \wedge I \leqq S \Leftrightarrow R \wedge I \leqq S'$$

(1)⇒(3)　$R \wedge I \leqq S$から$\overline{S} \leqq \overline{R} \vee \overline{I}$となるので

$$R \wedge \overline{S} \leqq R \wedge (\overline{R} \vee \overline{I}) = R \wedge \overline{I}$$

(3)⇒(1)　$R \wedge \overline{S} \leqq R \wedge \overline{I}$から$R \wedge \overline{S} \leqq R \wedge \overline{I} \leqq \overline{I}$となるので$R \wedge \overline{S} \wedge I = O$となり，$R \wedge I \leqq S$となる。

(2)⇒(4)　$R \wedge I \leqq S'$から$\overline{S'} \leqq \overline{R} \vee \overline{I}$となるので

$$R \wedge \overline{S'} \leqq R \wedge (\overline{R} \vee \overline{I}) = R \wedge \overline{I}$$

(4)⇒(2)　$R \wedge \overline{S'} \leqq R \wedge \overline{I}$から$R \wedge \overline{S'} \leqq R \wedge \overline{I} \leqq \overline{I}$であるから$R \wedge \overline{S'} \wedge I = O$となり，$R \wedge I \leqq S'$となる。　(証明終)

なお，$R \wedge I \leqq S$と同値な条件としては，この性質11の条件以外にもいくつかのほとんど自明な条件が知られている [15]。

[性質12]　$R \times S \leqq R \wedge T \wedge \overline{I} \Leftrightarrow R \times S \leqq R \wedge \overline{S'} \wedge T \wedge \overline{I}$

(証明)　(1)　$R \times S \leqq R \wedge T \wedge \overline{I}$のとき

$r_{ik} = s_{kj} = 1$とおく。このとき$r_{ij} = t_{ij} = 1$，$i \neq j$となる。もし$s_{ji} = 1$ならば，$r_{ij} \wedge s_{ji} = 1$であるから$R \wedge T \wedge \overline{I}$の (i, i) 要素が1となり矛盾する。したがって$s_{ji} = 0$となり，$r_{ij} \wedge \overline{s_{ji}} \wedge t_{ij} \wedge \overline{\delta_{ij}} = 1$となる。

(2)　$R \times S \leqq R \wedge \overline{S'} \wedge T \wedge \overline{I}$のとき

$$R \times S \leqq R \wedge \overline{S'} \wedge T \wedge \overline{I} \leqq R \wedge T \wedge \overline{I}$$　(証明終)

[性質13]　$S \times R \leqq R \wedge T \wedge \overline{I} \Leftrightarrow S \times R \leqq R \wedge \overline{S'} \wedge T \wedge \overline{I}$

(証明)　(1)　$S \times R \leqq R \wedge T \wedge \overline{I}$のとき

$s_{ik} = r_{kj} = 1$とおく。このとき$r_{ij} = t_{ij} = 1$，$i \neq j$となる。もし$s_{ji} = 1$ならば，$s_{ji} \wedge r_{ij} = 1$であるから$R \wedge T \wedge \overline{I}$の (j, j) 要素が1となり矛盾する。したがって$s_{ji} = 0$となり，$r_{ij} \wedge \overline{s_{ji}} \wedge t_{ij} \wedge \overline{\delta_{ij}} = 1$となる。

(2)　$S \times R \leqq R \wedge \overline{S'} \wedge T \wedge \overline{I}$のとき

$$S \times R \leqq R \wedge \overline{S'} \wedge T \wedge \overline{I} \leqq R \wedge T \wedge \overline{I}$$　(証明終)

[性質14]　$R \times S \leqq R \wedge \overline{I} \Leftrightarrow R \times S \leqq R \wedge \overline{S'} \wedge \overline{I}$

(証明)　性質12において$T=E$とおけばよい。　(証明終)

[性質15]　$S\times R\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow S\times R\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$

(証明)　性質13において$T=E$とおけばよい。　(証明終)

いま性質14または性質15において$S=R$とおけば

$$R^2\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow R^2\leqq R\wedge\overline{R'}\wedge\bar{I}$$

となる。ところで$\Delta R=R\wedge\overline{R'}$であり，また$(\Delta R)\wedge I=O$であって$\Delta R\leqq\bar{I}$となる。したがって$R\wedge\overline{R'}\wedge\bar{I}=(\Delta R)\wedge\bar{I}=\Delta R$となり，

$$R^2\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow R^2\leqq\Delta R$$

が得られるが，これは性質９の一部となっている。

[性質16]　$(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge T\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge T\wedge\bar{I}$

(証明)　性質12においてRを$R\wedge\bar{I}$とおけばよい。　(証明終)

[性質17]　$S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge T\wedge\bar{I}\Leftrightarrow S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge T\wedge\bar{I}$

(証明)　性質13においてRを$R\wedge\bar{I}$とおけばよい。　(証明終)

[性質18]　$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge T\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge T\wedge\bar{I}$

