関係行列の初歩的な同値条件と非反射的推移性

橋　本　　　寛

1．はじめに

二項関係は0，1の要素をもつブール行列によって表現できる。本論文では非反射的推移関係を表現するブール行列のある特殊な性質について考察をおこなっている。非反射的推移関係は狭義の半順序とも呼ばれ，応用上重要であり，これまでにも種々の興味深い性質が知られている［8，11，14］。本論文では主として非反射的推移関係を表現するブール行列のべき乗に関するある種の不等式について考察をおこない，その若干の一般化を試みている。また，これに関連して関係行列の初歩的な等式および不等式を整理し，さらに関係行列に関する不等式条件のほとんど自明な同値条件を多数示している。

2．定義

ブール行列に関する演算や記法は文献［8］などに従うものとするが，主要なものについて示せば次のとおりである。ブール行列RとSの行列和を$R \vee S$で示し，要素ごとの論理積を$R \wedge S$で示す。また，RとSの行列積を$R \times S$で示す。さらに，Rの転置をR'で，Rの否定を$\overline{R}$で示す。特殊な演算として，$\triangle R = R \wedge \overline{R'}$，$\triangledown R = R \wedge R'$と定める。

特殊な行列として，単位行列をIで示し，$R^0 = I$とする。全要素が1の行列をEで示し，零行列をOで示す。非反射的関係を表現するブール行列

RはR∧I＝Oとなり，推移関係を表現するブール行列Rは$R^2 \leqq R$となる。なお，本論文では，一般にnで行列の次数を表わす。

3．結果

まず，以下の議論で必要な非反射的推移関係を表現するブール行列の基本的性質について述べる。次に，非反射的推移関係行列のべき乗に関するある特殊な性質を一般化するが，これに関連して，関係行列に関し一般に成立する初歩的な等式と不等式を調べる。また，関係行列に関するある種の不等式の同値条件について考察をおこなう。

［性質1］　ある整数m（m≧1）に対して$R^{2m} \leqq R$のとき

$$R \wedge I = O \Longleftrightarrow \nabla R = O$$

(証明)　（1）　R∧I＝Oのとき

もし$r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$であれば，$r^{(2)}_{ii} = 1$となり，$r^{(2m)}_{ii} = 1$となるので，$R^{2m} \leqq R$によって$r_{ii} = 1$となる。しかし，これは矛盾する。

（2）　▽R＝Oのとき

明らかにR∧I＝Oとなる。　(証明終)

この性質1から次のよく知られた性質が得られる。

［性質2］［2，3］　$R^2 \leqq R$のとき

$$R \wedge I = O \Longleftrightarrow \nabla R = O$$

［性質3］［8］　$R^2 \leqq R$のとき次の条件は同値である。

（1）　R∧I＝O

（2）　すべてのl（l＝0，1，2，…）に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

（3）　あるl（l＝0，1，2，…）に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

［性質4］［8］　$R^2 \leqq R \wedge \overline{I} \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$

［性質5］［5］　$R^2 \leqq \triangle R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$

［性質6］　$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longrightarrow$ すべてのl（l＝0，1，2，…）に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(証明)　性質3(1)(2)による。　(証明終)

なお，上の性質6の逆は一般には成立しない。いま

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，明らかにすべてのl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して$R^l \leqq \overline{R'}$であるが，$R^2 \leqq R$とはなっていない。

本論文においては，この性質6の一般化をおこなっている。

［性質7］　$R^2 \leqq R \wedge \overline{I} \Longrightarrow$ すべてのl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(証明)　性質4および性質6による。　(証明終)

［性質8］

(1)　$I \leqq (R' \wedge I) \vee \overline{R} \leqq R' \vee \overline{R}$

(2)　$I \leqq (R \wedge I) \vee \overline{R'} \leqq R \vee \overline{R'}$

(3)　$I \leqq R' \vee (\overline{R} \wedge I) \leqq R' \vee \overline{R}$

(4)　$I \leqq R \vee (\overline{R'} \wedge I) \leqq R \vee \overline{R'}$

(5)　$R \wedge \overline{R'} \leqq R \wedge (\overline{R'} \vee \overline{I}) \leqq \overline{I}$

(6)　$R' \wedge \overline{R} \leqq R' \wedge (\overline{R} \vee \overline{I}) \leqq \overline{I}$

(7)　$R \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R'} \wedge (R \vee \overline{I}) \leqq \overline{I}$

(8)　$R' \wedge \overline{R} \leqq \overline{R} \wedge (R' \vee \overline{I}) \leqq \overline{I}$

