非反射的推移関係

橋 本 寛

1．はじめに

非反射的な推移関係のもついくつかの初等的な性質について考察をおこなう。非反射的推移関係は「より大きい」，「より小さい」など具体例も多く，応用上重要な二項関係の一つである[16]。非反射的推移関係は，狭義の半順序，強い準順序，strict partial order，irreflexive orderingなどと呼ばれ，順序に関する議論においてしばしば出現する[4][5][14][17][18][20]。また非反射的推移関係は有向グラフやそれを表現する行列の推移的簡約[1][6]においても重要な役割を演じる。この推移的簡約とも関連して非反射的推移関係の構成法，とくに与えられた推移関係から非反射的推移関係を構成することについての考察もすでにおこなわれている[7]。さらに非反射的推移関係は選好関係や社会的選択の基礎的な議論においても有用である[5][19]。非反射的推移関係が連結的であれば系列関係 (serial relation)，系列 (series)，またlinear strict-orderingなどと呼ばれる[2][3][16][20][21]。

これまでにも非反射的推移関係の基本的な性質はよく知られているが，本論文では非反射的推移関係の従来比較的注目されていない側面について考察をおこなうとともに，すでに知られている性質の多少の一般化を試みている。一般に有限集合上の二項関係は0，1の要素からなるブール行列で表現できるので，ブール行列を用いて非反射的推移関係の性質，とくに非反射的推移性と同値な条件，推移性のもとで非反射性と同値になる条件，また一般に非反射性と同値になる条件や，その他の非反射的推移関係に関連する性質について調べている。さらに関係の非対称性についても考察を

おこない，非対称的関係行列のもつ興味深い性質のいくつかを明らかにしている。一般に関係が非対称的であれば非反射的となるが，推移性のもとでは非対称性と非反射性が同値であることはよく知られている[3][5][20]。また非反射的推移性との関連において，関係行列のべき零性や，推移性の特別な場合であるべき等性についても若干の考察をおこなっている。

2．定義

二項関係を 0，1の要素からなるブール行列によって表現し，以下の議論において必要なブール行列に関する演算および記法を定義する。いまn次ブール行列$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$に対して次のように定める。

$$R\vee S=[r_{ij}\vee s_{ij}]=[\max(r_{ij},\ s_{ij})]$$

$$R\wedge S=[r_{ij}\wedge s_{ij}]=[\min(r_{ij},\ s_{ij})]$$

$$R'=[r_{ji}]\ (\text{転置})$$

$$\bar{R}=[\overline{r_{ij}}]=[1-r_{ij}]$$

$$\Delta R=R\wedge\overline{R'}$$

$$\nabla R=R\wedge R'$$

$$R\times S=[(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})]$$

$$R^0=[r_{ij}^{(0)}]=I=[\delta_{ij}]\ (\delta_{ij}\text{はクロネッカーのデルタ})$$

$$R^k=[r_{ij}^{(k)}]=R^{k-1}\times R\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$R\leqq S\Longleftrightarrow r_{ij}\leqq s_{ij}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

特殊な行列として，すべての要素が1の行列をE，零行列をOで表わすことにする。単位行列はすでに上で定義されているようにIで表わされる。$R\wedge I=O$となる関係行列Rは非反射的 (irreflexive) であるといわれ，$\nabla R\leqq I$なる行列Rは反対称的(antisymmetric)，$\nabla R=O$なるRは非対称的(asymmetric) であるといわれる。また$R\vee R'\vee I=E$なる行列Rは連結的 (connected)，$R^2\leqq R$なる行列Rは推移的 (transitive) であるといわれる。したがって非反射的な推移関係は$R\wedge I=O$かつ$R^2\leqq R$なるRとして表現される。

さらに$R^2=R$なるRはべき等(idempotent)であるといわれ，推移的な行列の特別な場合と見ることができる。$R^n=O$となる行列Rはべき零(nilpotent)であるといわれる。これらの行列は以下の議論において明らかになるように，一定の条件のもとで互いに密接な関連を有している。なお，本論文においては，特に指定しない場合の行列の次数はnとする。また，一般に行列Rの要素をr_{ij}のように表わすことにし，他の行列の場合も同様である。

3．結果

与えられた関係行列が非反射的推移関係を表現する行列となるための同値条件を中心に考察をおこなっていく。関係行列をRで表わすとき非反射的推移関係を表現する行列は，すでに述べたように$R\wedge I=O$かつ$R^2\leqq R$となる。まず以下では$R\wedge I=O$，$R^2\leqq R$と同値な条件，とくに$R^2\leqq R$のもとで$R\wedge I=O$と同値になる種々の条件について考える。また，一般に$R\wedge I=O$と同値な条件についても考察をおこなう。

〔性質1〕[8]　$R^2\leqq R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R\wedge I=O$