(証明)　性質16においてSを$S\wedge\bar{I}$とおけば

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge T\wedge\bar{I}$$
$$\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{(S\wedge\bar{I})'}\wedge T\wedge\bar{I}$$

となる。ところで

$$R\wedge\overline{(S\wedge\bar{I})'}\wedge T\wedge\bar{I}$$
$$=R\wedge(\overline{S'}\vee I)\wedge T\wedge\bar{I}$$
$$=R\wedge\overline{S'}\wedge T\wedge\bar{I}$$

であるから，

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge T\wedge\bar{I}$$
$$\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge T\wedge\bar{I}$$

が得られる。　(証明終)

[性質19]　$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge T\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge T\wedge\bar{I}$

(証明)　性質17においてSを$S\wedge\bar{I}$とおけば

$$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge T\wedge\bar{I}$$

$\Leftrightarrow (S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{(S\wedge\bar{I})'}\wedge T\wedge\bar{I}$

となる。ところで

$R\wedge\overline{(S\wedge\bar{I})'}\wedge T\wedge\bar{I}$

$=R\wedge(\overline{S'}\vee I)\wedge T\wedge\bar{I}$

$=R\wedge\overline{S'}\wedge T\wedge\bar{I}$

であるから，

$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge T\wedge\bar{I}$

$\Leftrightarrow (S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge T\wedge\bar{I}$

が得られる。　(証明終)

［性質20］　次の条件は同値である。

(1)　$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(2)　$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$

(3)　$(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\bar{I}$

(4)　$(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$

(証明)　(1)⇔(2)　性質18において$T=E$とおけばよい。

(1)⇔(3)　性質７でSを$R\wedge\bar{I}$，RをSとおけばよい。

(2)⇒(4)　$r_{ik}\wedge\overline{\delta_{ik}}\wedge s_{kj}=1$とおく。

(a)　$k\neq j$のとき

$r_{ik}\wedge\overline{\delta_{ik}}\wedge s_{kj}\wedge\overline{\delta_{kj}}=1$となり，$r_{ij}\wedge\overline{s_{ji}}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となる。

(b)　$k=j$のとき

$r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}\wedge s_{jj}=1$となる。もし$s_{ji}=1$ならば，$r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}\wedge s_{ji}\wedge\overline{\delta_{ji}}=1$となって$R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$の(i，i)要素が１となるが，これは矛盾する。したがって$s_{ji}=0$となり，$r_{ij}\wedge\overline{s_{ji}}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となる。

(4)⇒(2)　$(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$によって

$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$　(証明終)

［性質21］　次の条件は同値である。

(1)　$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(2)　$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$

(3)　$S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(4)　$S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$

（証明）　(1)⇔(2)　性質19において$T=E$とおけばよい。

(1)⇔(3)　性質6でRをS，Sを$R\wedge\bar{I}$とおけばよい。

(2)⇒(4)　$s_{ik}\wedge r_{kj}\wedge\overline{\delta_{kj}}=1$とおく。

(a)　$i\neq k$のとき

$s_{ik}\wedge\overline{\delta_{ik}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{\delta_{kj}}=1$となり，$r_{ij}\wedge\overline{s_{ji}}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となる。

(b)　$i=k$のとき

$s_{ii}\wedge r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となる。もし$s_{ji}=1$ならば，$s_{ji}\wedge\overline{\delta_{ji}}\wedge r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となって$R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$の(j，j)要素が1となるが，これは矛盾する。したがって$s_{ji}=0$となり，$r_{ij}\wedge\overline{s_{ji}}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となる。

(4)⇒(2)　$S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$によって

$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$　（証明終）

［性質22］　$R\wedge I\leqq S$のとき次の条件は同値である。

(1)　$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(2)　$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$

(3)　$(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}$

（証明）　(1)⇔(2)　性質20(1)(2)によって

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$$

となる。ところで，性質11(1)(4)によって

$$R\wedge I\leqq S\Leftrightarrow R\wedge\overline{S'}\leqq R\wedge\bar{I}$$

であるから

$$R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}=(R\wedge\overline{S'})\wedge(R\wedge\bar{I})=R\wedge\overline{S'}$$

となる。したがって

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$$

が得られる。

(2)⇔(3)　性質20(2)(4)によって

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$$

となる。ところで，性質11(1)(4)によって

$$R\wedge I\leqq S \Leftrightarrow R\wedge\overline{S'}\leqq R\wedge\bar{I}$$

であるから

$$R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}=(R\wedge\overline{S'})\wedge(R\wedge\bar{I})=R\wedge\overline{S'}$$

となる。したがって

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}$$

が得られる。　(証明終)

上の性質22の条件(1)は性質20の同値な条件で置き換えることができる。

なお，この性質22の(1)(3)に関しては，性質20(1)(4)によって

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$$

であるから，一般に

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow(R\wedge\bar{I})\times S\leqq R\wedge\overline{S'}$$

