反射的な連結的関係に関する若干の性質

橋　本　　　寛

1．はじめに

反射的で連結的な２項関係について，ブール行列を用いて考察をおこない，この関係の初等的な性質およびこれに関するいくつかの性質を明らかにしている。すなわち，一般に２項関係は０，１の要素を持つブール行列によって表現できるので，[11] ブール行列に関する演算および記法を用いて，その関係の性質を詳細に調べることができ，かつまたそれを適切に表現することができる。とくに本論文では，与えられた関係が反射的な連結的関係となるための必要十分条件，反射的でかつ連結的な条件のもとでの推移関係に関する同値条件，また推移性に関する同値条件，さらには与えられた関係が連結的な反対称的推移関係となるための条件などを中心に示している。もちろん，これらの関係の性質を対応するブール行列すなわち関係行列の性質として表現しかつ考察をおこなっているわけである。

反射的な連結的関係は種々の応用分野において出現し重要な役割を演じている。とくに連結性はトーナメントや選好関係の議論において本質的なものである。[1),2),12)] 関係の連結性に関しては，これまでにも伝統的な関係論理学等において考察がおこなわれており，多数の基本的な性質が知られている。[13),14),15)] また，この連結性は推移性や反対称性と密接な関連をもっており，連結性のもとでの推移性に関する興味深い性質はよく知られている。[2),12)] なお，本論文では関係行列に関する推移性の特別な場合であるべき等性について

もその若干の性質を示している。

2．定義

関係を0，1の要素をもつブール行列によって表現する。ブール行列に関する演算や記法は文献(3)などに従うものとするが，主なものを示せば次のとおりである。n次ブール行列$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$に対して

$$R \vee S=[r_{ij} \vee s_{ij}]=[\max(r_{ij}, s_{ij})]$$
$$R \wedge S=[r_{ij} \wedge s_{ij}]=[\min(r_{ij}, s_{ij})]$$
$$R \times S=[(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$$
$$R^{\ell+1}=R^{\ell} \times R\ (\ell=1,\ 2,\ \cdots),\ R^1=R$$
$$R'=[r_{ji}]$$
$$\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]=[1-r_{ij}]$$
$$\nabla R=R \wedge R'$$

と定める。また$I=[\delta_{ij}]$で単位行列，Oで零行列，Eで全要素が1の行列を示す。

なお，$R \vee R' \vee I=E$なるRは連結的，$I \leqq R$なるRは反射的，$\nabla R \leqq I$なるRは反対称的，$R^2 \leqq R$なるRは推移的といわれる。[11),15)] したがって反射的な連結的関係は$R \vee R' \vee I=E$かつ$I \leqq R$なるブール行列Rで表現される。ところで$R \vee R' \vee I=E$かつ$I \leqq R$なる条件は$R \vee R'=E$として，まとめて表わされるので，結局本論文ではこの$R \vee R'=E$なるRについて考察をおこなっていることになる。

3．結果

まず$R \vee R'=E$に関するいくつかの基本的な同値条件を示す。これらはほとんど自明であり，また一部はすでに知られている。[3), 6), 13)]

[性質1]次の条件は同値である。

(1)　$R \vee R' = E$

(2)　$R \vee \overline{R'} = R$

(3)　すべてのℓ（$\ell = 1, 2, \cdots$）に対して$R \vee \overline{R'} \leqq R^{\ell}$

(4)　$\overline{R'} \vee I \leqq R$

(5)　すべてのℓ（$\ell = 1, 2, \cdots$）に対して$\overline{R'} \vee I \leqq R^{\ell}$

(6)　$\overline{R'} \leqq R$

(7)　すべてのℓ（$\ell = 1, 2, \cdots$）に対して$\overline{R'} \leqq R^{\ell}$

（証明）　(1)⇒(2)

$$
\begin{aligned}
R \vee \overline{R'} &= (R \vee \overline{R'}) \wedge E \\
&= (R \vee \overline{R'}) \wedge (R \vee R') \\
&= R
\end{aligned}
$$

(2)　⇒(3)一般に$I \leqq R \vee \overline{R'}$だから$I \leqq R$となり$R \leqq R^{\ell}$となる。したがって$R \vee \overline{R'} = R \leqq R^{\ell}$。