(9)　$R \wedge \overline{R'} \wedge I = O$

(10)　$R' \wedge \overline{R} \wedge I = O$

(11)　$R' \vee \overline{R} \vee \overline{I} = E$

(12)　$R \vee \overline{R'} \vee \overline{I} = E$

(13)　$R \wedge \overline{R'} = R \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$

(14)　$R' \wedge \overline{R} = R' \wedge \overline{R} \wedge \overline{I}$

(15)　$R' \vee \overline{R} = R' \vee \overline{R} \vee I$

(16)　$R \vee \overline{R'} = R \vee \overline{R'} \vee I$

(証明)　(１)　$I=(R\vee\overline{R})\wedge I=(R\wedge I)\vee(\overline{R}\wedge I)$

$$=(R'\wedge I)\vee(\overline{R}\wedge I)$$

$$\leqq(R'\wedge I)\vee\overline{R}$$

$$\leqq R'\vee\overline{R}$$

(２)　(１)の各辺を転置する。

(３)　$I=(R\vee\overline{R})\wedge I=(R\wedge I)\vee(\overline{R}\wedge I)$

$$=(R'\wedge I)\vee(\overline{R}\wedge I)$$

$$\leqq R'\vee(\overline{R}\wedge I)$$

$$\leqq R'\vee\overline{R}$$

(４)　(３)の各辺を転置する。

(５)　(１)から

$$\overline{I}\geqq\overline{(R'\wedge I)\vee\overline{R}}\geqq\overline{R'\vee\overline{R}}$$

$$\overline{I}\geqq(\overline{R'}\vee\overline{I})\wedge R\geqq\overline{R'}\wedge R$$

(６)　(５)の各辺を転置する。

(７)　(３)から

$$\overline{I}\geqq\overline{R'\vee(\overline{R}\wedge I)}\geqq\overline{R'\vee\overline{R}}$$

$$\overline{I}\geqq\overline{R'}\wedge(R\vee\overline{I})\geqq\overline{R'}\wedge R$$

(８)　(７)の各辺を転置する。

(９)　(５)による。

(10)　(９)の両辺を転置する。

(11)　(９)から

$$\overline{R\wedge\overline{R'}\wedge I}=\overline{O}$$

$$\overline{R}\vee R'\vee\overline{I}=E$$

$$R'\vee\overline{R}\vee\overline{I}=E$$

(12)　(11)の両辺を転置する。

(13)　(５)による。

(14)　(13)の両辺を転置する。

(15)　(13)から

$$\overline{\mathrm{R}\wedge\overline{\mathrm{R}'}}=\overline{\mathrm{R}\wedge\overline{\mathrm{R}'}\wedge\overline{\mathrm{I}}}$$

$$\overline{\mathrm{R}}\vee\mathrm{R}'=\overline{\mathrm{R}}\vee\mathrm{R}'\vee\mathrm{I}$$

$$\mathrm{R}'\vee\overline{\mathrm{R}}=\mathrm{R}'\vee\overline{\mathrm{R}}\vee\mathrm{I}$$

(16)　(15) の両辺を転置する。　(証明終)

上記の性質8の一部は，表現形式は異なっているが，本質的には関係論理学においてすでに知られているものである [12，15]。また，(9) は，定義によって，$\triangle\mathrm{R}=\mathrm{R}\wedge\overline{\mathrm{R}'}$であるから，$\triangle\mathrm{R}$が非反射的であることをいっているが，この$\triangle\mathrm{R}$の非反射性も一般によく知られている。なお，(16) はすでに文献［7］でも指摘されている。この性質8の不等式および等式はほとんど自明であるが，式の変形などにおいて有用であるので整理して示したものである。

［性質9］　$\triangle\mathrm{R}\leqq\mathrm{R}\wedge\overline{\mathrm{I}}$

(証明)　性質8 (13) によって

$$\triangle\mathrm{R}=\mathrm{R}\wedge\overline{\mathrm{R}'}=\mathrm{R}\wedge\overline{\mathrm{R}'}\wedge\overline{\mathrm{I}}\leqq\mathrm{R}\wedge\overline{\mathrm{I}}$$　(証明終)

［性質10］　$\mathrm{R}^2\leqq\triangle\mathrm{R}\Longrightarrow$すべての$l$ ($l=0，1，2，\cdots$) に対して$\mathrm{R}^l\leqq\overline{\mathrm{R}'}$

(証明)　性質7および性質9による。　(証明終)

なお，この性質10は性質5および性質6を用いても得られる。

［性質11］［8］　$\mathrm{R}^2\leqq\triangle\mathrm{R}\Longleftrightarrow\mathrm{R}^2\leqq\mathrm{R}，\triangledown\mathrm{R}=\mathrm{O}$