となる。また，$S\wedge\bar{I}\leqq S$だから，性質22(1)(2)に関しても，一般に

$$(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$$

が成立する。

［性質23］　$S\wedge\bar{I}\leqq R\wedge\bar{I}$のとき

$$R\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times(S\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$$

(証明)　性質４においてSを$S\wedge\bar{I}$，Tを$R\wedge\bar{I}$と置けばよい。　(証明終)

［性質24］　$R\wedge I\leqq S$のとき次の条件は同値である。

(1)　$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(2)　$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$

(3)　$S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$

(証明)　(1)⇔(2)　性質21(1)(2)によって

$$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$$

となる。ところで，性質11(1)(4)によって

$$R\wedge I\leqq S\Leftrightarrow R\wedge\overline{S'}\leqq R\wedge\bar{I}$$

であるから，

$$R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}=(R\wedge\overline{S'})\wedge(R\wedge\bar{I})=R\wedge\overline{S'}$$

となる。したがって

$$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$$

が得られる。

(2)⇔(3)　性質21(2)(4)によって

$$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}\Leftrightarrow S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$$

となる。ところで，性質11(1)(4)によって

$$R\wedge I\leqq S\Leftrightarrow R\wedge\overline{S'}\leqq R\wedge\bar{I}$$

であるから

$$R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}=(R\wedge\overline{S'})\wedge(R\wedge\bar{I})=R\wedge\overline{S'}$$

となる。したがって

$$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\Leftrightarrow S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$$

が得られる。　(証明終)

上の性質24の条件(1)は性質21の同値な条件で置き換えることができる。

なお，性質22の場合と同様，この性質24の(1)(3)に関しては，性質21(1)(4)によって

$$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}\wedge\bar{I}$$

であるから，一般に

$$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow S\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$$

となる。また，$S\wedge\bar{I}\leqq S$だから，性質24(1)(2)に関しても，一般に

$$(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\overline{S'}$$

が成立する。

[性質25]　$S\wedge\bar{I}\leqq R\wedge\bar{I}$のとき

$$(S\wedge\bar{I})\times R\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(S\wedge\bar{I})\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$$

(証明)　性質5においてSを$S\wedge\bar{I}$，Tを$R\wedge\bar{I}$とおけばよい。　(証明終)

[性質26] [16, 17]　次の条件は同値である。

(1)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$

(2)　$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(3)　$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq R\wedge\bar{I}$

(4)　$(R\wedge\bar{I})^2 \leqq \Delta R$

(5)　$R\times(R\wedge\bar{I}) \leqq \Delta R$

(6)　$(R\wedge\bar{I})\times R \leqq \Delta R$

(証明)　(1)⇔(2)　性質6において$S=R\wedge\bar{I}$とおけばよい。

(1)⇔(3)　性質7において$S=R\wedge\bar{I}$とおけばよい。

(1)⇔(4)　性質22(1)(2)または性質24(1)(2)において$S=R$とおけばよい。

(4)⇔(5)　性質24(2)(3)において$S=R$とおけばよい。

(4)⇔(6)　性質22(2)(3)において$S=R$とおけばよい。　(証明終)

なお，すでに知られているように［16］，上の性質26の各条件は

$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I$

と同値であり，したがってRは反対称的推移関係を表現する行列となる。

［性質27］　$S \leqq \overline{R'}$のとき

$R\times S \leqq T \Leftrightarrow R\times S \leqq T\wedge\bar{I}$

(証明)　(1)　$R\times S \leqq T$のとき

$r_{ik}=1$，$s_{kj}=1$とおく。このとき$t_{ij}=1$となる。いま$i=j$とすれば，$r_{ik}=1$，$s_{ki}=1$となり，$s_{ki}=1$と$S \leqq \overline{R'}$によって$r_{ik}=0$となる。しかし，これは矛盾する。したがって$i\neq j$となり，$t_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となる。

(2)　$R\times S \leqq T\wedge\bar{I}$のとき

$R\times S \leqq T\wedge\bar{I} \leqq T$　(証明終)

［性質28］　$S \leqq \overline{R'}$のとき

$S\times R \leqq T \Leftrightarrow S\times R \leqq T\wedge\bar{I}$

(証明)　(1)　$S\times R \leqq T$のとき

$s_{ik}=1$，$r_{kj}=1$とおく。このとき$t_{ij}=1$となる。いま$i=j$とすれば，$s_{ik}=1$，$r_{ki}=1$となり，$s_{ik}=1$と$S \leqq \overline{R'}$によって$r_{ki}=0$となる。しかし，これは矛盾する。したがって$i\neq j$となり，$t_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となる。

(2)　$S\times R \leqq T\wedge\bar{I}$のとき

$S\times R \leqq T\wedge\bar{I} \leqq T$　(証明終)

［性質29］　次の条件は同値である。

(1)　$R\times\Delta R\leqq R$

(2)　$R\times\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}$

(3)　$(R\wedge\bar{I})\times\Delta R\leqq R$

(4)　$(R\wedge\bar{I})\times\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}$