(3)　⇒(4) $\ell = 1$のとき$R \vee \overline{R'} \leqq R$。また$I \leqq R \vee \overline{R'}$であるから$I \leqq R$。よって

$$\overline{R'} \vee I \leqq R \vee \overline{R'} \leqq R$$

(4)　⇒(5) $I \leqq R$だから$R \leqq R^{\ell}$。よって

$$\overline{R'} \vee I \leqq R \leqq R^{\ell}$$

(5)　⇒(6) $\ell = 1$のとき$\overline{R'} \vee I \leqq R$。よって

$$\overline{R'} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R$$

(6)　⇒(7) $\overline{R'} \leqq R$のとき$I \leqq R$であるから$R \leqq R^{\ell}$となり，$\overline{R'} \leqq R \leqq R^{\ell}$となる。

(7)　⇒(1) $\ell = 1$のとき$\overline{R'} \leqq R$。したがって

$$
\begin{aligned}
\overline{R'} \vee R' &\leqq R \vee R' \\
E &\leqq R \vee R'
\end{aligned}
$$

となり，$R \vee R' = E$が得られる。　（証明終）

上の性質の(4)，(1)から

$$\overline{R'} \vee I \leqq R \Longleftrightarrow R \vee R' = E$$

となるが，$\overline{R'} \vee I \leqq R$を$\overline{R'} \vee I = R$とすると次の性質が成立する。

［性質2］[9)]

$\overline{R'} \vee I = R \Longleftrightarrow R \vee R' = E,\ \nabla R = I$

［性質3］

$R \wedge \overline{I} = \overline{R'} \Longleftrightarrow R \vee R' = E,\ \nabla R = I$

(証明)　性質2による。　(証明終)

［性質4］

(1)　$(R \wedge \overline{I}) \vee R' = R \vee R'$

(2)　$R \vee (R' \wedge \overline{I}) = R \vee R'$

(証明)　(1)$(R \wedge \overline{I}) \vee R' = (R \wedge \overline{I}) \vee (R' \wedge I) \vee R'$

$= (R \wedge \overline{I}) \vee (R \wedge I) \vee R'$

$= R \vee R'$

(2)　(1)による。　(証明終)

［性質5］次の条件は同値である。

(1)　$R \vee R' = E$

(2)　$(R \wedge \overline{I}) \vee R' = E$

(3)　$R \vee (R' \wedge \overline{I}) = E$

(証明)　性質4による。　(証明終)

［性質6］

$R \vee R' = E \Longleftrightarrow R = R \vee \overline{R'} = R \vee \overline{R'} \vee I$

(証明)　性質1によって

$R \vee R' = E \Longleftrightarrow R = R \vee \overline{R'}$

ところで，一般に

$R \vee \overline{R'} = R \vee \overline{R'} \vee I$

であるから

$R \vee R' = E \Longleftrightarrow R = R \vee \overline{R'} = R \vee \overline{R'} \vee I$　(証明終)

［性質7］$R \vee R' = E$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　$R^2 \leqq R \vee \overline{R'}$

(3)　$R^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(4)　$R^2 = R$

(5)　$R^2 = R \vee \overline{R'}$

(6)　$R^2 = R \vee \overline{R'} \vee I$

(証明)　$R \vee R' = E$のとき性質6によって

$$R = R \vee \overline{R'} = R \vee \overline{R'} \vee I$$

となる。また一般に$I \leqq R$のとき

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow R^2 = R$$

であるから(1)−(6)は同値である。　(証明終)

[性質8][8)]

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$$

[性質9]

$$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$$

(証明)　(1)$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$のとき

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$$

したがって性質8によって$R^2 \leqq R$

(2)　$R^2 \leqq R$のとき

$$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R^2 \leqq R$$

(証明終)

[性質10]

$$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$$

(証明)　(1)$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R$のとき

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq (R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R$$

したがって性質8によって$R^2 \leqq R$

(2)　$R^2 \leqq R$のとき

$$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R^2 \leqq R$$

(証明終)

[性質11]次の条件は同値である。

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R$

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$

(3)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R$

(4)　$R^2 \leqq R$

(証明)　性質8，性質9，性質10による。　(証明終)

なお，上の性質に関連して次の性質の成立することが知られている。

[性質12][5),8)]次の条件は同値である。

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$

(3)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R \wedge \overline{I}$

(4)　$R^2 \leqq R$，$\nabla R \leqq I$

次の交換可能性に関する性質はほとんど明らかであり，またよく知られていると思われるが，以下において使用するので，念のため証明を与える。

[性質13]すべてのi，j ($i=1, 2, \cdots, \ell$；$j=1, 2, \cdots, m$)に対して$R_i \times S_j = S_j \times R_i$のとき

$$(R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_\ell) \times (S_1 \vee S_2 \vee \cdots \vee S_m)$$
$$= (S_1 \vee S_2 \vee \cdots \vee S_m) \times (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_\ell)$$