(2)　$\nabla R=O$

(3)　$R^n=O$

(4)　$R^2\leqq\overline{R'}$

(5)　すべてのk（k＝1，2，…）に対して$R^k\leqq\overline{R'}$

(6)　あるk（k＝1，2，…）に対して$R^k\leqq\overline{R'}$

〔性質2〕　すべてのl（l＝0，1，2，…）に対して次の条件は同値である。

(1)　$R^l\wedge R'=O$

(2)　$R^l\leqq\overline{R'}$

(3)　$R^{l+1}\wedge I=O$

(証明)　(1)$\Longleftrightarrow$(2)は明らかであるので，(2)$\Longleftrightarrow$(3)となることを示す。また$l\geqq 1$の場合に成立することは，すでに文献(9)で与えられているので，$l=0$の場合だけを示す。$R^0=I$であるから，明らかに

$$R^0\leqq\overline{R'}\Longleftrightarrow I\leqq\overline{R'}\Longleftrightarrow I\leqq\bar{R}\Longleftrightarrow R\wedge I=O\Longleftrightarrow R^{0+1}\wedge I=O$$ (証明終)

なお，一般に

$$P\times R\leqq S\Longleftrightarrow P\leqq\overline{\bar{S}\times R'}$$

となることが知られているので[15][20]，これを用いれば上の(2)$\Longleftrightarrow$(3)は次のようにして示すこともできる。いま$P=R^l$, $S=\bar{I}$とおけば，$\bar{S}=I$であるから

$$\begin{aligned}R^l\leqq\overline{R'}&\Longleftrightarrow R^l\leqq\overline{I\times R'}\\&\Longleftrightarrow R^l\times R\leqq\bar{I}\\&\Longleftrightarrow R^{l+1}\leqq\bar{I}\\&\Longleftrightarrow R^{l+1}\wedge I=O\end{aligned}$$

〔性質 3 〕　$R^2\leqq R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R\wedge I=O$

(2)　すべてのl ($l=0$, 1, 2…) に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(3)　あるl ($l=0$, 1, 2, …) に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(証明)　(1)⇒(2)　$l\geqq 1$のときは性質 1 によって$R^l\leqq\overline{R'}$となるので，$l=0$の場合，すなわち$R\wedge I=O$のとき$R^0\leqq\overline{R'}$となることを示す。$R\wedge I=O$から$I\leqq\bar{R}$となり，両辺を転置して$I\leqq\overline{R'}$が得られる。$R^0=I$であるから$R^0\leqq\overline{R'}$となる。

(2)　⇒　(3)　明らかである。

(3)　⇒　(1)　$l\geqq 1$のときは性質 1 によって$R\wedge I=O$となるから，$l=0$の場合，すなわち$R^0\leqq\overline{R'}$のとき$R\wedge I=O$となることを示す。$R^0\leqq\overline{R'}$から$I\leqq\overline{R'}$となり，両辺を転置すれば$I\leqq\bar{R}$。したがって$R\wedge I=O$となる。

(証明終)

ここで，すでに性質 1 で示した条件のいくつかが，上記の性質 3 における$R^l\leqq\overline{R'}$の特別な場合となることを示そう。まず，この$R^l\leqq\overline{R'}$については，

性質2で示したように

$$R^l \wedge R' = O \Longleftrightarrow R^l \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^{l+1} \wedge I = O$$

となる。いま$l=0$とすれば

$$R^0 \wedge R' = O \Longleftrightarrow R^0 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^1 \wedge I = O$$

となるが，$R^0=I$，$R^1=R$であるから

$$I \wedge R' = O \Longleftrightarrow I \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R \wedge I = O$$

となり，性質1の条件(1)が得られる。

また，$l=1$とすれば

$$R \wedge R' = O \Longleftrightarrow R \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^2 \wedge I = O$$

となり，$\nabla R = R \wedge R'$であるから

$$\nabla R = O \Longleftrightarrow R \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^2 \wedge I = O$$

が得られる。この$\nabla R = O$は性質1の条件(2)である。

さらに，$l=2$とすれば

$$R^2 \wedge R' = O \Longleftrightarrow R^2 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^3 \wedge I = O$$

となる。この$R^2 \leqq \overline{R'}$は性質1の条件(4)である。

なお，$R^l \leqq \overline{R'}$に関して$l=0$，1，2，…，n−1とすれば，

$$R^0 \leqq \overline{R'},\ R^1 \leqq \overline{R'},\ R^2 \leqq \overline{R'},\ \cdots,\ R^{n-1} \leqq \overline{R'}$$

$$\Longleftrightarrow R \wedge I = R^2 \wedge I = R^3 \wedge I = \cdots = R^n \wedge I = O$$

となるが，一般に

$$R^n = O \Longleftrightarrow R \wedge I = R^2 \wedge I = R^3 \wedge I = \cdots = R^n \wedge I = O$$