(証明)　(1)⇔(2)　$\Delta R=R\wedge\overline{R'}\leqq\overline{R'}$であるから性質27において$S=\Delta R$, $T=R$とおけばよい。

(1)⇔(3)　$\Delta R=R\wedge\overline{R'}\leqq R$であるから性質4において$S=\Delta R$, $T=R$とおけばよい。

(2)⇔(4)　$\Delta R=R\wedge\overline{R'}\leqq R\wedge\bar{I}$であるから性質4において$S=\Delta R$, $T=R\wedge\bar{I}$とおけばよい。　(証明終)

[性質30]　$R\times\Delta R\leqq\Delta R\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})\times\Delta R\leqq\Delta R$

(証明)　性質6において$S=\Delta R$とおけばよい。　(証明終)

[注意2]　一般には,

$$(\Delta R)^2\leqq\Delta R\Rightarrow R\times\Delta R\leqq\Delta R$$

とはならない。

いま,

$$R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

とおけば

$$\Delta R=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$(\Delta R)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\leqq\Delta R$$

となるが,

$$R\times\Delta R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

であって，$R\times\Delta R\leqq\Delta R$とはならない。

［性質31］　次の条件は同値である。

(1)　$\Delta R\times R\leqq R$

(2)　$\Delta R\times R\leqq R\wedge\bar{I}$

(3)　$\Delta R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R$

(4)　$\Delta R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(証明)　(1)⇔(2)　$\Delta R=R\wedge\overline{R'}\leqq\overline{R'}$であるから，性質28において$S=\Delta R$, $T=R$とおけばよい。

(1)⇔(3)　$\Delta R=R\wedge\overline{R'}\leqq R$であるから，性質５において$S=\Delta R$, $T=R$とおけばよい。

(2)⇔(4)　$\Delta R=R\wedge\overline{R'}\leqq R\wedge\bar{I}$であるから，性質５において$S=\Delta R$，$T=R\wedge\bar{I}$とおけばよい。　(証明終)

［注意３］　一般には，

$$R\times\Delta R\leqq R\Rightarrow\Delta R\times R\leqq R$$

とはならない。

いま，

$$R=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

とおけば

$$\Delta R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R\times\Delta R=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\leqq R$$

となるが,

$$\Delta R\times R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

であって，$\Delta R\times R\leqq R$とはならない。

［性質32］　$\Delta R\times R\leqq\Delta R\Leftrightarrow\Delta R\times(R\wedge\bar{I})\leqq\Delta R$

（証明）　性質７において$S=\Delta R$とおけばよい。　（証明終）

［注意４］　一般には,

$$R\times\Delta R\leqq\Delta R\Rightarrow\Delta R\times R\leqq\Delta R$$

とはならない。

いま,

$$R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

とおけば

$$\Delta R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R\times\Delta R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\leqq\Delta R$$

となるが,

$$\Delta R\times R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

であって，$\Delta R \times R \leqq \Delta R$とはならない。

［性質33］　$S \wedge S' = O$のとき

$$S^2 \leqq T \Leftrightarrow S^2 \leqq T \wedge \bar{I}$$

（証明）　$S \wedge S' = O \Leftrightarrow S \leqq \overline{S'}$

であるから性質28において$R = S$とおけばよい。（証明終）

［性質34］　$(\Delta R)^2 \leqq R \Leftrightarrow (\Delta R)^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

（証明）　$(\Delta R) \wedge (\Delta R)' = R \wedge \overline{R'} \wedge R' \wedge \bar{R} = O$

であるから性質33において$S = \Delta R$，$T = R$とおけばよい。（証明終）

［性質35］　次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$

(2)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$，$\nabla R = O$

(3)　$R \times \Delta R \leqq R$，$\nabla R = O$

(4)　$\Delta R \times R \leqq R$，$\nabla R = O$

(5)　$(\Delta R)^2 \leqq R$，$\nabla R = O$

(6)　$R \times \Delta R \leqq \Delta R$，$\nabla R = O$

(7)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$，$\nabla R = O$

(8)　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$，$\nabla R = O$

（証明）　性質１によって

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Leftrightarrow R^2 \leqq R,\ \nabla R = O$$

であるから，性質３による。（証明終）

［注意５］　一般には，

$$(\Delta R)^2 \leqq R \Rightarrow \Delta R \times R \leqq R$$

とはならない。

いま，

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\Delta R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(\Delta R)^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\leqq R$$

となるが,

$$\Delta R\times R=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

であって，$\Delta R\times R\leqq R$とはならない。

［性質36］［16］　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R=O$

(2)　$R\wedge I=O$

(3)　すべてのl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(4)　$R^2\leqq\overline{R'}$

(5)　あるl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(6)　$R^n=O$

なお，上の性質36の条件(3)と(6)は一般に同値である。すなわち，

すべてのl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^l\leqq\overline{R'}\Leftrightarrow R^n=O$