(証明)　$(R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_\ell) \times (S_1 \vee S_2 \vee \cdots \vee S_m)$

$$= R_1 \times S_1 \vee R_1 \times S_2 \vee \cdots \vee R_1 \times S_m$$
$$\vee R_2 \times S_1 \vee R_2 \times S_2 \vee \cdots \vee R_2 \times S_m$$
$$\cdots\cdots$$
$$\vee R_\ell \times S_1 \vee R_\ell \times S_2 \vee \cdots \vee R_\ell \times S_m$$
$$= S_1 \times R_1 \vee S_2 \times R_1 \vee \cdots \vee S_m \times R_1$$
$$\vee S_1 \times R_2 \vee S_2 \times R_2 \vee \cdots \vee S_m \times R_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\vee S_1 \times R_\ell \vee S_2 \times R_\ell \vee \cdots \vee S_m \times R_\ell$$
$$= S_1 \times R_1 \vee S_1 \times R_2 \vee \cdots \vee S_1 \times R_\ell$$
$$\vee S_2 \times R_1 \vee S_2 \times R_2 \vee \cdots \vee S_2 \times R_\ell$$
$$\cdots\cdots$$

$$\vee S_m \times R_1 \vee S_m \times R_2 \vee \cdots \vee S_m \times R_\ell$$
$$= (S_1 \vee S_2 \vee \cdots \vee S_m) \times (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_\ell)$$
(証明終)

[性質14] $S \times R = R \times S$，$T \times R = R \times T$ のとき

$$(S \vee T) \times R = R \times (S \vee T)$$

(証明)　性質13による。　(証明終)

[性質15]

$$(I \vee R) \times R = R \times (I \vee R)$$

(証明)　性質14による。　(証明終)

この性質15に関連して，以下の等式の成立することも容易にわかる。

$$(I \vee R \vee \cdots \vee R^\ell) \times R = R \times (I \vee R \vee \cdots \vee R^\ell)$$
$$(\ell = 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$(I \vee R \vee \cdots \vee R^\ell) \times (I \vee R \vee \cdots \vee R^m)$$
$$= (I \vee R \vee \cdots \vee R^m) \times (I \vee R \vee \cdots \vee R^\ell)$$
$$(m = 1,\ 2,\ \cdots)$$

[性質16]

$$(I \vee R) \times (R \wedge \overline{I}) = (R \wedge \overline{I}) \times (I \vee R)$$

(証明)　性質15によって

$$(I \vee (R \wedge \overline{I})) \times (R \wedge \overline{I}) = (R \wedge \overline{I}) \times (I \vee (R \wedge \overline{I}))$$

したがって

$$(I \vee R) \times (R \wedge \overline{I}) = (R \wedge \overline{I}) \times (I \vee R)$$
(証明終)

[性質17] $I \leqq R$ のとき

$$R \times (R \wedge \overline{I}) = (R \wedge \overline{I}) \times R$$

(証明)　性質16による。　(証明終)

[例1]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$R \wedge \overline{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R \times (R \wedge \overline{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R \wedge \overline{I}) \times R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であって$R \times (R \wedge \overline{I}) = (R \wedge \overline{I}) \times R$となる。

しかし，この等式は$I \leqq R$でなければ成立するとは限らない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$R \wedge \overline{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R \times (R \wedge \overline{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R \wedge \overline{I}) \times R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq R \times (R \wedge \overline{I})$$

となり，$R \times (R \wedge \overline{I})$と$(R \wedge \overline{I}) \times R$とは等しくない。

[性質18] $R \vee R' = E$のとき次の条件は同値である。

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(3)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(4)　$R^2 = R$

(証明)　性質6および性質11による。　(証明終)

この性質18に関連して次の性質が知られている。とくに，上の性質の(1), (4)は次の性質の(3), (4), (5)の特別な場合となっている。

[性質19][6),10)]　$R \vee R' = E$のとき次の条件は同値である。

(1)　あるℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$)に対して$(R \wedge \overline{I})^{3\ell-1} \leqq R$

(2)　すべてのℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$)に対して$(R \wedge \overline{I})^{3\ell-1} \leqq R$