となることが知られているので(8)，

$$R^0 \leqq \overline{R'},\ R^1 \leqq \overline{R'},\ R^2 \leqq \overline{R'},\ \cdots,\ R^{n-1} \leqq \overline{R'}$$

$$\Longleftrightarrow R^n = O$$

となる。これは性質1の条件(3)である。

〔性質4〕 $R^2 \leqq R \wedge \bar{I} \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$

(証明)(1) $R^2 \leqq R \wedge \bar{I}$のとき

$$R^2 \leqq R \wedge \bar{I} \leqq R$$

もし$r_{ii}=1$であれば$r^{(2)}_{ii}=1$となり，$R \wedge \bar{I}$の(i，i)要素が1となって矛

盾が生じる。したがって，すべてのiに対し$r_{ii}=0$，すなわち$R \wedge I=O$となる。

（2）$R^2 \leqq R$，$R \wedge I=O$のとき

$$R=(R \wedge \bar{I}) \vee (R \wedge I)=R \wedge \bar{I}$$

したがって$R^2 \leqq R=R \wedge \bar{I}$となる。（証明終）

なお，上記の性質4の$R^2 \leqq R \wedge \bar{I}$に関しては，明らかに

$$R^2 \leqq R \wedge \bar{I} \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R^2 \leqq \bar{I}$$

となり，$R^2 \leqq \bar{I}$は$R^2 \wedge I=O$と同値である。

〔性質5〕[12]　$R^2 \leqq \Delta R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O$

この性質5の$R^2 \leqq \Delta R$に関しても，$\Delta R=R \wedge \overline{R'}$であるから，明らかに

$$R^2 \leqq \Delta R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R^2 \leqq \overline{R'}$$

が成立し，$R^2 \leqq \overline{R'}$はすでに述べたように$R^3 \wedge I=O$と同値である。

〔性質6〕　$R^2 \leqq S \leqq R,\ S \wedge I=O \Rightarrow R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O$

（証明）　明らかに$R^2 \leqq S \leqq R$から$R^2 \leqq R$となる。次に，もし$r_{ii}=1$であれば$r_{ii}^{(2)}=1$となり$s_{ii}=1$となるが，これは$S \wedge I=O$と矛盾する。したがって，すべてのiに対し$r_{ii}=0$，すなわち$R \wedge I=O$となる。（証明終）

いま，上記の性質6において$S=R \wedge \bar{I}$とおけば，$R \wedge \bar{I} \leqq R$および$(R \wedge \bar{I}) \wedge I=O$は一般に成立するから

$$R^2 \leqq R \wedge \bar{I} \Rightarrow R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O$$

が得られる。これは性質4の一部であり，すでに示しているように逆も成立する。また，$S=\Delta R$とおけば$\Delta R \leqq R$，$\Delta R \wedge I=O$であるから

$$R^2 \leqq \Delta R \Rightarrow R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O$$

が得られる。これは性質5の一部となっており，この場合も実際には逆が成立する。

〔性質7〕　$S \leqq R,\ S \wedge I=O \Longleftrightarrow S \leqq R \wedge \bar{I}$

（証明）　（1）$S \leqq R$，$S \wedge I=O$のとき

$S \leqq R$から$S \wedge \bar{I} \leqq R \wedge \bar{I}$となる。また$S \wedge I = O$だから

$$S = (S \wedge I) \vee (S \wedge \bar{I}) = S \wedge \bar{I}$$

よって$S \leqq R \wedge \bar{I}$となる。

（2）　$S \leqq R \wedge \bar{I}$のとき

$$S \leqq R \wedge \bar{I} \leqq R$$

$$S \wedge I \leqq (R \wedge \bar{I}) \wedge I = O$$

よって$S \wedge I = O$となる。　(証明終)

〔性質8〕　$R^2 \leqq S \leqq R$のとき

$$S \wedge I = O \Longleftrightarrow R \wedge I = O$$

(証明)　（1）　$S \wedge I = O$のとき

性質6によって$R \wedge I = O$となる。

（2）　$R \wedge I = O$のとき

$S \leqq R$によって$S \wedge I = O$となる。　(証明終)

ここで，非反射的関係の同値条件について考察をおこなう。まず，非反射性の同値条件として，以下のような性質が知られている。

〔性質9〕(13)　次の条件は同値である。

（1）　$R \wedge I = O$

（2）　すべてのl（$l = 0, 1, 2, \cdots$）に対して$R^l \wedge I \leqq \bar{R} \vee \overline{R'} \vee \bar{I}$

（3）　$R \wedge I \leqq \bar{R} \vee \overline{R'} \vee \bar{I}$

（4）　あるl（$l = 0, 1, 2, \cdots$）に対して$R^l \wedge I \leqq \bar{R} \vee \overline{R'} \vee \bar{I}$