となる。これは次のようにしてわかる。すでに，

$$R^n=O\Leftrightarrow I\vee R\vee\cdots\vee R^{n-1}\leqq\overline{R'}$$

となることが知られている［16］。したがって，すべてのl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^l\leqq\overline{R'}$であれば，$I\vee R\vee\cdots\vee R^{n-1}\leqq\overline{R'}$となり，$R^n=O$となる。また，逆に$R^n=O$であれば，$I\vee R\vee\cdots\vee R^{n-1}\leqq\overline{R'}$となり，かつ$R^n=R^{n+1}=\cdots=O$であるから，$I\vee R\vee R^2\vee\cdots\leqq\overline{R'}$となり，すべての$l$（$l=0$，1，2…）に対して$R^l\leqq\overline{R'}$となる。

［性質37］　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$のとき，すべての$l$（$l=0$，1，2，…）に対して，

$$\nabla R=O\Leftrightarrow R^l\leqq\overline{R'}$$

（証明）　(1)　$\nabla R=O$のとき

性質36(1)(3)によって$R^l\leqq\overline{R'}$となる。

(2)　$R^l\leqq\overline{R'}$のとき

性質36(5)(1)によって$\nabla R=O$となる。　（証明終）

［性質38］　$(\Delta R)^2\leqq R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R=O$

(2)　すべてのl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(3)　$R^3\leqq\overline{R'}$

(4)　あるl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^{2l+1}\leqq\overline{R'}$

(5)　$R^n=O$

（証明）　(1)⇒(2)　$\nabla R=O$のとき性質2によって$\Delta R=R$となるので$(\Delta R)^2\leqq R$から$R^2\leqq R$となる。また$\nabla R=O$から$R\wedge R'=O$となり，したがって$R\leqq\overline{R'}$となる。$R\leqq\overline{R'}$および$R^2\leqq R$によって，$l\geqq 1$のとき$R^l\leqq\cdots\leqq R\leqq\overline{R'}$となる。また$\nabla R=O$から$R\wedge I=O$となり，$I\leqq\bar{R}$となる。したがって$I\leqq\overline{R'}$であるから$R^0=I\leqq\overline{R'}$となる。

(2)⇒(3)　明らかである。

(3)⇒(4)　明らかである。

(4)⇒(1)　もし$r_{ij}\wedge r_{ji}=1$とすれば，$r_{ii}^{(2)}=1$となり，$r_{ii}^{(2l)}=1$となる。したがって$r_{ij}^{(2l+1)}\geqq r_{ii}^{(2l)}\wedge r_{ij}=1$となり，$r_{ij}^{(2l+1)}=1$となる。一方，このとき$R^{2l+1}\leqq\overline{R'}$から$r_{ji}=0$となり，これは矛盾する。よって$R\wedge R'=O$となる。

(1)⇒(5)　$\nabla R=O$のとき$\Delta R=R$であるから$(\Delta R)^2\leqq R$より$R^2\leqq R$となる。したがって性質1から$R^n=O$となる。

(5)⇒(1)　$R^n=O$のとき$R^{2n}=O$となる。もし$r_{ij}\wedge r_{ji}=1$とおけば$r_{ii}^{(2)}=1$となり，$r_{ii}^{(2n)}=1$となる。これは矛盾する。したがって$R\wedge R'=O$となる。

（証明終）

上記の(4)⇒(1)の証明から明らかなように，一般に

あるl（$l=0, 1, 2, \cdots$）に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \Rightarrow \nabla R = O$

となる[14]。したがって，言い換えれば，すべてのl（$l=0, 1, 2, \cdots$）に対して，

$$R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \Rightarrow \nabla R = O$$

となる。

[性質39]　$(\Delta R)^2 \leqq R$のとき，すべてのl（$l=0, 1, 2, \cdots$）に対して，

$$\nabla R = O \Leftrightarrow R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$$

(証明)　(1)　$\nabla R = O$のとき

性質38(1)(2)によって$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$となる。

(2)　$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$のとき

性質38(4)(1)によって$\nabla R = O$となる。　(証明終)

[注意6]　一般には，

$$(\Delta R)^2 \leqq R,\ R^2 \leqq \overline{R'} \Rightarrow \nabla R = O$$

とはならない。

いま，

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\Delta R = O$$

$$(\Delta R)^2 = O \leqq R$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{R'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla R = R$$

となり，$(\Delta R)^2 \leqq R$，$R^2 \leqq \overline{R'}$であるが，$\nabla R = O$とはならない。

[性質40]　次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$

(2)　$(\Delta R)^2 \leqq R$，すべてのl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(3)　$(\Delta R)^2 \leqq R$，$R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　$(\Delta R)^2 \leqq R$，あるl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$(\Delta R)^2 \leqq R$，$R^n = O$

(証明)　性質35によって

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Leftrightarrow (\Delta R)^2 \leqq R,\ \nabla R = O$$

であるから性質38による。　(証明終)

