不確実性と最適投資*

中　村　　　保

I．問題の所在

Hartman(1972)以来，不確実性下の企業の最適な投資行動に対する関心が高まり，現在まで盛んに議論がなされている。それは，Hartmanが示した投資関数が我々の直感とは一致しない性質を有していたからである。すなわち，完全競争企業は自らの生産物の価格が不確実である時の方が確実である時よりもより多くの投資を行うというものである。議論の出発点として，この点を簡単な2期間モデルで確認しておこう。

以下のような企業の最適化問題を考える。

$$\max_{n_0, n_1, I_0} E_0[p_0F(N_0, K_0) - w_0N_0 - p_{I\cdot 0}I_0 - c(I_0) + \frac{1}{1+r}\{p_1F(N_1, K_1) - w_1N_1\}],$$

$$\text{Sub. to,}\quad K_1 = K_0 + I_0,\quad K_0 : \text{given.}$$

但し，Eは期待値オペレーター，pは生産物価格，$F(\bullet)$は生産関数，Nは労働投入量，Kは資本ストック，wは貨幣賃金率，p_Iは投資財価格，Iは投資量，$c(\bullet)$は投資の調整費用関数，rは利子率である。また添字は時点を示している。

ここでは簡単化のために以下のような仮定を置く。

＊本稿作成にあたり，神戸大学の足立英之教授，青木浩介助手より貴重なご助言を頂きましたこと，心より感謝致します。言うまでもありませんが，本稿に含まれる誤りは全て筆者個人の責任です。

①外生パラメータの中で次期の生産物の価格だけが今期において確率変数である。ただし，次期においては次期の生産物の価格も既知である。さらに$E_0[p_1]=\bar{p}_1$とする。

②生産関数は一次同次の well-behaved な新古典派的生産関数である。すなわち，$F(N,K)=f(n)K$，$(n\equiv N/K)$，$f'(n)>0$,$f''(n)<0$ という性質を有する。

③調整費用関数は通常仮定されているように厳密な凸関数である。すなわち，$c'>0$，$c''>0$，である。

以上の想定の下で，最適化問題は以下のように書き換えることができる。

$$\max_{n_0,n_1,I_0} E_0[p_0f(n_0)K_0-w_0n_0K_0-p_{I\cdot 0}I_0-c(I_0)+\frac{1}{1+r}\{p_1(n_1)-w_1n_1\}(K_0+I_0)].$$

通常の最適化問題の解法の手続きに従って，まず当該企業は1期にあると想定して，0期の投資I_0を所与と考えて，1期の最適化問題を解く。一階の条件は

$$p_1f'(n_1)=w_1, \tag{1}$$

である。ここで，1期の資本1単位当たりの粗付加価値関数$r(p,w)$を以下のように定義する。

$$r(p_1,w_1)=\max_{n_1} p_1f(n_1^*)-w_1n_1^*, \tag{2}$$

ただし，n_1^*はn_1の最適値を表わしている。この関数は包絡面の定理と(1)式より

$$\frac{dr}{dp_1}=\frac{\partial r}{\partial p}=f(n_1^*)>0, \tag{3}$$

$$\frac{d^2r}{dp_1^2}=f'(n_1^*)\frac{dn_1^*}{dp_1}=-\frac{f'(n_1^*)^2}{pf''(n_1^*)}>0, \tag{4}$$

という性質を持っていることがわかる。すなわち，粗付加価値関数 $r(p_1, w_1)$ はp_1に関して厳密に凸である。

次に0期の最適化問題を考える。一階の条件は以下の通りである。

$$pf'(n_0)=w_0, \tag{5}$$

$$p_{I\cdot 0}+c'(I_0)=\frac{1}{1+r}E_0[r(p_1, w_1)], \tag{6}$$

一見して明らかなように，0期の投資I_0は（6）式だけから決定される。仮に，p_1が確率変数ではなく，確実に$\bar{p}_1$であることが知られているとすると，確定的な環境下での投資量I_0^Cは以下の式によって決定される。

$$p_{I\cdot 0}+c'(I_0^C)=\frac{1}{1+r}r(\bar{p}_1, w_1). \tag{6'}$$

ところで $r(p_1, w_1)$ は p_1に関して厳密に凸であるので，周知のジェンセンの不等式が成り立つ。すなわち，

$$E_0[r(p_1, w_1)]>r(\bar{p}_1, w_1), \tag{7}$$

である。（6），（6’），（7）式および $c''(I)>0$ という性質から，生産物の価格が不確実である時の方が確実である時よりもより多くの投資を行うという結論，$I_0>I_0^C$，が直ちに導かれる。この結論が，不確実性が存在すれば存在しない時に比して投資量が減少するであろう，という我々の直感に反するために，様々な側面から検討が加えられた。以下，二，三の重要な論点について整理しておこう。