〔性質10〕(13)　次の条件は同値である。

（1）　$R \wedge I = O$

（2）　$R \wedge I \leqq \bar{R} \wedge \bar{I}$

（3）　$R \wedge I \leqq \bar{R} \vee \bar{I}$

〔性質11〕　次の条件は同値である。

（1）　$R \wedge I = O$

（2）　$R = R \wedge \bar{I}$

（3）　$R \leqq R \wedge \bar{I}$

(証明)（1）⇒（2）　$R=(R\wedge I)\vee(R\wedge\bar{I})=R\wedge\bar{I}$

（2）⇒（3）　明らかである。

（3）⇒（1）　$R\leqq R\wedge\bar{I}$

$$R\wedge I\leqq(R\wedge\bar{I})\wedge I=O$$

したがって$R\wedge I=O$となる。　(証明終)

〔性質12〕　次の条件は同値である。

（1）　$R\wedge I=O$

（2）　すべてのl（$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）に対して$R^l\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}\vee\bar{I}$

（3）　$R\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}\vee\bar{I}$

（4）　あるl（$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）に対して$R^l\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}\vee\bar{I}$

(証明)（1）⇒（2）　$l\geqq1$の場合は文献(13)で示されているので，$l=0$の場合を示す。$R\wedge I=O$のとき$I\leqq\bar{R}$であるから

$$R^0=I\leqq\bar{R}\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}\vee\bar{I}$$

（2）⇒（3）　明らかである。

（3）⇒（4）　明らかである。

（4）⇒（1）　$l\geqq1$のときは，この場合も文献(13)で示されているので，$l=0$の場合を示す。

$$R^0\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}\vee\bar{I}$$

$$I\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}\vee\bar{I}$$

$$(R\wedge I)\wedge I\leqq(R\wedge I)\wedge(\bar{R}\vee\overline{R'}\vee\bar{I})$$

$$R\wedge I\leqq R\wedge\overline{R'}\wedge I=R\wedge(\overline{R'}\wedge I)=R\wedge(\bar{R}\wedge I)=O$$

したがって$R\wedge I=O$となる。　(証明終)

〔性質13〕　$R\wedge S\wedge I=(R\wedge I)\times(S\wedge I)\leqq(R\times S)\wedge I$

(証明)　$R\wedge S\wedge I=(R\wedge I)\wedge(S\wedge I)$であり，$(R\wedge I)\wedge(S\wedge I)$と$(R\wedge I)\times(S\wedge I)$はともに対角行列であり，(i, i) 要素はどちらも$r_{ii}\wedge s_{ii}$となり等しい。また$r_{ii}\wedge s_{ii}=1$のとき$R\times S$の (i, i) 要素は1となる。したがって

$$R\wedge S\wedge I=(R\wedge I)\times(S\wedge I)\leqq(R\times S)\wedge I$$　(証明終)

上の性質13は次のようにしても示される。

$$R \wedge S \wedge I = (R \wedge I) \wedge (S \wedge I)$$
$$= (R \wedge I) \times (S \wedge I)$$
$$= ((R \wedge I) \times (S \wedge I)) \wedge I$$
$$\leqq (R \times S) \wedge I$$

〔性質14〕 $k \geqq 1$, $l \geqq 0$, $m \geqq 0$, $l(1) \geqq 0$, $l(2) \geqq 0$, …, $l(k) \geqq 0$ のとき

（1） $R^{l} \wedge R^{m} \wedge I \leqq R^{l+m} \wedge I$

（2） $R^{l(1)} \wedge R^{l(2)} \wedge \cdots \wedge R^{l(k)} \wedge I \leqq R^{l(1)+l(2)+\cdots+l(k)} \wedge I$

（3） $R^{l} \wedge I \leqq R^{ml} \wedge I$

（4） $R^{l} \wedge I \leqq R^{2l} \wedge I$

（5） $R \wedge I \leqq R^{m} \wedge I$

(証明)（1） 性質13によって

$$R^{l} \wedge R^{m} \wedge I \leqq R^{l+m} \wedge I$$

（2） （1）を用いて

$$R^{l(1)} \wedge R^{l(2)} \wedge \cdots \wedge R^{l(k)} \wedge I$$
$$= (R^{l(1)} \wedge R^{l(2)} \wedge I) \wedge R^{l(3)} \wedge \cdots \wedge R^{l(k)} \wedge I$$
$$\leqq (R^{l(1)+l(2)} \wedge I) \wedge R^{l(3)} \wedge \cdots \wedge R^{l(k)} \wedge I$$
$$= R^{l(1)+l(2)} \wedge R^{l(3)} \wedge \cdots \wedge R^{l(k)} \wedge I$$
$$\leqq \cdots\cdots$$
$$\leqq R^{l(1)+l(2)+\cdots+l(k)} \wedge I$$

（3） $m \geqq 1$ のときは（2）において$k=m$, $l(1)=l(2)=\cdots=l(m)=l$とおけば

$$R^{l} \wedge I \leqq R^{ml} \wedge I$$

$m=0$ のときは$R^{0}=I$であるから$R^{0} \wedge I=I$となり，明らかに$R^{l} \wedge I \leqq I=R^{0} \wedge I$となる。