[性質41]　$R \times \Delta R \leqq R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R = O$

(2)　すべてのl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(3)　$R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　あるl（$l=0$，1，2，…）に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$R^n = O$

(証明)　$(\Delta R)^2 = \Delta R \times \Delta R \leqq R \times \Delta R \leqq R$

であるから性質38による。　(証明終)

[性質42]　$R \times \Delta R \leqq R$のとき，すべての$l$（$l=0$，1，2，…）に対して，

$$\nabla R = O \Leftrightarrow R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$$

(証明)　$(\Delta R)^2 = \Delta R \times \Delta R \leqq R \times \Delta R \leqq R$

であるから性質39による。　(証明終)

[注意7]　一般には

$$R \times \Delta R \leqq R,\ R \wedge I = O \Rightarrow \nabla R = O$$

とはならない。

いま，

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\Delta R = O$$

$$R \times \Delta R = O \leqq R$$

$$R \wedge I = O$$

となるが，しかし$\nabla R = R \neq O$である。

［注意8］　一般には，

$$R \times \Delta R \leqq R,\ R^2 \leqq \overline{R'} \Rightarrow \nabla R = O$$

とはならない。

いま，

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\Delta R = O$$

$$R \times \Delta R = O \leqq R$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{R'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^2 \leqq \overline{R'}$$

となるが，$\nabla R = R \neq O$である。

［性質43］　次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$

(2)　$R \times \Delta R \leqq R$，すべての$l$（$l = 0, 1, 2, \cdots$）に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(3)　$R \times \Delta R \leqq R,\ R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　$R \times \Delta R \leqq R$，すべての$l$（$l = 0, 1, 2, \cdots$）に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$R \times \Delta R \leqq R,\ R^n = O$

（証明）　性質35によって

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Leftrightarrow R \times \Delta R \leqq R,\ \nabla R = O$$

であるから性質41による。　　（証明終）

［性質44］　$\Delta R \times R \leqq R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R = O$

(2)　すべてのl ($l = 0, 1, 2, \cdots$) に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(3)　$R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　あるl ($l = 0, 1, 2, \cdots$) に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$R^n = O$

(証明)　$(\Delta R)^2 = \Delta R \times \Delta R \leqq \Delta R \times R \leqq R$

であるから性質38による。(証明終)

[性質45]　$\Delta R \times R \leqq R$のとき，すべての$l$ ($l = 0, 1, 2, \cdots$) に対して，

$$\nabla R = O \Leftrightarrow R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$$

(証明)　$(\Delta R)^2 = \Delta R \times \Delta R \leqq \Delta R \times R \leqq R$

であるから性質39による。(証明終)

[性質46]　次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$

(2)　$\Delta R \times R \leqq R$, すべての$l$ ($l = 0, 1, 2, \cdots$) に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(3)　$\Delta R \times R \leqq R$, $R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　$\Delta R \times R \leqq R$, ある$l$ ($l = 0, 1, 2, \cdots$) に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$\Delta R \times R \leqq R$, $R^n = O$

(証明)　性質35によって

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Leftrightarrow \Delta R \times R \leqq R,\ \nabla R = O$$

であるから性質44による。(証明終)

[性質47]　$R \times \Delta R \leqq \Delta R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R = O$

(2)　すべてのl ($l = 0, 1, 2, \cdots$) に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(3)　$R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　あるl ($l = 0, 1, 2, \cdots$) に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$R^n = O$

(証明)　$(\Delta R)^2 = \Delta R \times \Delta R \leqq R \times \Delta R \leqq \Delta R \leqq R$

であるから性質38による。(証明終)

［性質48］　$R\times\Delta R\leqq\Delta R$のとき，すべての$l$ ($l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) に対して，

$$\nabla R=O\Leftrightarrow R^{2l+1}\leqq\overline{R'}$$

(証明)　$(\Delta R)^2=\Delta R\times\Delta R\leqq R\times\Delta R\leqq\Delta R\leqq R$

であるから性質39による。　(証明終)

［性質49］　次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$, $R\wedge I=O$

(2)　$R\times\Delta R\leqq\Delta R$, すべての$l$ ($l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(3)　$R\times\Delta R\leqq\Delta R$, $R^3\leqq\overline{R'}$

(4)　$R\times\Delta R\leqq\Delta R$, ある$l$ ($l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) に対して$R^{2l+1}\leqq\overline{R'}$

(5)　$R\times\Delta R\leqq\Delta R$, $R^n=O$

(証明)　性質35によって

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O\Leftrightarrow R\times\Delta R\leqq\Delta R,\ \nabla R=O$$

であるから性質47による。　(証明終)

［性質50］　$\Delta R\times R\leqq\Delta R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R=O$

(2)　すべてのl ($l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(3)　$R^3\leqq\overline{R'}$

(4)　あるl ($l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) に対して$R^{2l+1}\leqq\overline{R'}$

(5)　$R^n=O$

(証明)　$(\Delta R)^2=\Delta R\times\Delta R\leqq\Delta R\times R\leqq\Delta R\leqq R$