①モデルの枠組とそれに伴う確率変数（確率過程）の性質の特定化が結論に大きな影響を与えているのではないか。

Hartmanの元々のモデルは離散型のもので，各期の確率変数はそれぞれ独立であると想定されている。しかし，Abel(1983)は，投資の調整費用を含んだ連続型のモデルで確率変数が連続的な確率過程に従うという想定の

下でもHartmanの結論が保持されることを示した。さらにAbelは，一連の論文（Abel 1984,1985）で，技術の代替が可能な生産関数を持った完全競争企業に関しては，Hartmanの命題がかなり一般的に成り立つことを明らかにしている。[1]

②投資の不可逆性を考慮すればHartmanの結論は必ずしも成り立たないのではないか。

不確実性が全くない場合，企業は将来時点での最適な資本ストックを確実に知ることができるので，投資の不可逆性はそれ程重大な問題をもたらさないように考えられる。これに対して，不確実性下では，将来時点での最適な資本ストックを確実には予測できないので，投資の不可逆性はより重大な意味をもつ。不可逆性を考慮すれば不確実性は投資の機会費用を増加させ，それゆえHartman＝Abelの結論が覆されるかも知れないと考えるのはある意味で当然である。投資の不可逆性が不確実性下の投資行動に与える影響は，投資の調整費用関数を組み込んでいないモデルにおいて最初にPindyck(1988)によって研究され，Hartman＝Abelの結論が必ずしも成り立たない可能性があることが示唆された。

しかし，最近になってAbel&Eberly(1994)が，投資の調整費用と不可逆性の両方を組み込んだ統合されたモデル(Unified Model)を提示し，上述の問題提起に対して統一的なフレームワークの中で検討を加えた。そして，Hartman＝Abelの結論がかなり頑健であることを改めて確認している。

③投資の不可逆性と同時に，完全競争企業からなる産業の均衡を考えれば，不確実性と投資の正の相関関係という結論が覆されるのではないか。

産業全体に及ぶ不確実性が増大した場合を考えよう。単一の企業のレベルにおいてHartman＝Abelの結論が保持されるならば，この場合，産業内のすべての企業が投資量を増加させる。ところがそれは結果として将来の産業全体の生産量を増加させ，それゆえ，均衡価格を低下させることになる。この価格の低下は投資量を減少させる効果をもち，この効果が不確実

1）この点に関しては，Pindyck(1982)も参照せよ。

性が投資を増加させる効果を相殺して余りあるならば，産業全体の不確実性の増加は結果として産業全体の投資総量，それゆえ，個々の企業の投資量を減少させるかもしれない。この点は，Pindyck (1988) によって最初に指摘され，Hartman＝Abelの結論が産業均衡を考えれば，必ずしも成り立たない可能性があることが示された[2)]

しかし，これは産業内のすべての企業が不確実性を等しく認識する場合であって，企業がidiosyncraticな不確実性に直面している場合は，やはりHartman＝Abelの結論が保持されるのである。

これまでの分析から，完全競争企業が，①新古典派的な技術代替可能な生産関数をもち，②危険に中立的であれば，Hartman＝Abelの結論と逆の結論を得ることは難しいことがほぼ明らかになったと言えるであろう。それでは，これらと全く逆の想定をすれば，Hartman＝Abelの結論が覆るのであろうか。この点を検討するのが本稿の目的である。

特に，企業が危険中立的であるいう想定には，Hartman自身がすでに1972年の論文で修正されるべき点として指摘している。さらには，Abel (1990) やCaballero (1991) が，Hartman＝Abelの結論との関係で，危険回避的な企業の投資行動の分析の重要性を強調している。また，静学的な企業行動の分析においては，危険回避的な企業を前提にして多くの分析がなされてきたことを考えても，投資行動の分析が主に危険に中立的な企業を中心になされてきたことはやや意外である[3)]。そこで本稿では，期待効用の割引現在価値の合計を最大化する危険回避的な企業の投資行動を分析し，我々の直感ー不確実性と投資の負の相関関係ーが確かめられるかどうかを検討する。