［性質12］　$\mathrm{R}^2\leqq\mathrm{R}，\triangledown\mathrm{R}=\mathrm{O}\Longrightarrow$すべての$l$ ($l=0，1，2，\cdots$) に対し$\mathrm{R}^l\leqq\overline{\mathrm{R}'}$

(証明)　性質10および性質11による。　(証明終)

この性質12は性質2および性質6を用いても得られる。また，性質12において，$\triangledown\mathrm{R}=\mathrm{O}$を$\triangledown\mathrm{R}\leqq\mathrm{I}$で置き換えると，次の性質が成立する。

［性質13］　$\mathrm{R}^2\leqq\mathrm{R}，\triangledown\mathrm{R}\leqq\mathrm{I}\Longrightarrow$すべての$l$ ($l=0，1，2，\cdots$) に対して$\mathrm{R}^l\leqq\overline{\mathrm{R}'}\vee\mathrm{I}$

(証明)　$l\geqq1$の場合はすでに文献［4］で示されているので，$l=0$の場合だけを示す。このとき明らかに

$$\mathrm{R}^0=\mathrm{I}\leqq\overline{\mathrm{R}'}\vee\mathrm{I}$$　(証明終)

上の性質中の条件$R^2 \leqq R$，$\nabla R \leqq I$については，これと同値ないくつかの条件が知られているので[7]，この$R^2 \leqq R$，$\nabla R \leqq I$なる条件をそれらの同値な条件で置き換えることもできる。以下においては，この性質13をさらに一般化することを考える。

次の性質はほとんど明らかであり，またよく知られている。

[性質14] [4，10]　$R \wedge T \leqq S \Longleftrightarrow T \leqq \overline{R} \vee S$

[性質15]　次の条件はすべて同値である。

(a)　　$R \wedge T \leqq S$

(b)　(1)　$R \wedge T \leqq R \wedge S$

　　(2)　$R \wedge T \leqq S \wedge T$

　　(3)　$R \wedge T = R \wedge S \wedge T$

(c)　(1)　$T \leqq \overline{R} \vee (R \wedge S)$

　　(2)　$T \leqq \overline{R} \vee (S \wedge T)$

　　(3)　$T \leqq \overline{R} \vee (R \wedge S \wedge T)$

(証明)　(a) および (b) の各条件が互いに同値であることは明らかである。また (b) の各条件と対応する (c) の条件との同値性は性質14によって得られる。なお，(b)(3)に関しては，一般に$R \wedge T \geqq R \wedge S \wedge T$であるから

$$R \wedge T = R \wedge S \wedge T \Longleftrightarrow R \wedge T \leqq R \wedge S \wedge T$$

が成立する。この$R \wedge T \leqq R \wedge S \wedge T$に性質14を適用すれば

$$R \wedge T \leqq R \wedge S \wedge T \Longleftrightarrow T \leqq \overline{R} \vee (R \wedge S \wedge T)$$

となり，したがって

$$R \wedge T = R \wedge S \wedge T \Longleftrightarrow T \leqq \overline{R} \vee (R \wedge S \wedge T)$$

が得られる。　(証明終)

[性質16]　$(R \wedge T)' = R \wedge T$のとき次の条件はすべて同値である。

(a)　　$R \wedge T \leqq S$

(b)　(1)　$R \wedge T \leqq S'$

　　(2)　$R \wedge T \leqq R \wedge S'$

(3) $R \wedge T \leqq \triangledown S$

(4) $R \wedge T \leqq S' \wedge T$

(5) $R \wedge T \leqq R \wedge \triangledown S$

(6) $R \wedge T = R \wedge S' \wedge T$

(7) $R \wedge T \leqq T \wedge \triangledown S$

(8) $R \wedge T = R \wedge T \wedge \triangledown S$

(c) (1) $T \leqq \overline{R} \vee S'$

(2) $T \leqq \overline{R} \vee (R \wedge S')$

(3) $T \leqq \overline{R} \vee \triangledown S$

(4) $T \leqq \overline{R} \vee (S' \wedge T)$

(5) $T \leqq \overline{R} \vee (R \wedge \triangledown S)$

(6) $T \leqq \overline{R} \vee (R \wedge S' \wedge T)$

(7) $T \leqq \overline{R} \vee (T \wedge \triangledown S)$

(8) $T \leqq \overline{R} \vee (R \wedge T \wedge \triangledown S)$

(証明) (a), (b)(1), (b)(3) の同値性だけを示す。これらの条件と (b) の他の条件との同値性は性質15を用いて得られる。また (b) の各条件と対応する (c) の条件との同値性は性質14によって得られる。

(a) $\Longrightarrow$ (b)(1) $R \wedge T \leqq S$ から $(R \wedge T)' \leqq S'$ となり，$R \wedge T$ の対称性によって $R \wedge T \leqq S'$ となる。