であるから性質38による。　(証明終)

［性質51］　$\Delta R\times R\leqq\Delta R$のとき，すべての$l$ ($l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) に対して，

$$\nabla R=O\Leftrightarrow R^{2l+1}\leqq\overline{R'}$$

(証明)　$(\Delta R)^2=\Delta R\times\Delta R\leqq\Delta R\times R\leqq\Delta R\leqq R$

であるから性質39による。　(証明終)

［性質52］　次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$, $R\wedge I=O$

(2)　$\Delta R\times R\leqq\Delta R$, すべての$l$ ($l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(3)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$, $R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$, ある$l$ ($l=0$, 1, 2, …) に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$, $R^n = O$

(証明)　性質35によって

$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O \Leftrightarrow \Delta R \times R \leqq \Delta R$, $\nabla R = O$

であるから性質50による。　(証明終)

[性質53]　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R = O$

(2)　すべてのl ($l=0$, 1, 2, …) に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(3)　$R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　あるl ($l=0$, 1, 2, …) に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$R^n = O$

(証明)　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \leqq R$

であるから性質38による。　(証明終)

なお, $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$なるRで表現される関係はquasi-transitiveであるといわれる [5, 21, 22]。

[性質54]　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$のとき, すべての$l$ ($l=0$, 1, 2, …) に対して,

$$\nabla R = O \Leftrightarrow R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$$

(証明)　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \leqq R$

であるから性質39による。　(証明終)

[性質55]　次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$

(2)　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$, すべての$l$ ($l=0$, 1, 2, …) に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(3)　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$, $R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$, ある$l$ ($l=0$, 1, 2, …) に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(5)　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$, $R^n = O$

(証明)　性質35によって

$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O \Leftrightarrow (\Delta R)^2 \leqq \Delta R$, $\nabla R = O$

であるから性質53による。　(証明終)

これまで考察した同値条件に含まれている関係行列の不等式の中には推移性のもとで成立するものがある。これらに関するいくつかの性質を以下に示す。

[性質56]［1，4，12］ $R^2 \leqq R$のとき

(1)　$R \times \Delta R \leqq \Delta R$

(2)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$

(証明)　(1)　$r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$とおく。このとき$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$から$r_{ij} = 1$となる。また$r_{ik} = 1$および$r_{jk} = 0$によって$r_{ji} = 0$となる。したがって$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$となる。

(2)　$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$とおく。このとき$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$から$r_{ij} = 1$となる。また$r_{kj} = 1$および$r_{ki} = 0$によって$r_{ji} = 0$となる。したがって$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$となる。

(証明終)

[性質57]　$R^2 \leqq R$のとき

(1)　$(R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R$

(2)　$\Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R$

(証明)　(1)　性質56(1)によって

$$(R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq R \times \Delta R \leqq \Delta R$$

(2)　性質56(2)によって

$$\Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R \times R \leqq \Delta R$$

(証明終)

すでに性質30で示しているように，一般に

$$R \times \Delta R \leqq \Delta R \Leftrightarrow (R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R$$

となる。また同様に性質32で示しているように，一般に

$$\Delta R \times R \leqq \Delta R \Leftrightarrow \Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R$$

となる。したがって，これらのことと性質56によって上の性質57を示すこともできる。

[性質58]［1，4，21］ $R^2 \leqq R \Rightarrow (\Delta R)^2 \leqq \Delta R$

(証明)　性質56(1)によって

$(\Delta R)^2=\Delta R\times\Delta R\leqq R\times\Delta R\leqq\Delta R$ (証明終)

なお，$R^2\leqq R$のとき$(\nabla R)^2=\nabla R$となることも知られている［1，4，12，21，22］。$R^2\leqq R$のとき$(\nabla R)^2\leqq\nabla R$となることはよく知られているが，$\nabla R$は対称なので$(\nabla R)^2=\nabla R$となる。また，演算$\Delta$および$\nabla$の逐次的適用などに関する性質についてはFishburn［10］によって調べられている。

［性質59］ $(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

（証明） 性質26(1)(4)によって

$$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}\Leftrightarrow(R\wedge\bar{I})^2\leqq\Delta R$$

であり，また$\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}$であるから，$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$のとき

$$(\Delta R)^2\leqq(R\wedge\bar{I})^2\leqq\Delta R$$

となる。 (証明終)

［性質60］ $R\times\Delta R\leqq R\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

（証明） $r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}=1$とおく。このとき$r_{ik}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}=1$であるから$r_{ij}=1$となる。もし$r_{ji}=1$ならば，$r_{ji}\wedge r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}=1$となり，$r_{jk}=1$となるが，これは矛盾する。したがって$r_{ji}=0$となり，$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$となる。

(証明終)

［性質61］ $\Delta R\times R\leqq R\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