本稿の構成は以下のとおりである。まず，次節で分析の対象となるモデ

2）Sakellaris (1994) は，Pindyckの分析を発展させ，当該産業の需要曲線が非弾力的である時は，確定的な環境の下での投資量の方が不確実性下の投資量を上回ることを，弾力的である時は両者が等しいことを示した。すなわち，産業均衡のフレームワークでは需要の弾力性が決定的な役割を果たすのである。

3）例えば，Sandomo (1971)，Zabel (1971)，Leland (1972) 等。

ルが提示され投資関数が導出される。III節で導出された投資関数の性質が分析され，IV節で結論を要約し，今後の課題・展望について若干言及する。

II．モデル

企業は，以下のような固定的な技術係数をもった生産関数に従って，単一の財を生産するものと仮定する。

$$Y(t)=\gamma K(t), \qquad N(t)=nK(t). \tag{8}$$

ただし，$Y(t)$は産出量，$K(t)$は資本ストック，$N(t)$は労働の投入量，そしてγは産出・資本比率，nは労働・資本比率である。また，γとnは時間を通じて一定であると想定する。

企業の短期の利潤$\pi(t)$は以下のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}\pi(t)&=\tilde{p}(t)\,Y(t)-wN(t)-p_I I(t)\\&=\{\tilde{p}(t)\gamma-wn\}K(t)-p_I I(t).\end{aligned} \tag{9}$$

ただし，$\tilde{p}(t)$は生産物価格，wは貨幣賃金率，p_Iは投資財価格である。

分析の簡単化のために，ここでは外生変数のうち，生産物価格$\tilde{p}(t)$だけが確率変数で，w，p_Iは時間を通じて一定であると想定する。また，$\tilde{p}(t)$は以下の伊藤型確率微分方程式に従うものとする。

$$d\tilde{p}(t)/d\tilde{p}(t)=\sigma dz(t). \tag{10}$$

ただし，$dz(t)$は平均$E_t[dz(t)]=0$，分散$V_t[dz(t)]=dt$なる標準ウイナー過程$z(t)$の確率微分$z(t+dt)-z(t)$，σは非負の定数である[4]。いま，(10)式の解$\tilde{p}(t)$に対して$\ln\tilde{p}(t)$という確率過程を考え，その確率微分を伊藤の補題を用いて求めると，

4）σがゼロの時は不確実性が存在しないが，後の議論のためにここでは一応「非負」であるものと想定しておく。

$$d\ln\tilde{p}(t)=\frac{1}{2}\frac{d^2\ln\tilde{p}(t)}{d^2\tilde{p}(t)}(\sigma\tilde{p}(t))^2dt+\frac{d\ln\tilde{p}(t)}{d\tilde{p}(t)}\sigma\tilde{p}(t)dz(t)$$

$$=-\frac{1}{2}\sigma^2dt+\sigma dz(t), \tag{11}$$

となる。両辺を t から s $(t<s)$ まで積分すれば，

$$\ln(\tilde{p}(s)/\tilde{p}(t))=-(1/2)\sigma^2(s-t)+\int_t^s dz(\tau). \tag{12}$$

となるので，生産物価格 $\tilde{p}(t)$ は，対数平均 $E_t[\ln\tilde{p}(s)]=\ln\tilde{p}(t)-(1/2)\sigma^2(s-t)$，対数分散 $V_t[\ln\tilde{p}(s)]=\sigma^2(s-t)$，を持つ，対数正規分布に従うことがわかる。[5)]

表記の簡単化のために

$$p(t)\equiv\tilde{p}(t)\lambda,\quad c=wn. \tag{13}$$

おくと，短期の利潤は以下のように書き直される。

$$\pi(t)=\{p(t)-c\}K(t)-p_1I(t). \tag{14}$$

(10) 式を考慮して，(13) の $p(t)$ に伊藤の補題を適用すると以下のような $p(t)$ に関する運動方程式を得る。

$$dp(t)/p(t)=\sigma dz(t). \tag{15}$$

さらに，当該企業は以下の方程式で表わされる資本ストックの運動の制約にも服さなければならない。

$$dK(t)=\{I(t)-\delta K(t)\}dt. \tag{16}$$

5) ここでは，$\tilde{p}(t)$ は t 時点においては既知である。

ただし，$\delta(0<\delta<1)$は資本の物的減耗率を表わしており，時間を通じて一定であると仮定する。

ここでは危険回避的な企業を考え，企業は利潤の期待効用の割引現在価値の合計を最大化するように行動するものと想定すると，企業にとっての最大化問題は以下のように定式化される。

$$\max_{\pi(t)} V(0)=E_0\left[\int_0^{\infty} u(\pi(t))\, e^{-\rho t} dt\right], \tag{17}$$
$$sub.\ to,\ (14),\ (15)\ \&\ p(0)=p^0 : \text{given},$$
$$and\ (16)\ \&\ K(0)=K^0 : \text{given}.$$