（4） （3）において$m=2$ とおけば

$$R^{l} \wedge I \leqq R^{2l} \wedge I$$

（5） （3）において$l=1$ とおけば

$R\wedge I \leqq R^m \wedge I$ (証明終)

〔性質15〕 (1) $R^{lm}\wedge I=O \Rightarrow R^l \wedge I=O$ (l, $m \geqq 1$)

(2) $R^6\wedge I=O \Rightarrow R^2\wedge I=O$, $R^3\wedge I=O$

(3) $R^6\wedge I=O \Rightarrow \nabla R=O$, $R^3\wedge I=O$

(証明) (1) 性質14による。

(2) (1)による。

(3) 性質2によって$R^2\wedge I=O \Longleftrightarrow R\wedge R'=O$となり，$\nabla R=R\wedge R'$であるから(2)によって$\nabla R=O$, $R^3\wedge I=O$となる。 (証明終)

なお，上の性質中の$R^6\wedge I=O$に関しては，次の命題の成立することが知られている(12)。

$$R^6\wedge I=O \Longleftrightarrow R^5 \leqq \overline{R'}$$

この命題はすでに示している性質2からも容易に得られる。

〔性質16〕 $R^2\leqq R$のとき$k=1, 2, \cdots$に対して，

$$R\wedge I=O \Longleftrightarrow R^k\wedge I=O$$

(証明) (1) $R\wedge I=O$のとき

$R^2\leqq R$から$R^k\leqq R$であるので

$$R^k\wedge I\leqq R\wedge I$$

となり，$R\wedge I=O$によって$R^k\wedge I=O$となる。

(2) $R^k\wedge I=O$のとき

性質14によって$R\wedge I\leqq R^k\wedge I$となるから$R\wedge I=O$となる。 (証明終)

この性質16は，すでに示している性質2および性質3からも得られる。

〔性質17〕 $R^2\leqq R$のとき次の条件は同値である。

(1) $R\wedge I=O$

(2) $R^2\wedge I=O$

(3) $R^3\wedge I=O$

(4) すべてのk ($k=1, 2, \cdots$) に対して$R^k\wedge I=O$

(5) あるk ($k=1, 2, \cdots$) に対して$R^k\wedge I=O$

(証明) 性質16による。 (証明終)

次に，非反射性の特別な場合であると考えられる非対称性すなわち$\nabla R=O$について考察をおこなう。非対称性に関しては，すでにいくつかの性質を示しているが，さらに以下のような性質が成立する。

〔性質18〕(8)(9)(12)次の条件は同値である。

(1) $\nabla R=O$

(2) $\Delta R=R$

(3) $R\leqq\overline{R'}$

(4) $R^2\wedge I=O$

〔性質19〕 すべてのl ($l=0, 1, 2, \cdots$) に対して

(1) $\nabla(R^{2l+1})\leqq\overline{R}\vee\overline{R'}\Longleftrightarrow\nabla R=O$

(2) $\nabla(R^{2l+1})\leqq\overline{R'}\Rightarrow\nabla R=O$

(3) $\nabla(R^{2l+1})\leqq\overline{R}\Rightarrow\nabla R=O$

(4) $R^{2l+1}\leqq\overline{R'}\Rightarrow\nabla R=O$

(5) $R^{2l+1}\leqq\overline{R}\Rightarrow\nabla R=O$

(証明) (1)(a) $\nabla(R^{2l+1})\leqq\overline{R}\vee\overline{R'}$のとき

いま$r_{ij}=r_{ji}=1$とおく。このとき$r_{ii}^{(2)}=1$であるから，$l=0, 1, 2, \cdots$に対して$r_{ij}^{(2l+1)}=r_{ji}^{(2l+1)}=1$となり，$\nabla(R^{2l+1})\leqq\overline{R}\vee\overline{R'}$によって$\overline{r_{ij}}\vee\overline{r_{ji}}=1$となる。しかし，これは$r_{ij}=r_{ji}=1$と矛盾する。したがって$\nabla R=O$となる。

(b) $\nabla R=O$のとき

$R\wedge R'=O$だから$\overline{R}\vee\overline{R'}=E$となり，したがって

$$\nabla(R^{2l+1})\leqq E=\overline{R}\vee\overline{R'}$$

となる。

(2)−(3) (1)による。

(4) (2)による。

(5) (3)による。 (証明終)

上記の性質19(2)(3)に関して，

$$\nabla R=O\Rightarrow\nabla(R^{2l+1})\leqq\overline{R'} \quad (l=0, 1, 2, \cdots),$$

$$\nabla R=O\Rightarrow\nabla(R^{2l+1})\leqq\overline{R} \quad (l=0, 1, 2, \cdots)$$