（証明） $r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}=1$とおく。このとき$r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}=1$であるから$r_{ij}=1$となる。もし$r_{ji}=1$ならば，$r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}\wedge r_{ji}=1$となり，$r_{ki}=1$となるが，これは矛盾する。したがって$r_{ji}=0$となり，$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$となる。

(証明終)

［性質62］ (1) $R\times\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

(2) $(R\wedge\bar{I})\times\Delta R\leqq R\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

(3) $(R\wedge\bar{I})\times\Delta R\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

（証明） 性質29および性質60による。 (証明終)

［性質63］ (1) $\Delta R\times R\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

(2) $\Delta R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

(3) $\Delta R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow(\Delta R)^2\leqq\Delta R$

（証明）　性質31および性質61による。　（証明終）

［注意９］　一般には，

$$(\Delta R)^2 \leqq R \Rightarrow (\Delta R)^2 \leqq \Delta R$$

とはならない。

いま，

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\Delta R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Delta R)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leqq R$$

であるが，$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$とはならない。

［性質64］［４，６，21］　$R^2 \leqq R$のとき

(1)　$\nabla R \times \Delta R \leqq \Delta R$

(2)　$\Delta R \times \nabla R \leqq \Delta R$

（証明）　(1)　性質56(1)によって

$$\nabla R \times \Delta R \leqq R \times \Delta R \leqq \Delta R$$

(2)　性質56(2)によって

$$\Delta R \times \nabla R \leqq \Delta R \times R \leqq \Delta R$$

（証明終）

４．まとめ

非反射的推移関係の同値条件として，非対称性を含む多数の同値条件を明らかにするとともに，ほとんど自明であるが，関係の非対称部分に関して，

一般に成立するいくつかの同値条件も示している。これらの条件を組み合わせることにより，非反射的推移性が様々な形の同値条件として表現できることがわかる。また，ブール行列に関して一般に成立するいくつかの基本的な同値条件も示している。これらの同値条件はほとんど明らかであるが，これらの特別な場合として若干の興味深い性質が導かれる。

なお，非反射的推移関係に関しては，さらにべき零性のもとでの同値条件や一般化された推移性のもとでの同値条件など，まだ多数の同値条件が存在すると考えられる。また，非反射的推移関係と同様の考察を，反射的推移関係についておこなえば，反射的推移関係に関しても類似の同値条件が得られるものと考えられる。これらの非反射的推移性および反射的推移性に関する同値条件については次の機会に報告したい。

文　献

[1] Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

[2] Carnap, R.: "Introduction to Symbolic Logic and its Applications," Dover Publications, New York (1958).

[3] Chankong, V. and Haimes, Y. Y.: "Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology," North-Holland, New York (1983).

[4] Chipman, J. S.: "The foundations of utility," Econometrica, Vol. 28, 2, pp. 193-224 (1960).

[5] Diaye, M.-A.: "Variable intervals model," Mathematical Social Sciences, 38, pp. 21-33 (1999).

[6] Fararo, T. J.: "Mathematical Sociology," Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).

[7] Fishburn, P. C.: "Intransitive indifference with unequal indifference intervals," Journal of Mathematical Psychology, 7, pp. 144-149 (1970).

[8] Fishburn, P. C.: "Intransitive indifference in preference theory: A survey," Operations Research, 18, pp.207-228 (1970).

[9] Fishburn, P. C.: "The Theory of Social Choice," Princeton University Press, New Jersey (1973).

[10] Fishburn, P. C.: "Operations on binary relations," Discrete Mathematics, 21, pp. 7-22 (1978).

[11] Fodor, J. and Roubens, M.: "Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support," Kluwer Academic Pub., Dordrecht (1994).

[12] 橋本　寛："推移関係を表わすブール行列の対称核とべき零部分", 電子通信学会研究会資料AL80-24 (1980年9月).

[13] 橋本　寛："連結的推移関係の性質", 山口経済学雑誌, 第34巻第3・4号, pp.387-405 (昭和60年6月).

[14] 橋本　寛："非反射的推移関係", 山口経済学雑誌, 第46巻第4号, pp. 479-498 (平成10年7月).

[15] 橋本　寛："関係行列の初歩的な同値条件と非反射的推移性", 山口経済学雑誌, 第47巻第1号, pp.29-47 (平成11年3月).

[16] 橋本　寛："非反射的推移関係に関する同値条件", 山口経済学雑誌, 第48巻第2号, pp.257-285 (平成12年3月).

[17] 柏木芳美："関係代数的証明", 山口経済学雑誌, 第46巻第3号, pp. 259-269 (平成10年5月).

[18] 小野寛晰："情報代数", 共立出版 (1994年2月).

[19] 尾崎, 白川："グラフとネットワークの理論", コロナ社 (1973年12月).

[20] Scott, D. and Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement," The Journal of Symbolic Logic, 23, pp. 113-128 (1958).

[21] Sen, A. K.: "Collective Choice and Social Welfare," Holden-Day, San Francisco (1970).

[22] Suzumura, K.: "Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare," Cambridge University Press, Cambridge (1983).