(3)　あるℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$)に対して$(R \wedge \overline{I})^{3\ell-1} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(4)　すべてのℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$)に対して$(R \wedge \overline{I})^{3\ell-1} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(5)　$R^2 = R$

[性質20] $R \wedge \overline{I} \leqq S$のとき

$$S^2 \leqq \overline{R'} \Rightarrow R \times S \leqq \overline{R'}$$

(証明)　$r_{ik} = s_{kj} = 1$とおき，$\overline{r}_{ji} = 1$となることを示す。

(1)　$i \neq k$のとき

$R \wedge \overline{I} \leqq S$によって$s_{ik} = 1$。したがって$S^2 \leqq \overline{R'}$によって$\overline{r}_{ji} = 1$。

(2)　$i = k$，$i \neq j$のとき

$r_{ii} = s_{ij} = 1$ ($i \neq j$)。いま$r_{ji} = 1$とすれば，$R \wedge \overline{I} \leqq S$から$s_{ji} = 1$となり，$S^2 \leqq \overline{R'}$によって$\overline{r}_{ii} = 1$となる。しかし，これは矛盾する。したがって$r_{ji} = 0$すなわち$\overline{r}_{ji} = 1$となる。

(3)　$i = k$，$i = j$のとき

$r_{ii} = s_{ii} = 1$となり，$S^2 \leqq \overline{R'}$によって$\overline{r}_{ii} = 1$。しかし，これは矛盾する。したがって，この場合はありえない。　(証明終)

なお，$R \wedge \overline{I} \leqq S$のとき，$R \times S \leqq \overline{R'} \Rightarrow S^2 \leqq \overline{R'}$とはいえない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$\overline{R'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R \times S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であって，$R \wedge \overline{I} \leqq S$かつ$R \times S \leqq \overline{R'}$となるが$S^2 \leqq \overline{R'}$とはならない。

[性質21]

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'}$$

(証明)　(1)$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$のとき

性質20において$S=R\wedge\overline{I}$とおくことにより$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}$。

(2)　$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}$のとき

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}$　(証明終)

[性質22] $R\wedge\overline{I}\leqq S$のとき

$S^2\leqq\overline{R'}\Rightarrow S\times R\leqq\overline{R'}$

(証明)　$s_{ik}=r_{kj}=1$とおき，$\overline{r}_{ji}=1$となることを示す。

(1)　$k\neq j$のとき

$R\wedge\overline{I}\leqq S$によって$s_{kj}=1$。したがって$S^2\leqq\overline{R'}$によって$\overline{r}_{ji}=1$

(2)　$k=j$，$i\neq j$のとき

$s_{ij}=r_{jj}=1\ (i\neq j)$。いま$r_{ji}=1$とすれば$R\wedge\overline{I}\leqq S$から$s_{ji}=1$となり，$S^2\leqq\overline{R'}$によって$\overline{r}_{jj}=1$となる。しかし，これは矛盾する。したがって$r_{ji}=0$すなわち$\overline{r}_{ji}=1$となる。

(3)　$k=j$，$i=j$のとき

$s_{ii}=r_{ii}=1$。$S^2\leqq\overline{R'}$によって$\overline{r}_{ii}=1$。しかし，これは矛盾するので，この場合はありえない。　(証明終)

[性質23]

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\Longleftrightarrow(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}$

(証明)　(1)$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$のとき

性質22において$S=R\wedge\overline{I}$とおくことにより$(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}$

(2)　$(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}$のとき

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}$　(証明終)

[性質24]

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\Longleftrightarrow R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}\vee I$

(証明)　(1)$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$のとき

性質21によって$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}\leqq\overline{R'}\vee I$。

(2)　$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}\vee I$のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1\ (i\neq k,\ k\neq j)$とおき$\overline{r}_{ji}=1$となることを示す。

(a)　$i \neq j$ のとき

$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I$ によって $\overline{r}_{ji} \vee \delta_{ij} = 1$ となり，いま $i \neq j$ だから $\overline{r}_{ji} = 1$ となる。

(b)　$i = j$ のとき

$r_{ik} = r_{ki} = 1\ (i \neq k)$。いま，もし $r_{ii} = 1$ とすれば $r_{ii} \wedge r_{ik} = 1$ によって $\overline{r}_{ki} \vee \delta_{ik} = 1$ となり，$i \neq k$ だから $\overline{r}_{ki} = 1$ となる。しかし，これは矛盾する。したがって $r_{ii} = 0$ すなわち $\overline{r}_{ii} = 1$ となる。　(証明終)