は，どちらも一般には成立しない。いまl＝1として

$$R=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば，

$$R^2=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$R^3=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\nabla(R^3)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \overline{R'}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix},\quad \overline{R}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

となり，$\nabla R=O$ではあるが，$\nabla(R^3)\leqq\overline{R'}$とも，$\nabla(R^3)\leqq\overline{R}$ともならず

$$\nabla R=O\Rightarrow\nabla(R^3)\leqq\overline{R'},$$

$$\nabla R=O\Rightarrow\nabla(R^3)\leqq\overline{R}$$

は，どちらも成立しない。

〔性質20〕　(1)　$R^3\leqq\overline{R'}\Rightarrow\nabla R=O$

(2)　$R^4\wedge I=O\Rightarrow\nabla R=O$

(証明)　(1)　性質19(4)による。

(2)　性質2および上の(1)による。　(証明終)

〔性質21〕　$R^2\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow\nabla R=O$

(証明)　性質4によって$R^2\leqq R$，$R\wedge I=O$となるから性質1(1)(2)に

よって$\nabla R=O$となる。　(証明終)

〔性質22〕　$R^2 \leqq \Delta R \Rightarrow \nabla R=O$

(証明)　性質5によって$R^2 \leqq R$, $R \wedge I=O$となるから性質1(1)(2)によって$\nabla R=O$となる。　(証明終)

〔性質23〕[10] $\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow R \wedge \bar{I}=\Delta R$

〔性質24〕　$\nabla R=O \Longleftrightarrow R=R \wedge \bar{I}=\Delta R$

(証明)　(1)　$\nabla R=O$のとき

性質18によって$R=\Delta R$となり，また性質23によって$\Delta R=R \wedge \bar{I}$となるから

$$R=\Delta R=R \wedge \bar{I}$$

となる。

(2)　$R=R \wedge \bar{I}=\Delta R$のとき

性質18によって$\nabla R=O$となる。　(証明終)

〔性質25〕　$R^n=O \Rightarrow R=R \wedge \bar{I}=\Delta R$

(証明)　$R^n=O$のとき$\nabla R=O$であるから，性質24によって

$$R=R \wedge \bar{I}=\Delta R$$

となる。　(証明終)

〔性質26〕　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I=O \Rightarrow R=R \wedge \bar{I}=\Delta R$

(証明)　性質1(1)(2)によって$\nabla R=O$となるから，性質24によって$R=R \wedge \bar{I}=\Delta R$となる。　(証明終)

〔性質27〕　$R^2 \leqq R \wedge \bar{I} \Rightarrow R=R \wedge \bar{I}=\Delta R$

(証明)　性質4および性質26による。　(証明終)

〔性質28〕　$R^2 \leqq \Delta R \Rightarrow R=R \wedge \bar{I}=\Delta R$

(証明)　性質5および性質26による。　(証明終)

〔性質29〕　$R^2 \leqq \Delta R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$, $\nabla R=O$

(証明)　性質5および性質1(1)(2)による。　(証明終)

次に非反射的推移関係行列のべき乗に関する性質について考察をおこなう。

〔性質30〕　すべてのm，k（m，k＝1，2，…）に対して

（1）　$R^m=O \Rightarrow R^n=O$

（2）　$R^m=O$，$R^k \neq O \Rightarrow R^k \neq R^{k+1}$，$k<\mathrm{mim}(m, n)$

（3）　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I=O$，$R^k \neq O \Rightarrow R^k \neq R^{k+1}$，$k<n$

（証明）　（1）(a)　$m \leqq n$のとき

$$R^m=R^{m+1}=\cdots=O$$

であるから明らかに$R^n=O$となる。

(b)　$m>n$のとき

もし$R^n \neq O$とすれば，ある$i(0)$，$i(1)$，…，$i(n) \in \{1, 2, \cdots, n\}$に対して

$$r_{i(0)i(1)} \wedge r_{i(1)i(2)} \wedge \cdots \wedge r_{i(n-1)i(n)}=1$$

となる。したがって，あるp，qに対して$i(p)=i(q)$（$p<q$）となり

$$r_{i(p)i(p+1)} \wedge \cdots \wedge r_{i(q-1)i(q)}=1$$

すなわち

$$r^{(q-p)}_{i(p)i(p)}=1$$

となる。したがって

$$r^{(m(q-p))}_{i(p)i(p)}=1$$

となるが，これは$R^{m(q-p)} \neq O$を意味しており，$m \leqq m(q-p)$であるから$R^m=O$と矛盾する。よって$R^n=O$となる。