(b)(1) $\Longrightarrow$ (b)(3) $R \wedge T \leqq S'$ から $(R \wedge T)' \leqq S$ となり，$R \wedge T$ の対称性によって $R \wedge T \leqq S$ となる。したがって $R \wedge T \leqq S \wedge S' = \triangledown S$ となる。

(b)(3) $\Longrightarrow$ (a) $R \wedge T \leqq \triangledown S \leqq S$ (証明終)

なお，述べるまでもないことであるが，この性質16の (a) の $R \wedge T \leqq S$ と同値な条件として，すでに示している性質14および性質15もある。

[性質17] 次の条件はすべて同値である。

(a) (1) $\triangledown R \leqq S$

（2）　$\triangledown R \leqq S'$

（3）　$\triangledown R \leqq R \wedge S$

（4）　$\triangledown R \leqq R \wedge S'$

（5）　$\triangledown R \leqq R' \wedge S$

（6）　$\triangledown R \leqq R' \wedge S'$

（7）　$\triangledown R \leqq \triangledown S$

（8）　$\triangledown R = S \wedge \triangledown R$

（9）　$\triangledown R = S' \wedge \triangledown R$

(10)　$\triangledown R \leqq R \wedge \triangledown S$

(11)　$\triangledown R \leqq R' \wedge \triangledown S$

(12)　$\triangledown R = \triangledown (R \wedge S)$

（b）（1）　$R \leqq \overline{R'} \vee S$

（2）　$R \leqq \overline{R'} \vee S'$

（3）　$R \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S)$

（4）　$R \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S')$

（5）　$R \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge S)$

（6）　$R \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge S')$

（7）　$R \leqq \overline{R'} \vee \triangledown S$

（8）　$R \leqq \overline{R'} \vee (S \wedge \triangledown R)$

（9）　$R \leqq \overline{R'} \vee (S' \wedge \triangledown R)$

(10)　$R \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge \triangledown S)$

(11)　$R \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge \triangledown S)$

(12)　$R \leqq \overline{R'} \vee \triangledown (R \wedge S)$

(証明)　（a）　性質15および性質16において$T=R'$とおけばよい。

（b）　（a）に対して性質14を適用する。　(証明終)

上記の性質17中の（a）(12) の$\triangledown (R \wedge S)$に関しては，一般に

$$\triangledown (R \wedge S) = R \wedge S \wedge (R \wedge S)'$$
$$= R \wedge R' \wedge S \wedge S'$$

$$= \nabla R \wedge \nabla S$$

が成立する。

[性質18] 次の条件は同値である。

(1) $\nabla R \leqq I$

(2) $\nabla R = R \wedge I$

(3) $R \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge I)$

(証明) (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 性質17 (a)(1), (a)(3) においてS＝Iとおけば,

$$\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow \nabla R \leqq R \wedge I$$

ところで，一般に$\nabla R \geqq R \wedge I$であるから

$$\nabla R \leqq R \wedge I \Longleftrightarrow \nabla R = R \wedge I$$

したがって

$$\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow \nabla R = R \wedge I$$

(1) $\Longleftrightarrow$ (3) 性質17 (a)(1), (b)(3) においてS＝Iとおくことにより,

$$\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow R \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge I)$$ (証明終)

なお，性質18 (1) に性質17 (a)(1), (b)(1) を適用すれば

$$\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow R \leqq \overline{R'} \vee I$$

が得られるが，これはすでに知られている[6]。また$\nabla R = R \wedge R'$であるから，性質14によっても得られる。

[性質19] $T = T'$のとき次の条件はすべて同値である。

(a) $R \wedge T \leqq S$

(b) (1) $R' \wedge T \leqq S'$

(2) $R' \wedge T \leqq R' \wedge S'$

(3) $R' \wedge T \leqq S' \wedge T$

(4) $R' \wedge T = R' \wedge S' \wedge T$

(c) (1) $T \leqq \overline{R'} \vee S'$

(2) $T \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge S')$

(3)　$T \leqq \overline{R'} \vee (S' \wedge T)$

(4)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge S' \wedge T)$

(証明)　まず(a)と(b)(1)は，$T'=T$のとき次のようにして同値となる。

$$R \wedge T \leqq S \Longleftrightarrow (R \wedge T)' \leqq S' \Longleftrightarrow R' \wedge T' \leqq S' \Longleftrightarrow R' \wedge T \leqq S'$$

次に(b)の各条件は性質15によって互いに同値となり，また(b)の各条件と対応する(c)の条件は性質14によって同値となる。

(証明終)