[性質25]

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I$$

(証明)　(1) $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'}$ のとき

性質23によって $(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \leqq \overline{R'} \vee I$

(2)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I$ のとき

$r_{ik} = r_{kj} = 1\ (i \neq k,\ k \neq j)$ とおき $\overline{r}_{ji} = 1$ となることを示す。

(a)　$i \neq j$ のとき

$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I$ によって $\overline{r}_{ji} \vee \delta_{ij} = 1$ となり，いま $i \neq j$ だから $\overline{r}_{ji} = 1$ となる。

(b)　$i = j$ のとき

$r_{ik} = r_{ki} = 1\ (i \neq k)$。いま，もし $r_{ii} = 1$ とすれば $r_{ki} \wedge r_{ii} = 1$ によって $\overline{r}_{ik} \vee \delta_{ki} = 1$ となり，$i \neq k$ だから $\overline{r}_{ik} = 1$ となる。しかし，これは矛盾する。したがって $r_{ii} = 0$ すなわち $\overline{r}_{ii} = 1$ となる。　(証明終)

[性質26]

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$$

(証明)　(1) $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'}$ のとき

$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき，$\overline{r}_{ji} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$i = j$ のときは明らかであるから $i \neq j$ とする。

(a)　$i \neq k,\ k \neq j$ のとき

$\overline{r}_{ji} = 1$ したがって $\overline{r}_{ji} \vee \delta_{ij} = 1$。

(b)　$i = k$ のとき

$r_{ii}=r_{ij}=1$。もし$r_{ji}=1$ならば，$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$によって$r_{ii}=0$。しかし，これは矛盾するので$r_{ji}=0$すなわち$\overline{r}_{ji}=1$となる。

(c)　$k=j$のとき

$r_{ij}=r_{jj}=1$。もし$r_{ji}=1$ならば，$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$によって$r_{jj}=0$。しかし，これは矛盾するので$r_{ji}=0$すなわち$\overline{r}_{ji}=1$となる。

(2)　$R^2\leqq\overline{R'}\vee I$のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1\ (i\neq k,\ k\neq j)$とおき，$\overline{r}_{ji}=1$となることを示す。$i\neq j$のときは$R^2\leqq\overline{R'}\vee I$によって$\overline{r}_{ji}=1$となるので$i=j$とする。このとき$r_{ik}=r_{ki}=1\ (i\neq k)$となる。もし$r_{ii}=1$とすれば$r_{ii}\wedge r_{ik}=1$によって$\overline{r}_{ki}\vee\delta_{ik}=1$となり，$i\neq k$だから$\overline{r}_{ki}=1$となる。しかし，これは矛盾する。したがって$r_{ii}=0$すなわち$\overline{r}_{ii}=1$となる。　(証明終)

[性質27]次の条件は同値である。

(1)　$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$

(2)　$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}$

(3)　$(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}$

(4)　$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}\vee I$

(5)　$(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}\vee I$

(6)　$R^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(証明)　性質21，性質23，性質24，性質25，性質26による。　(証明終)

なお，上の性質の(1)に関して，一般には

$$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I\Rightarrow(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$$

とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

とおけば，$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$であるけれども$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}$とはならない。

次に示すように，上の性質27の各条件は$R\vee R'=E$のもとでは，$R^2=R$かつ$\triangledown R=I$と同値な条件となる。

[性質28][7)]　$R \vee R' = E$ のとき，次の条件は同値である。

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'}$

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'}$

(3)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'}$

(4)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I$

(5)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I$

(6)　$R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(7)　$R^2 = R$，$\triangledown R = I$

なお，上の性質28の(1)に関連して，次の命題

$$R \vee R' = E,\ (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Rightarrow \triangledown R = I$$

は，一般には成立しない。このことは

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおいてみればわかる。しかし，次の性質

$$R \vee R' = E,\ (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Rightarrow R^2 = R$$

は成立する。これは性質18(1)，(4)の特別な場合となっている。

[性質29][8)]

$$R \vee R' = E,\ R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R \times (R \wedge \overline{I}) = \overline{R'} = R \wedge \overline{I}$$

[性質30][8)]

$$R \vee R' = E,\ (R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I}) \times R = \overline{R'} = R \wedge \overline{I}$$

[性質31] $R \vee R' = E$ のとき

$$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow R \times (R \wedge \overline{I}) = \overline{R'}$$