（2）　$R^m=O$によって$R^m=R^{m+1}=\cdots=O$となるから，$R^k \neq O$のとき$k<m$となる。また（1）によって$R^m=O$のとき$R^n=O$となるから同様にして$k<n$となり，$k<\min(m, n)$となる。次に，もし$R^k=R^{k+1}$であれば

$$R^k=R^{k+1}=\cdots=R^m=O$$

となり，$R^k \neq O$と矛盾する。よって$R^k \neq R^{k+1}$となる。

（3）　性質1（1）（3）によって，$R^2 \leqq R$，$R \wedge I=O$のとき$R^n=O$となるから，上の（2）によって$R^k \neq R^{k+1}$，$k<n$となる。　（証明終）

上の性質30の（1）は一般に知られていると思われるが，次の（2）の証明で使用しているので示している。なお，命題論理の条件文に関するよく知

られた事実を用いれば，(2)の

$$R^m=O,\ R^k\neq O\Rightarrow R^k\neq R^{k+1}$$

から

$$R^m=O,\ R^k=R^{k+1}\Rightarrow R^k=O$$

が得られる。ただし$R^m=O$, $R^k=R^{k+1}$のとき$k<\min(m, n)$とはいえない。

また同様に(3)の

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O,\ R^k\neq O\Rightarrow R^k\neq R^{k+1}$$

から

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O,\ R^k=R^{k+1}\Rightarrow R^k=O$$

が得られる。ただし，この場合も$k<n$とはいえない。この得られた最後の命題において$k=1$とおけば

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O,\ R=R^2\Rightarrow R=O$$

となるが，これは明らかに

$$R^2=R,\ R\wedge I=O\Rightarrow R=O$$

となり，容易にわかるように逆も成立して

$$R^2=R,\ R\wedge I=O\Longleftrightarrow R=O$$

となる(11)。したがって次の性質の(1)が得られる。

〔性質31〕(1)　$R\wedge I=O$のとき

$$R^2=R\Longleftrightarrow R=O$$

(2)　$R\wedge I=O$のとき

$$R\neq O\Longleftrightarrow R^2\neq R$$

(3)　$R\wedge I=O,\ R\neq O\Rightarrow R\neq R^2$

(証明)(1)(a)　$R^2=R$のとき

性質1(1)(3)によって$R^n=O$となるから

$$R=R^2=\cdots=R^n=O$$

(b)　$R=O$のとき

明らかに　$R^2=R=O$となる。

(2)　(1)による。

（3）（2）による。　　　(証明終)

〔性質32〕（1）　$R^n = O$, $R^2 \neq O \Rightarrow R^2 \neq R^3$

（2）　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$, $R^2 \neq O \Rightarrow R^2 \neq R^3$

(証明)　性質30による。　　　(証明終)

上の性質32の（2）に関しては，性質31の（3）の場合と違って，$R^2 \leqq R$をはずすことはできない。すなわち，一般には

$$R \wedge I = O,\ R^2 \neq O \Rightarrow R^2 \neq R^3$$

とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq O$$

$$R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R^2$$

となり，$R \wedge I = O$, $R^2 \neq O$であるが$R^2 \neq R^3$とはならない。

〔性質33〕　$R^2 = R$のとき次の条件は同値である。

（1）　$R \wedge I = O$

（2）　$R = O$

（3）　すべてのk（k＝1，2，…）に対して$R^k \wedge I = O$

（4）　あるk（k＝1，2，…）に対して$R^k \wedge I = O$

（5）　あるk（k＝1，2，…）に対して$R^k = O$

(証明)（1）⇒（2）　性質31（1）による。

（2）⇒（1）　明らかに$R \wedge I = O$となる。

（1）⇒（3）　性質16による。

(3) $\Rightarrow$(4) 明らかである。

(4) $\Rightarrow$(1) 性質16による。

(2) $\Rightarrow$(5) 明らかである。

(5) $\Rightarrow$(2) $R=R^2=\cdots=R^k=O$ (証明終)

〔性質34〕 $R^2=R$のとき

$$R\wedge I=O\Longleftrightarrow R=O$$

(証明) 性質33(1)(2)による。 (証明終)

この性質34はほとんど自明であり，すでに知られていると思われるが，以下の議論の都合上示している。なお，この性質は性質31の(1)と同じく次のように表現することができ，本質的には性質31の(1)と同等であると考えられる。

$$R^2=R,\ R\wedge I=O\Longleftrightarrow R=O$$

〔性質35〕 $R^2=R$のとき

$$R\neq O\Longleftrightarrow R\wedge I\neq O$$

(証明) 性質34による。 (証明終)

〔性質36〕 $R^2=R\neq O\Rightarrow R\wedge I\neq O$

(証明) 性質35による。 (証明終)