性質19に関連して，一般には

$$T'=T,\ R \wedge T \leqq S \Longrightarrow T \leqq \overline{R'} \vee S$$

とはいえない。これは，いま

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad S=R$$

とおけば

$$\overline{R'}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であって，$T=T'$，$R \wedge T \leqq S$であるが，$T \leqq \overline{R'} \vee S$とはならないことからわかる。

[性質20]　$(R \wedge T)'=R \wedge T$，$T'=T$のとき次の条件はすべて同値である。

(a)　$R \wedge T \leqq S$

(b)　(1)　$R' \wedge T \leqq S$

(2)　$R' \wedge T \leqq R \wedge S$

(3)　$R' \wedge T \leqq R \wedge S'$

(4)　$R' \wedge T \leqq R' \wedge S$

(5)　$R' \wedge T \leqq \triangledown S$

(6)　$R' \wedge T \leqq S \wedge T$

(7)　$R' \wedge T \leqq S \wedge \nabla R$

(8)　$R' \wedge T \leqq S' \wedge \nabla R$

(9)　$R' \wedge T \leqq R \wedge \nabla S$

(10)　$R' \wedge T \leqq R' \wedge \nabla S$

(11)　$R' \wedge T = R \wedge S \wedge T$

(12)　$R' \wedge T = R \wedge S' \wedge T$

(13)　$R' \wedge T = R' \wedge S \wedge T$

(14)　$R' \wedge T \leqq T \wedge \nabla S$

(15)　$R' \wedge T \leqq \nabla (R \wedge S)$

(16)　$R' \wedge T = S \wedge T \wedge \nabla R$

(17)　$R' \wedge T = S' \wedge T \wedge \nabla R$

(18)　$R' \wedge T = R \wedge T \wedge \nabla S$

(19)　$R' \wedge T = R' \wedge T \wedge \nabla S$

(20)　$R' \wedge T = T \wedge \nabla (R \wedge S)$

(c)　(1)　$T \leqq \overline{R'} \vee S$

(2)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S)$

(3)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S')$

(4)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge S)$

(5)　$T \leqq \overline{R'} \vee \nabla S$

(6)　$T \leqq \overline{R'} \vee (S \wedge T)$

(7)　$T \leqq \overline{R'} \vee (S \wedge \nabla R)$

(8)　$T \leqq \overline{R'} \vee (S' \wedge \nabla R)$

(9)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge \nabla S)$

(10)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge \nabla S)$

(11)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S \wedge T)$

(12)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S' \wedge T)$

(13)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge S \wedge T)$

(14)　$T \leqq \overline{R'} \vee (T \wedge \nabla S)$

(15)　$T \leqq \overline{R'} \vee \triangledown(R \wedge S)$

(16)　$T \leqq \overline{R'} \vee (S \wedge T \wedge \triangledown R)$

(17)　$T \leqq \overline{R'} \vee (S' \wedge T \wedge \triangledown R)$

(18)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge T \wedge \triangledown S)$

(19)　$T \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge T \wedge \triangledown S)$

(20)　$T \leqq \overline{R'} \vee (T \wedge \triangledown(R \wedge S))$

(証明)　(a), (b)(7), (b)(15), (b)(16), (b)(20) の同値性だけを示す。(a) と, (b) の他の条件との同値性は,

$$R \wedge T = (R \wedge T)' = R' \wedge T' = R' \wedge T$$

であるから, 性質15, 性質16および$R' \wedge T$の対称性を用いて得られる。また (b) の各条件と対応する (c) の条件との同値性は性質14によって得られる。以下の順番で証明する。

(a) $\Longrightarrow$ (b)(20)　$R \wedge T \leqq S$によって

$$R \wedge T = (R \wedge T) \wedge S = R \wedge S \wedge T$$

$$(R \wedge T)' = (R \wedge S \wedge T)' = R' \wedge S' \wedge T' = R' \wedge S' \wedge T$$

ここで $(R \wedge T)' = R \wedge T$だから

$$R \wedge T = R' \wedge S' \wedge T$$

$$(R \wedge T) \wedge (R \wedge T) = (R \wedge S \wedge T) \wedge (R' \wedge S' \wedge T)$$

$$R \wedge T = R \wedge R' \wedge S \wedge S' \wedge T$$

また$R \wedge T = R' \wedge T$だから

$$R' \wedge T = R \wedge R' \wedge S \wedge S' \wedge T = T \wedge (R \wedge S) \wedge (R \wedge S)' = T \wedge \triangledown(R \wedge S)$$

(b)(20) $\Longrightarrow$ (b)(15) $\Longrightarrow$ (b)(7)

$$R' \wedge T = T \wedge \triangledown(R \wedge S) \leqq \triangledown(R \wedge S) \leqq S \wedge \triangledown R$$