ただし，ρは時間選好率(rate of time preference)である。

この最大化問題を解くために以下のように価値関数を定義する。

$$J=J(K(t),p(t))=\max_{\pi(s)} E_t\left[\int_{0t}^{\infty} u(\pi(s))\, e^{-\rho(s-t)} ds\right] \tag{18}$$

言うまでもなくこの価値関数は以下のような最適条件を満たさなければならない。

$$\rho J(K(t),p(t))\, dt=\max_{\pi(t)}\{u(\pi(t))\, dt+E_t[dJ]\}. \tag{19}$$

上記の条件は，効用を単位としてはいるが，企業の所有者の要求利潤が期待キャピタルゲインと当期の利潤（配当）との和に等しいという周知の条件である。

$E_t[dJ]$を伊藤の補題を適用して求める。J が $K(t)$ と $p(t)$の二つの状態変数の関数であることを考慮して展開すると，

$$dJ=\frac{\partial J}{\partial K}dK+\frac{\partial J}{\partial p}dp+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 J}{\partial K^2}(dK)^2+2\frac{\partial^2 J}{\partial K\,\partial p}(dK)(dp)+\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}(dp)^2\right\}, \tag{20}$$

を得る。[6] (14), (15) (16) 式を代入し,

$E_t[dz(t)]=(dt)^2=(dt)(dz)=0, E_t[dz(t)^2]=(dz(t))^2=dt$ という関係を考慮すると，次式が得られる。

$$E_t[dJ]=\frac{\partial J}{\partial K}\{(\frac{p-c}{p_1}-\delta)K-\pi\}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}\sigma^2 p^2 dt. \tag{21}$$

(21) 式を (19) 式に代入すると,

$$\rho J(K,p)=\max_{\pi}[u(\pi)+\frac{\partial J}{\partial K}\{(\frac{p-c}{p_1}-\delta)K-\pi\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}\sigma^2 p^2], \tag{22}$$

が導かれる。この (21) 式が，ストカスティク・ダイナミック・プログラミングにおけるベルマン方程式である。

ベルマン方程式 (22) より，最適解π^*は，限界条件,

$$J'/P_1=u'(\pi^*). \tag{23}$$

を満たし，かつ，価値関数Jに関しての以下の二階偏微分方程式を満たさなければならない。

$$\rho J(K,p)=u(\pi)+\frac{\partial J}{\partial K}\{(\frac{p-c}{p_1}\delta)K-\pi\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}\sigma^2 p^2. \tag{24}$$

最後に，価値関数の収束を保証するために，以下の横断条件が課されなければならない。[7]

$$\lim_{t\to\infty}E[e^{-\rho t}J(K(t),p(t))]=0. \tag{25}$$

(25) 式を考慮して，(23) と (24) を同時に解くことで最適解は原理的には求めうる。しかし，(23) と (24) を一般的に解くことは極めて困難である。そこで，効用関数を以下のように特定化する。

6) 表記の簡単化のため，これ以後，混乱をもたらさない限りにおいて，時点を表わす記号は省略する。

7) ここでの横断条件に関しては，例えば，Merton (1992) を参照。

$$u(\pi)=\pi^{1-a},\qquad 0\leq a<1 \tag{26}$$

ただし，a は相対的危険回避度と呼ばれるものである。[8]

以上の想定の下で最適投資率を導出すると以下のようになる。

$$I=\frac{1}{a}\left\{\frac{p-c}{p_I}-\rho-(1-a)\delta-\frac{a(1-a)\sigma^2}{2(p-c)^2}\right\}K. \tag{27}$$

またこの時，価値関数は以下のようになる。

$$J(K,p)=a^a\left\{\rho-(1-a)\left(\frac{p-c}{p_1}-\delta\right)+\frac{a(1-a)\sigma^2}{2(p-c)^2}\right\}^{-a}(p_IK_t)^{1-a}. \tag{28}$$