上記の性質36は，零でないべき等ブール行列の対角要素には少なくとも1つの零でない要素があることをいっている。

ところで，この性質36は明らかに

$$R^2=R,\ R\neq O\Rightarrow R\wedge I\neq O$$

と書き換えられるが，これは前に性質30のところでも言及した命題論理のよく知られた事実によって，すでに性質31(3)で示されている次の

$$R\wedge I=O,\ R\neq O\Rightarrow R\neq R^2$$

と本質的に同じである。さらに，これは

$$R\wedge I=O,\ R=R^2\Rightarrow R=O$$

と表現することもでき，実際にはすでに性質30のところでも述べているように逆も成立するので

$$R \wedge I = O,\ R = R^2 \Longleftrightarrow R = O$$

となる。しかし，

$$R \wedge I \neq O \Rightarrow R^2 = R,\ R \neq O,$$

$$R \neq R^2 \Rightarrow R \wedge I = O,\ R \neq O$$

は，一般には成立しない。もちろん，明らかに

$$R \wedge I \neq O \Rightarrow R \neq O,$$

$$R \neq R^2 \Rightarrow R \neq O$$

は成立する。これらは次のように一般化され，k＝１，２，…に対し

$$R \wedge I \neq O \Rightarrow R^k \wedge I \neq O,$$

$$R^k \neq R^{k+1} \Rightarrow R^k \neq O$$

となる。

４．まとめ

非反射的推移関係の初等的な性質を明らかにした。とくに，非反射性の一般的な同値条件や推移性のもとでの非反射性の同値条件を与えている。また，非反射的推移関係との関連でべき等的な関係行列についてもいくつかの性質を示している。これらの性質のうち一部のものは従来知られている性質の若干の一般化となっている。本論文で述べた性質にはほとんど自明のものも多く，基本的にはすでに知られているのではないかと思われるものも含まれているが，これまであまりおこなわれていない観点から考察をおこない，非反射的推移関係の性質を多少系統的に整理している。

非反射的推移関係については普通考えられている以上にまだ数多くの性質が成立するように思われる。これらの性質については今後明らかにして報告したい。たとえば，推移性のもとでは非反射性と非対称性は同値であるので，非反射的推移関係は非対称的推移関係と呼ぶこともできるが，非対称性は反対称性の特別な場合であるから，反対称的推移関係の性質との対比で非反射的推移関係の性質を調べてみることが考えられる。非反射的

推移関係の周辺には，これ以外にもいくつかの興味ある考察すべき課題が残されている。

文　献

(1) Aho, A.V., Garey, M.R. and Ullman, J.D.: "The transitive reduction of a directed graph," SIAM J. Comput. Vol. 1, No.2, pp.131-137 (1972).

(2) ボヘンスキー，J.M.: "記号論理学の綱要"（國嶋一則，奥　雅博訳）勁草書房（1970年4月）

(3) Carnap, R.: "Introduction to Symbolic Logic and its Applications," Dover Publications, New York (1958).

(4) Chankong, V. and Haimes, Y.Y.: "Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology," North-Holland, New York (1983).

(5) Fishburn, P.C.: "The Theory of Social Choice," Princeton University Press, New Jersey (1973).

(6) Fisher, A.C., Liebman, J.S., and Nemhauser, G.L.: "Computer Construction of Project Networks," Communications of the ACM, Vol. 11, No. 7, pp. 493-497 (1968).

(7) Hashimoto, H. "Transitive reduction of a rectangular boolean matrix," Discrete Applied Mathematics, 8, pp. 153-161 (1984).

(8) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第34巻, 第3・4号, pp.387-405（昭和60年6月).

(9) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質II", 山口経済学雑誌, 第35巻, 第3・4号, pp.281-293（昭和61年1月).

(10) 橋本　寛："連結的関係に関する若干の性質", 山口経済学雑誌, 第36巻, 第5・6号, pp.245-261（昭和62年5月).

(11) 橋本　寛："Vacuously Transitive関係の性質", 山口経済学雑誌, 第37巻, 第3・4号, pp.399-426（昭和63年3月).

(12) 橋本　寛："変更された推移性と連結的関係行列", 山口経済学雑誌, 第39巻, 第3・4号, pp.397-416（平成2年11月).

(13) 橋本　寛："連結的な反対称的推移関係", 山口経済学雑誌, 第42巻, 第1・2号, pp.53-74（平成6年9月).

(14) 井関清志："記号論理学（述語論理）", 槇書店（昭和48年8月).

(15) 柏木芳美："関係代数的証明", 山口経済学雑誌, 第46巻, 第3号, pp.101-111（平成10年5月).

(16) 近藤洋逸, 好並英司："論理学概論", 岩波書店（1964年4月).

(17) 小野寛晰：“情報代数”，共立出版（1994年 2 月）.

(18) オア，O.，ウイルソン，R.J.：“やさしくくわしいグラフ理論入門”（大石泰彦訳），日本評論社（1993年 7 月）.

(19) Roubens, M. and Vincke, P. : “Preference Modelling,” Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag, Berlin(1985).

(20) Schmidt, G. and Ströhlein, T. “Relations and Graphs,” Springer-Verlag, Berlin (1993).

(21) 高松鶴吉：“ブール代数序説—集合・論理・公理系”，有信堂（昭和42年11月）.