(b)(20) $\Longrightarrow$ (b)(16) $\Longrightarrow$ (b)(7)

$$R' \wedge T = T \wedge \triangledown(R \wedge S) \leqq S \wedge T \wedge \triangledown R \leqq S \wedge \triangledown R$$

(b)(7) $\Longrightarrow$ (a)

$$R \wedge T = R' \wedge T \leqq S \wedge \triangledown R \leqq S$$　(証明終)

[性質21]　次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I \leqq S$

(2)　$I \leqq \overline{R'} \vee S$

(3)　$I \leqq \overline{R'} \vee S'$

(4)　$I \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S)$

(5)　$I \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S')$

(6)　$I \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge S)$

(7)　$I \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge S')$

(8)　$I \leqq \overline{R'} \vee \triangledown S$

(9)　$I \leqq \overline{R'} \vee (S \wedge I)$

(10)　$I \leqq \overline{R'} \vee (S \wedge \triangledown R)$

(11)　$I \leqq \overline{R'} \vee (S' \wedge \triangledown R)$

(12)　$I \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge \triangledown S)$

(13)　$I \leqq \overline{R'} \vee (R' \wedge \triangledown S)$

(14)　$I \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge S \wedge I)$

(15)　$I \leqq \overline{R'} \vee \triangledown (R \wedge S)$

(証明)　(3), (7) は性質19による。その他のものは，$(R \wedge I)' = R \wedge I$ かつ$I' = I$ であるから，性質20において $T = I$ とおけばよい。

(証明終)

上記の性質に関して，一般に

$$R' \wedge I = R \wedge I = I \wedge \triangledown R$$

$$S' \wedge I = S \wedge I = I \wedge \triangledown S$$

であり，また

$$\begin{aligned} R \wedge S \wedge I &= R \wedge S' \wedge I \\ &= R' \wedge S \wedge I \\ &= R' \wedge S' \wedge I \\ &= S \wedge I \wedge \triangledown R \\ &= S' \wedge I \wedge \triangledown R \end{aligned}$$

$$=R\wedge I\wedge\nabla S$$
$$=R'\wedge I\wedge\nabla S$$
$$=I\wedge\nabla(R\wedge S)$$

となる。

［性質22］　$\overline{R'}\vee\nabla R=\overline{R'}\vee R=\overline{R'}\vee R\vee I$

（証明）　$\overline{R'}\vee\nabla R=\overline{R'}\vee(R\wedge R')$
$$=(\overline{R'}\vee R)\wedge(\overline{R'}\vee R')$$
$$=(\overline{R'}\vee R)\wedge E$$
$$=\overline{R'}\vee R$$

性質8(16)によれば
$$\overline{R'}\vee R=\overline{R'}\vee R\vee I$$
であるから
$$\overline{R'}\vee\nabla R=\overline{R'}\vee R=\overline{R'}\vee R\vee I$$
（証明終）

［性質23］　$\nabla R\leqq S\Longrightarrow I\leqq\overline{R'}\vee S$

（証明）　$R\wedge I\leqq\nabla R$だから，$\nabla R\leqq S$によって$R\wedge I\leqq S$となり，性質21(1)(2)によって$I\leqq\overline{R'}\vee S$となる。（証明終）

なお，この性質の逆はいえない。それは$n=2$，$R=E$，$S=I$とおいてみればわかる。

［性質24］　$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq S\Longrightarrow$すべての$l$（$l=0,1,2,\cdots$）に対して$R^l\leqq\overline{R'}\vee S$

（証明）　(1)　$l\geqq 1$のとき

性質22によって
$$\overline{R'}\vee\nabla R=\overline{R'}\vee R$$
また$R^2\leqq R$から$R^l\leqq R$となるので
$$R^l\leqq R\leqq\overline{R'}\vee R=\overline{R'}\vee\nabla R\leqq\overline{R'}\vee S$$

(2)　$l=0$のとき

性質23によって$I\leqq\overline{R'}\vee S$となるので
$$R^0=I\leqq\overline{R'}\vee S$$
（証明終）

ところで，性質17によれば

$$\nabla R \leqq S \Longleftrightarrow R \leqq \overline{R'} \vee S$$

であるから，上記の証明の（1）はこれを用いておこなうこともできる。

[性質25]　$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq D \leqq I \Longrightarrow$ すべての l ($l=0, 1, 2, \cdots$) に対して $R^l \leqq \overline{R'} \vee D$

(証明)　性質24において $S=D \leqq I$ とおけばよい。　(証明終)

上記の性質中の $D \leqq I$ なる D は対角行列である。いま $D=I$ とすれば

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longrightarrow \text{すべての}\ l\ (l=0, 1, 2, \cdots)\ \text{に対して}\ R^l \leqq \overline{R'} \vee I$$