(27) 式で表わされる投資関数がどのような性質を有するかについては節を改めて議論しよう。

III．最適投資関数の性質

前節で導出された投資関数の特徴を明らかにするために，三つのケースに分けて，簡単なケースから順次考察していこう。

1）$a=0$，かつ，$\sigma=0$の場合

(27) 式を変形すると以下のようになる。

$$aI=\left\{\frac{p-c}{p_1}-\rho-(1-a)\delta-\frac{a(1-a)\sigma^2}{2(1-a)}\right\}K$$

上の式で，$a\to 0$，$\sigma\to 0$とすると，

$$p-c=(\rho+\delta)p_1$$

を得る。この式は，資本の限界収入生産物と資本の使用者費用の均等を表わす式である。しかし，この式は最適条件としては何も意味しない。なぜならば，この場合，体系内にこの式の左辺と右辺を均衡化させるメカニズ

8）$a=0$の時は危険中立的になるので，元々の想定とやや矛盾するが，ここでは後の議論との関係で $a=0$も含むものとする。

ムは何ら存在しないからである。実際，(27)式において，$a\to 0$，$\sigma\to 0$とすると，

$$p-c \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} (\rho+\delta)p_1 \Rightarrow \begin{matrix} I=+\infty \\ I:free \\ I=-\infty \end{matrix}$$

となる。いわゆる「Haavelmo (1960)の問題」が生じるのである。このことは，ここでのモデルが，「不確実性に直面する危険回避的な企業」という部分と固定係数の生産技術を想定しているという点を除けば，ジョルゲンソンのモデルと同一であることからの当然の帰結である。[9]

2）$a>0$，かつ，$\sigma=0$の場合

この場合，(27) 式は以下のように変形できる。

$$I=\frac{\rho+\delta}{a}\left\{\frac{(p-c)/(\rho+\delta)}{p_I}-\left(1+\frac{a\delta}{\rho+\delta}\right)\right\}K$$

いわゆる「トービンの平均q」を q_A，「トービンの限界q」を q_Mとおくと，以下のように両者は等しくなる。[10]

$$q_A=\frac{\int_0^{\infty}(p-c)K(0)e^{-(\rho+\delta)t}dt}{p_I K(0)}=\frac{p-c}{\rho+\delta}=\frac{\int_0^{\infty}\frac{d(p-c)K(t)}{dK(t)}e^{-(\rho+\delta)t}dt}{p_I}=q_M$$

ここで，仮に $a\delta$が無視しうるほど小さいとすれば，この場合の投資関数は以下のようになる。

$$I=\{(\rho+\delta)/a\}(q_A-1)K=\{(\rho+\delta)/a\}(q_M-1)K$$

投資と q_A (q_M) の間には以下のような関係がある。

9）ジョルゲンソンのモデルについては，例えば，Jorgenson (1963) を参照。

10)「トービンの q」についてはTobin (1969) を，「トービンの q」と投資関数の関係についてはYoshikawa (1980) を参照。また，「平均 q」と「限界 q」の関係については，Hayashi (1982) を参照。

$$q_A(q_M) \overset{>}{\underset{<}{=}} 1 \Rightarrow I \overset{>}{\underset{<}{=}} 0$$

つまり，この最適投資関数は「トービンのq理論」による投資関数としても解釈可能である。[11] この意味において，$q_A + a\delta/(\rho+\delta)$を「危険回避度で修正されたトービンの$q$」と，また，$(\rho+\delta)/a$を「投資の調整係数」と解釈できるであろう。[12] そして，この調整係数は企業が危険回避的であればあるほど小さくなる。同様に投資率も小さくなる。

3）$\sigma>0$，かつ，$a>0$の場合

(27) 式をσで微分すると次のような関係を得る。

$$\frac{dI}{d\delta} = -\frac{(1-a)}{(p-c)^2} < 0.$$

それゆえ，本稿における以下のような主要な命題を得ることができる。

命題

企業が固定係数の生産関数をもち危険回避的である場合は，不確実性(σ)が増大すると企業は投資を減少させる。

Hartman＝Abelの結論においては，粗利潤関数の凸性が重要な役割を果たしていた。しかし，ここでのモデルでは，固定係数の生産関数を想定しているために，粗利潤関数は線型となっている。逆に，効用関数が目的関数に凹性を与えており，上述の命題は直感的にも明らかである。[13]

また，ここでの投資が確定的環境の下での投資I^Cを下回ることも以下の

11) ここでは投資の不可逆性，すなわち，投資の非負性を考慮していないので，マイナスの投資，つまり設備の投資財の購入価格での売却が生じうる。

12) ここでは，$\sigma=0$を想定しているので，企業には回避すべき危険は存在しない，それゆえ，「危険回避度で修正された」と言うのは必ずしも正しくない。ここでは，「効用関数の凹性で修正された」と言うような意味である。