(証明)　(1) $R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'}$ のとき

性質29によって $R \times (R \wedge \overline{I}) = \overline{R'}$。

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) = \overline{R'}$ のとき

明らかに $R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'}$。　(証明終)

[性質32] $R \vee R' = E$ のとき

$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I}) \times R = \overline{R'}$

（証明）　性質17と性質31による。　（証明終）

[性質33] $R \vee R' = E$のとき

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R'} \vee I \Rightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \leqq R$

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I \Rightarrow R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$

(3)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I \Rightarrow (R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R$

（証明）　(1)性質18の(1), (4)によって$R^2 = R$だから

$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R^2 = R$

(2)　性質18の(2), (4)によって$R^2 = R$だから

$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R^2 = R$

(3)　性質18の(3), (4)によって$R^2 = R$だから

$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R^2 = R$　（証明終）

[性質34]

$R \times S \leqq R \wedge \overline{I} \leqq S \Rightarrow R \times S \leqq \overline{R'}$

（証明）　$r_{ik} = s_{kj} = 1$とおき$r_{ji} = 0$となることを示す。このとき$R \times S \leqq R \wedge \overline{I}$によって$r_{ij} = 1$, $i \neq j$。いま，もし$r_{ji} = 1$とすれば$R \wedge \overline{I} \leqq S$によって$s_{ji} = 1$。したがって$R \times S \leqq R \wedge \overline{I}$によって$R \wedge \overline{I}$の$(i, i)$要素は1となる。しかし，これは矛盾するので，$r_{ji} = 0$でなければならない。

（証明終）

[例2]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおく。このとき

$$R \times S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R \wedge \overline{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R'}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

であって，$R\times S\leqq R\wedge\overline{I}\leqq S$でかつ$R\times S\leqq\overline{R'}$となる。

［性質35］

(1)　$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}\Rightarrow R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}$

(2)　$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}\Rightarrow R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}$

（証明）(1) $r_{ik}=r_{kj}=1\ (k\neq j)$とおき，$r_{ji}=0$となることを示す。もし$i=j$ならば$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$によって$R\wedge\overline{I}$の$(i, i)$要素は1となり，これは矛盾するので，$i\neq j$となる。いま$r_{ji}=1$とすれば，$r_{kj}=1$であること，および$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$によって$r_{ki}=1$，$k\neq i$となる。したがって$r_{ik}=1$と$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$を用いて$R\wedge\overline{I}$の$(i, i)$要素が1となるが，これは矛盾するので，$r_{ji}=0$となる。

(2)　(1)による。　（証明終）

上の性質35の(2)は性質34からも得られる。

［性質36］

$S\times R\leqq R\wedge\overline{I}\leqq S\Rightarrow S\times R\leqq\overline{R'}$

（証明）　$s_{ik}=r_{kj}=1$とおき$r_{ji}=0$となることを示す。このとき$S\times R\leqq R\wedge\overline{I}$によって$r_{ij}=1$，$i\neq j$。いま，もし$r_{ji}=1$とすれば$R\wedge\overline{I}\leqq S$によって$s_{ji}=1$。よって$S\times R\leqq R\wedge\overline{I}$から$R\wedge\overline{I}$の$(j, j)$要素は1となるが，これは矛盾するので，$r_{ji}=0$となる。　（証明終）

［性質37］

(1)　$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}\Rightarrow(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}$

(2)　$(R\wedge\overline{I})\times R\leqq R\wedge\overline{I}\Rightarrow(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\overline{R'}$

（証明）(1) $r_{ik}=r_{kj}=1\ (i\neq k)$とおき$r_{ji}=0$となることを示す。もし$i=j$ならば$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$によって$R\wedge\overline{I}$の$(i, i)$要素は1となり，これは矛盾するので，$i\neq j$となる。いま$r_{ji}=1$とすれば，$r_{ik}=1$であること，および$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$によって$r_{jk}=1$，$j\neq k$となる。したがって$r_{kj}=1$と$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$を用いて$R\wedge\overline{I}$の$(j, j)$要素が1と

なるが，これは矛盾するので，$r_{ji}=0$ となる。

(2)　(1)による。　(証明終)

上の性質37の(2)は性質36からも得られる。

[性質38][4)]

$R^2 \leqq R$，$\triangledown R \leqq I \Rightarrow$ すべての ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して

$$R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$$

[性質39]

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I} \Rightarrow$ すべての ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して

$$R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$$

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I} \Rightarrow$ すべての ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して

$$R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$$

(3)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R \wedge \overline{I} \Rightarrow$ すべての ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して

$$R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$$

(証明)　性質12および性質38による。　(証明終)