となる。これはすでに述べた性質13である。さらに $D=O$ とすれば $\nabla R \leqq O$ は $\nabla R=O$ と同値であるから

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R=O \Longrightarrow \text{すべての}\ l\ (l=0, 1, 2, \cdots)\ \text{に対して}\ R^l \leqq \overline{R'}$$

が得られる。これは性質12である。ところで性質２で述べたように

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R=O \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O$$

であるから

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O \Longrightarrow \text{すべての}\ l\ (l=0, 1, 2, \cdots)\ \text{に対して}\ R^l \leqq \overline{R'}$$

も得られる。これはすでに示している性質６である。

[性質26]　次の条件は同値である。

（1）　$R \wedge T \leqq S$

（2）　$R \leqq S \vee \overline{T}$

（3）　$R \wedge T \leqq S \vee \overline{T}$

（4）　$R \vee S \leqq S \vee \overline{T}$

（5）　$R \vee \overline{T} \leqq S \vee \overline{T}$

(証明)　（1）$\Longleftrightarrow$（2）　性質14による。

（2）$\Longrightarrow$（3）　$R \wedge T \leqq R \leqq S \vee \overline{T}$

（2）$\Longrightarrow$（4）　$R \leqq S \vee \overline{T}$

$R \vee S \leqq (S \vee \overline{T}) \vee S = S \vee \overline{T}$

(3) $\Longrightarrow$ (5)　$R \wedge T \leqq S \vee \overline{T}$

$(R \wedge T) \vee \overline{T} \leqq (S \vee \overline{T}) \vee \overline{T}$

$(R \vee \overline{T}) \wedge (T \vee \overline{T}) \leqq S \vee \overline{T}$

$R \vee \overline{T} \leqq S \vee \overline{T}$

(4) $\Longrightarrow$ (2)　$R \leqq R \vee S \leqq S \vee \overline{T}$

(5) $\Longrightarrow$ (2)　$R \leqq R \vee \overline{T} \leqq S \vee \overline{T}$　(証明終)

上の性質26は$R \wedge T \leqq S$と同値な条件を与えているが，$R \wedge T \leqq S$と同値な条件としては性質14や性質15で示されている条件もある。

[性質27]　$R^2 \leqq R$，$R \wedge T \leqq S \Longrightarrow$すべての$k$ ($k = 1, 2, \cdots$) に対して$R^k \leqq \overline{T} \vee S$

(証明)　$R^2 \leqq R$から$R^k \leqq R$となる。また，性質26によって$R \wedge T \leqq S$から$R \leqq \overline{T} \vee S$となる。したがって。

$R^k \leqq R \leqq \overline{T} \vee S$　(証明終)

上の性質27で$k = 0$の場合は一般には成立しない。すなわち，一般には

$R^2 \leqq R$，$R \wedge T \leqq S \Longrightarrow I \leqq \overline{T} \vee S$

とはならない。いま$R = S = O$，$T = E$とおけば，明らかに$R^2 \leqq R$，$R \wedge T \leqq S$であるが，$I \leqq \overline{T} \vee S$とはならない。しかし，以下の性質29で示すように条件に$T \wedge I \leqq S \wedge I$を付加すれば$k = 0$の場合も成立する。

[性質28]　次の条件は同値である。

(1)　$T \wedge I \leqq S \wedge I$

(2)　$T \wedge I \leqq S \wedge T$

(3)　$T \wedge I \leqq S$

(4)　$I \leqq \overline{T} \vee S$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　$T \wedge I \leqq S \wedge I \leqq S$

$(T \wedge I) \wedge T \leqq S \wedge T$

$T \wedge I \leqq S \wedge T$

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$T \wedge I \leqq S \wedge T \leqq S$

(3) $\Longleftrightarrow$ (4)　性質14によって

$T \wedge I \leqq S \Longleftrightarrow I \leqq \overline{T} \vee S$

(4) $\Longrightarrow$ (1)　$I \leqq \overline{T} \vee S$

$(T \wedge I) \wedge I \leqq (T \wedge I) \wedge (\overline{T} \vee S)$

$T \wedge I \leqq T \wedge S \wedge I \leqq S \wedge I$　(証明終)

性質21でRをTとおくと$T \wedge I \leqq S$したがって$T \wedge I \leqq S \wedge I$の同値条件が得られる。

[性質29]　$R^2 \leqq R$，$R \wedge T \leqq S$，$T \wedge I \leqq S \wedge I \Longrightarrow$すべての$l$($l = 0$，1，2，…) に対して$R^l \leqq \overline{T} \vee S$