13) ここで，凸性及び凹性と言う時，それらはすべて「厳密な」という意味で用いられている。以後も同様である。

ように明白である。[14)]

$$I-I^{C}=-\frac{(1-a)\sigma^2}{2(p-c)^2}K.$$

また，ここで得られた投資関数は，資本の限界収入生産物の期待値 $p-c$ の増加関数，時間選好率ρおよび資本減耗率δの減少関数という通常の投資関数と同じ性質を有している。ただし，危険回避度 a にかんしては，

$$\frac{d(I/K)}{da}=-\frac{1}{a^2}\{\frac{p-c}{p_1}(\rho+\delta)\}+\frac{\sigma^2}{(p-c)^2}$$

となるので，確定的な結論は出しにくい。[15)]

最後に，「トービンの q 理論」との関係について考えよう。前と同様に，不確実性下の「トービンの平均 q」を q_A^U，「トービンの限界 q」を q_M^Uと定義すると，以下のようにそれらはここでも等しくなる。

$$q_A^U=\frac{E_0\int_0^{\infty}(p(t)-c)K(0)e^{-(\rho+\delta)t}dt}{p_IK(0)}=\frac{\int_0^{\infty}(E_0[p(t)]-c)e^{-(\rho+\delta)t}dt}{p_I},$$

$$q_M^U=\frac{E_0\int_0^{\infty}\frac{\partial(p(t)-c)K(t)}{\partial K(t)}e^{-(\rho+\delta)t}dt}{p_I}=\frac{\int_0^{\infty}(E_0[p(t)]-c)e^{-(\rho+\delta)t}dt}{p_I}.$$

また，第II節での考察より，$p(t)$も生産物価格 $\tilde{p}(t)$同様に対数平均 $E_0[\ln p(t)]=\ln p(0)-(1/2)\sigma^2$，対数分散 $V_0[\ln p(t)]=\sigma^2 t$ を持つ，対数正規分布に従うことは明らかなので，

$$E_0[p(t)]=\exp\{E_0[\ln p(t)]+(1/2)V_0[\ln p(t)]\}=p(0),$$

となる。この場合，

---

14) $I^C=\frac{1}{a}\{\frac{p-c}{p_I}-\rho-(1-a)\}$であることは，$I$ において$\sigma=0$とおけば明らかなように思われるが，比較するためにはI^Cそのものをきちんと導出しておく必要がある。この点については補論を参照。

15) これは，企業の危険に対する態度の特定化に関係しているものと考えられる。

$$q_A = q_M = q_A^U = q_M^U,$$

が成り立つ。ここでの投資関数をこの q_A を用いて表わすと以下のようになる。

$$\frac{I}{K} = \frac{\rho + \delta}{a}(q_A - 1) - \frac{(1-a)\sigma^2}{2(p-c)^2} + \delta$$

上の式が示しているように，不確実性下では，「トービンのq」が１より大きければ投資を行い，１より小さければ投資を実行しないという単純な関係は成立しない。不確実な環境の下では，仮に「トービンのq」が１を上回っていても企業は投資を行わないということを上式は示していると解釈できよう。

Ⅳ．結語

本稿では，固定係数の生産技術をもつ危険回避的な企業の不確実性下での投資行動を分析した。その主要な目的は，Hartman＝Abelの結論が覆るかどうかの検討であった。

分析の結果，ここでのモデルにおいては，，Hartman＝Abelとは全く逆の，ある意味で常識的な結論ー不確実性の増大は投資を減少させるーを得た。これは，「危険回避的」という想定が，目的関数に強い凹性を導入するのに対して，生産の構造の中に何らの凸性も無いことから，ある意味で当然のことである。その意味では，「危険回避的」という不確実性下での企業行動を分析する際の通常の想定に従えば，直感と整合的な結論が得られることが例示されたと考えるべきであろう。真の問題は，むしろ，通常の新古典派が想定するような生産の構造の中にある強い凸性を，危険回避的行動が打ち消し得るかどうかということである。[16)]

また，ここでのモデルは「トービンのq」による投資理論としても解釈可能である。しかし，不確実性が支配する環境下では，「qが１より大きいか

否か」ということが必ずしも投資を実行するかどうかの基準にはなり得ないことも同時に示された。不確実性下の危険回避的な企業の投資行動と「トービンのq理論」との関係については，今後，投資の調整費用の問題も含めて検討する必要があるように思われる。