[性質40]

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I} \Rightarrow R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(2)　$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I} \Rightarrow R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(3)　$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R \wedge \overline{I} \Rightarrow R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　性質39による。　(証明終)

[性質41]次の条件は同値である

(1)　$R \times (R \wedge \overline{I}) = R \wedge \overline{I} = \overline{R'}$

(2)　$(R \wedge \overline{I}) \times R = R \wedge \overline{I} = \overline{R'}$

(3)　$R \vee R' = E$，$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I$

(4)　$R \vee R' = E$，$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq \overline{R'} \vee I$

(5)　$R \vee R' = E$，$\triangledown R = I$，$R^2 = R$

(証明)　(1)$\Longleftrightarrow$(3)性質29と性質28による。

(2)　$\Longleftrightarrow$(4)性質30と性質28による。

(3)　$\Longleftrightarrow$(4)性質28による。

(4)　$\Longleftrightarrow$(5)性質28による。　(証明終)

上記の性質41に関して，すでに性質3で示しているように

$$R \wedge \overline{I} = \overline{R'} \Longleftrightarrow R \vee R' = E,\ \nabla R = I$$

が成立する。また次の性質42，性質43で示すように

$$R \times (R \wedge \overline{I}) = R \wedge \overline{I} \Rightarrow R^2 = R,\ \nabla R \leqq I$$

$$(R \wedge \overline{I}) \times R = R \wedge \overline{I} \Rightarrow R^2 = R,\ \nabla R \leqq I$$

が成立する。

[性質42]

$$R \times (R \wedge \overline{I}) = R \wedge \overline{I} \Rightarrow R^2 = R,\ \nabla R \leqq I$$

(証明)　性質12によって$R^2 \leqq R$, $\nabla R \leqq I$となるので$R \leqq R^2$を示す。すなわち$r_{ij} = 1$とおき$r_{ij}^{(2)} = 1$となることを示す。$i = j$のときは明らかであるから$i \neq j$とする。このとき$R \times (R \wedge \overline{I}) = R \wedge \overline{I}$によってある$k$に対して$r_{ik} = r_{kj} = 1$ $(k \neq j)$となる。したがって$r_{ij}^{(2)} = 1$となる。こうして$R^2 = R$となる。　(証明終)

なお，上の性質42の逆は成立しない。すなわち，一般には

$$R^2 = R,\ \nabla R \leqq I \Rightarrow R \times (R \wedge \overline{I}) = R \wedge \overline{I}$$

とはいえない。たとえば，いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$R \wedge \overline{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \nabla R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leqq I$$

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R$$

$$R \times (R \wedge \overline{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり，$R \times (R \wedge \overline{I})$と$R \wedge \overline{I}$とは等しくない。

しかし

$$R^2=R,\ \nabla R\leqq I\Rightarrow R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}$$

は成立する。これは，すでに性質12で示しているように，一般に

$$R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I\Longleftrightarrow R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}$$

となることから明らかである。また，あとの性質45で示すように

$$R^2\leqq R,\ \nabla R=I\Rightarrow R\times(R\wedge\overline{I})=R\wedge\overline{I}$$

が成立する。

[性質43]

$$(R\wedge\overline{I})\times R=R\wedge\overline{I}\Rightarrow R^2=R,\ \nabla R\leqq I$$

(証明)　性質12によって$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I$となるので，$R\leqq R^2$を示す。すなわち$r_{ij}=1$とおき$r_{ij}^{(2)}=1$となることを示す。$i=j$のときは明らかであるから$i\neq j$とする。このとき$(R\wedge\overline{I})\times R=R\wedge\overline{I}$によってある$k$に対し$r_{ik}=r_{kj}=1$ $(i\neq k)$となる。したがって$r_{ij}^{(2)}=1$となる。こうして$R^2=R$となる。　(証明終)

[性質44]

$$R\vee R'=E,\ R^2=R,\ \nabla R=I\Longleftrightarrow R\times(R\wedge\overline{I})=(R\wedge\overline{I})\times R=\overline{R'}=R\wedge\overline{I}$$

(証明)　性質41による。　(証明終)

なお，上の性質に関して

$$R\times(R\wedge\overline{I})=(R\wedge\overline{I})\times R=\overline{R'}\Rightarrow R\vee R'\vee I=E$$