(証明)　$l \geqq 1$のときは性質27によって$R^l \leqq \overline{T} \vee S$となる。$l = 0$のときは$T \wedge I \leqq S \wedge I$から性質28によって$I \leqq \overline{T} \vee S$となり，

$R^0 = I \leqq \overline{T} \vee S$

が得られる。　(証明終)

[性質30]　$\triangledown R \leqq S \Longrightarrow R \wedge I \leqq S \wedge I$

(証明)　$R \wedge R' \leqq S$

$(R \wedge R') \wedge I \leqq S \wedge I$

$R \wedge I \leqq S \wedge I$　(証明終)

なお，一般には

$R \wedge I \leqq S \wedge I \Longrightarrow \triangledown R \leqq S$

とはいえない。これは$n = 2$，$R = E$，$S = I$とおいてみればわかる。

性質29と上の性質30を用いて，すでに示している性質24を得ることもできる。すなわち，いま性質29において$T = R'$とおけば，

$R^2 \leqq R$，$\triangledown R \leqq S$，$R' \wedge I \leqq S \wedge I \Longrightarrow$すべての$l$($l = 0$，1，2，…) に対して$R^l \leqq \overline{R'} \vee S$

となる。ところで，性質30によれば

$\triangledown R \leqq S \Longrightarrow R \wedge I \leqq S \wedge I$

であり，また明らかに$R \wedge I = R' \wedge I$であるから

$\triangledown R \leqq S \Longrightarrow R' \wedge I \leqq S \wedge I$

となる。したがって，条件中に$\bigtriangledown R \leqq S$があれば$R' \wedge I \leqq S \wedge I$は不要となり，

$$R^2 \leqq R,\ \bigtriangledown R \leqq S \Longrightarrow \text{すべての}l\ (l=0,1,2,\cdots)\text{に対して}R^l \leqq \overline{R'} \vee S$$

が成立することになる。これは性質24である。

4．まとめ

非反射的推移関係に関する若干の初等的な性質を明らかにした。また，与えられた関係行列に関するある種の不等式条件が様々な形の同値条件として表現されることを示した。ここでの結果の大部分はほとんど自明であり，すでに知られていると思われるものも含まれているが，このような同値条件も整理しておくことは有意義であり，いくつかの性質は二項関係に関する議論において有用であると考えられる。本論文で示した性質には，特殊な演算である▽に関するものがいくつかあるが，▽RはRの対称核［9］と呼ばれ，▽の性質は△とともに選好関係の基礎的な考察において本質的な役割を演じている［1，13］。

非反射的推移関係については，さらに考察すべきことがある。例えば，非反射的推移関係の必要十分条件に関しては，まだ考察すべき余地があり，いくつかの新しい形の条件も考えられる。これらについては今後検討をおこない，次の機会に報告したい。

文　献

［1］Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

［2］Carnap, R. "Introduction to Symbolic Logic and its Applications," Dover Publications, New York (1958).

［3］橋本　寛："連結的推移関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第34巻，第3・

4号，pp. 387-405（昭和60年6月）.

[4] 橋本　寛：“連結的推移関係行列の性質II”，山口経済学雑誌，第35巻，第3・4号，pp. 281-293（昭和61年1月）.

[5] 橋本　寛：“変更された推移性と連結的関係行列”，山口経済学雑誌，第39巻，第3・4号，pp. 397-416（平成2年11月）.

[6] 橋本　寛：“反対称的推移関係”，山口経済学雑誌，第41巻，第5・6号，pp. 473-489（平成6年5月）.

[7] 橋本　寛：“反射的な連結的関係に関する若干の性質”，山口経済学雑誌，第44巻，第5・6号，pp. 495-515（平成8年3月）.

[8] 橋本　寛：“非反射的推移関係”，山口経済学雑誌，第46巻，第4号，pp. 479-498（平成10年7月）.

[9] 岩堀信子：“グラフと確率行列”，産業図書（昭和49年10月）.

[10] 柏木芳美：“関係代数的証明”，山口経済学雑誌，第46巻，第3号，pp. 259-269（平成10年5月）.

[11] 小野寛晰：“情報代数”，共立出版（1994年2月）.

[12] Peirce, C. S.: “The logic of relatives,” in Hartshorne, C. and Weiss, P. (eds.): Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Vol. III, pp. 195-209, The Belknap Press of Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. (1961).

[13] Roubens, M. and Vincke, P.: “Preference Modelling,” Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[14] Schmidt, G. and Ströhlein, T.: “Relations and Graphs,” Springer-Verlag, Berlin (1993).

[15] Schröder, E.: “Algebra der Logik. Vol. III,” Teubner, Leipzig (1895) (Chelsea Publ. Co., New York, 1966).