本稿では，企業の危険に対する態度を，「相対的危険回避度一定」と想定することで単純化している。この点は，単に不確実性との関連だけにおいてだけでなく一ここでのモデルでは，危険回避度そのものが最適投資率の重要な決定要因になっていることを考えればー，最適投資率との関連においても，より妥当な想定に変更する必要があろう。

以上の諸点は今後の研究課題としたい。

補論：不確実性がない場合の投資関数

不確実性がない場合は回避すべき危険が存在しないのであるから，効用関数を設定して分析することはあまり意味のあるものとは言えない。しかし，不確実性下の投資行動との比較という意味で，ここで不確実性がない場合の最適投資率 $I^c(t)$ を導出しておく。

この場合の企業にとっての最大化問題は以下のように定式化される。

$$\max_{nt_r,\pi t} \int_0^\infty u(\pi(t))\, e^{-\rho t} dt, \qquad (A.\ 1)$$

$$\text{sub. to.,} \quad \dot{K}(t) = I^c(t) - \delta K(t).\quad K(0) = K^0 : \text{given}, \qquad (A.\ 2)$$

16) Nakamura (1994) では，生産関数を $Y_t = N_t^\beta K_t^{1-\beta}$ というコブ＝ダグラス型に特定化した下ではあるが，この問題に一応の答を出している。すなわち，そこでは以下のような関係が存在することが示されている。

$$\frac{dI}{d\sigma} \gtreqless 0 \iff \beta \gtreqless a.$$

$$\pi(t) = (p-c)K(t) - p_I I^C(t). \qquad (\text{A. } 3)$$

ただし，変数の上のドット（・）は時間に関する微分を表わしている。また，その他の変数の定義は本論と同じである。（A．2）式と（A．3）式より

$$\dot{K}(t) = (\frac{p-c}{p_I} - \delta)K(t) - \frac{\pi(t)}{p_I}, \qquad (\text{A. } 4)$$

となる。

この問題を解くために現在価値ハミルトニアン $H(t)$ を以下のように定義する。

$$H(t) = u(\pi(t)) + \lambda(t)\{(p-c)/p_I - \delta)K(t) - \pi(t)/p_I\}. \qquad (\text{A. } 5)$$

ただし，$\lambda(t)$ は状態変数 $K(t)$ に関する補助変数(あるいは共状態変数と呼ばれることもある）である。

必要条件その他の一階の条件は

$$u'(\pi) = \lambda/p_I, \qquad (\text{A. } 6)$$

$$\dot{\lambda} = \{\rho + \delta - (p-c)/p_I\}\lambda, \qquad (\text{A. } 7)$$

$$\dot{K} = \{(p-c,/p_1 - \delta\}K - \pi/p_I, \qquad (\text{A. } 8)$$

である。(以後，各変数が時間の変数であることは特に明示しない。）また横断条件は次の通りである。

$$\lim_{t\to\infty} \lambda K e^{-\rho t} = 0. \qquad (\text{A. } 9)$$

（A．6)，（A．7)，（A．8）の諸式より以下の式を得る。

$$\frac{\pi \cdot u''}{u'}\frac{\dot{\pi}}{\pi} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}(\rho + \delta - \frac{p-c}{p_I}), \qquad (\text{A. } 10)$$

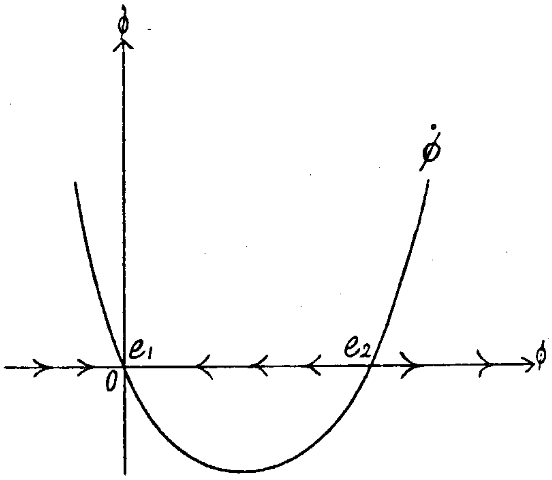
$$\frac{\dot{K}}{K}=C\frac{p-c}{p_I}-\delta)-\frac{\pi}{P_IK}. \tag{A. 11}$$