となるとは限らない。いま

$$R=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

とおけば

$$R\wedge\overline{I}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \overline{R'}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$R\times(R\wedge\overline{I})=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=(R\wedge\overline{I})\times R=\overline{R'}$$

であるが，しかし$R\vee R'\vee I=E$とはならない。もちろん$R\vee R'=E$ともならない。

[性質45]

$$R^2\leqq R,\ \triangledown R=I\Rightarrow R\times(R\wedge\overline{I})=(R\wedge\overline{I})\times R=R\wedge\overline{I}$$

(証明)　性質12によって$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}$。また$I\leqq R$だから$R\times(R\wedge\overline{I})\geqq R\wedge\overline{I}$。したがって$R\times(R\wedge\overline{I})=R\wedge\overline{I}$。また性質17によって$R\times(R\wedge\overline{I})=(R\wedge\overline{I})\times R$となるから

$$R\times(R\wedge\overline{I})=(R\wedge\overline{I})\times R=R\wedge\overline{I}$$ (証明終)

なお，$R\times(R\wedge\overline{I})=(R\wedge\overline{I})\times R=R\wedge\overline{I}$のとき，性質42(または性質43)によって$R^2=R$かつ$\triangledown R\leqq I$となる。しかし$\triangledown R=I$とはいえない。例えば，いま

$$R=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

とおけば，$R\times(R\wedge\overline{I})=(R\wedge\overline{I})\times R=R\wedge\overline{I}$となるが，$\triangledown R=I$とはならない。

4．まとめ

反射的な連結的関係の基本的な性質およびそれに付随する若干の性質を明らかにした。また，推移性の特別な場合であるべき等性についてもいくつかの結果を示すことができた。本論文で得られた関係の性質には，ほと

んど自明のものも含まれているが，いくつかのものは従来一般には余り知られていない性質のように思われる。関係の反射的な連結性は，よく知られているように，いわゆる順序とくに全順序の議論においても重要であるので，この連結性について考察をおこなうことは有意義であると考えられる。

連結的関係は，本論文中においても明らかなように，推移関係と密接な関連があり，ここで示された性質に関連する性質として，またはそれらの性質の特別な場合として，推移性に関する多数の興味ある性質が得られる。これらのいくつかの性質は反射的推移関係および非反射的推移関係に関する性質であるが，これらの性質については次の機会に報告することにしたい。さらに，今後の課題として，関係の一つの表現形式である有向グラフの理論においても連結性なるものが定義されているが，[2),12)] この連結性について考察をおこなうことがある。この有向グラフの連結性の定義は2項関係の連結性のそれとは多少異なっており，通常の2項関係の連結性は，有向グラフに関する連結性の特別な場合と見ることができる。それゆえ，この有向グラフの連結性のもとで，関係行列の性質を調べてみることも興味あることであると考えられる。

文　献

1) Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).
2) Behzad, M., Chartrand, G., and Lesniak-Foster, L.: "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).
3) 橋本　寛：“連結的推移関係行列の性質”，山口経済学雑誌，第34巻，第3・4号，pp. 387-405 (昭和60年6月).
4) 橋本　寛：“連結的推移関係行列の性質II”，山口経済学雑誌，第35巻，第3・4号，pp. 281-293 (昭和61年1月).
5) 橋本　寛：“連結的関係に関する若干の性質”，山口経済学雑誌，第36巻，第5・6号，pp. 245-261 (昭和62年5月).
6) 橋本　寛：“連結的関係行列の初等的性質”，山口経済学雑誌，第38巻，第3・4号，pp. 557-576 (平成元年7月).
7) 橋本　寛：“反射的で反対称的な連結的推移関係”，山口経済学雑誌，第39巻，第5・6号，pp. 621-637 (平成3年7月).
8) 橋本　寛：“反対称的推移関係”，山口経済学雑誌，第41巻，第5・6号，pp. 473-489 (平成6年5月).
9) 橋本　寛：“連結的な反対称的推移関係”，山口経済学雑誌，第42巻，第1・2号，pp. 53-74 (平成6年9月).
10) 橋本　寛：“ほとんど推移的な関係行列の性質”，山口経済学雑誌，第43巻，第3・4号，pp. 273-288 (平成7年5月).
11) Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).
12) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to social, biological, and environmental problems," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
13) Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).
14) Schröder, E.: "Algebra der Logik. Vol. III, " Teubner, Leipzig (1895) (Chelsea Publ. Co., New York, 1966).
15) Tarski, A.: "Introduction to Logic," Oxford University Press, New York (1965).