$\phi\equiv\pi/p_IK$ と定義しϕを時間で微分し，（A. 10)，（A. 11）式及び $\pi u''/u'=-a$ を考慮すると，

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi}=\frac{\dot{\pi}}{\pi}-\frac{\dot{K}}{K}=-\frac{1}{a}(\rho+\delta-\frac{p-c}{p_I})-(\frac{p-c}{p_I}-\delta)+\phi,$$

$$\text{or}\quad \dot{\phi}=[\phi-\frac{1}{a}\{\rho+(1-a)(\frac{p-c}{p_I}-\delta)\}]\phi. \tag{A. 12}$$

となる。したがって，ϕの動学方程式は第１図のように描ける。



第 1 図

定常状態として

$$\phi=0,\quad \text{or}\quad \phi=\frac{1}{a}\{\rho+(1-a)(\frac{p-c}{p_I}-\delta)\}.$$

の２つが存在するが，e_1は利潤が０になり，それゆえ目的汎関数が０になるので均衡にはなり得ない。e_2は動学的に不安定であり，e_2より左から出発する経路はe_1に収束するために均衡にはなり得ず，また，e_2より右から出発する経路は横断面条件を満たさないので最適解にはなり得ない。よって，唯一の最適解は e_2であり，この場合，移行過程は存在しない。ゆえに，最適投資率 I^Cが以下のように求まる。

$$I^{C}=\frac{p-c}{p_{I}}-\phi=\frac{1}{a}\{\frac{p-c}{p_{I}}-\rho-(1-a)\delta\}.$$

参考文献

Abel, Andrew B.,"Optimal Investment under Uncertainty," *American Economic Review,* March 1983, 73 (1), pp.229-33.

————, "The Effect of Uncertainty on Investment and the Expected Long-run Capital Stock,"*Journal of Economic Dynamics and Control,* February 1984, 7(1), pp.39-53.

————, "A Stochastic Model of Investment, Marginal q and the Market Value of the Firm," *International Economic Review,* June 1985, 26(2), pp.305-22.

————, "Consumption and Investment,"in Benjamin. M. Friedman and Frank H. Hahn , eds., *Handbook of Monetary Economics,* Vol II. Amsterdam: North-Holland, 1990, pp.725-778.

Abel, Andrew B. and Eberly, Janice C., "A Unified Model of Investment Under Uncertainty,"*American Economic Review,* December 1994, 84(5), pp.1369-84.

Caballero, Ricardo J., "On the Sign of the Investment-Uncertainty Relationship," *American Economic Review,* March 1991, 81(1), pp.279-88.

Haavelmo, Trygve, *A Study in the Theory of Investment,* University of Chicago Press, 1960.

Hartman, Richard,"The Effects of Price and Cost Uncertainty on Investment," *Journal of Economic Theory,* October 1972, 5(2), pp.258-66.

Hayashi, Fumio, "Tobin's Marginal and Average q: A Neoclassical Interpretation," Econometrica, January 1982, 50(1), pp.213-24.

Jorgenson, Dale W., "Capital Theory and Investment Behavior,"*American Economic Review,* May 1963(Papers and Proceedings), 53 (2), pp.247-59.

Leland, Hayne, "Theory of the Firm Facing Random Demand,"*American Economic Review,* 1972, 62, pp.278-91.

Merton, Robert C., *Continuous-Time Finance,* Blackwell Publishers, 1992.

Nakamura, Tamotsu, "Risk-Aversion and the Effect of Uncertainty on Investment," *Yamaguchi University,* 1994, Mimeo.

Pindyck, Robert S., "Adjustment Costs, Uncertainty and the Behavior of the Firm," *American Economic Review,* June 1982, 72(3), pp.415-27.

————, "Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm,"*American Economic Review, December 1988, 78*(5), *pp.969-85.*

————, "A Note on Competitive Investment Under Uncertainty," *American Economic Review,* March 1993, 83(1), pp.273-77.

Sakellaris, Plutarchos, "A Note on Competitive Investment Under Uncertainty, " *American Economic Review,* September 1994, 84(4), pp.1107-12.

Sandomo, Agnar, "On the Theory of the Competitive Firm under Uncertainty, *American Economic Review,* 1971, 61(1), pp.65-73.

Tobin, James, "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory," *Journal of Money, Credit, and Banking,* February 1969, 1 (1), pp.15-69.

Yoshikawa, Hiroshi, "On the "q" Theory of Investment," *American Economic Review,* September 1980, 70, pp.739-43.

Zabel, Edward, "Risk and the Competitive Firm," *Journal of Economic Theory,*1971, 3, pp.109-33.