Semiorderに関するLuceの最初の定義とScott and Suppesの定義

橋　本　　　寛

1．はじめに

一般にsemiorderはある種の順序と考えられ，選好関係や効用，また意志決定などの基礎的な議論において重要である。semiorderの性質はこれまで経済学や心理学などを中心に比較的広い分野で調べられており，多くの研究がなされている[3，4，7，11，12，15，16，18，21，23，24，25，26，28]。本論文ではLuceによって与えられたsemiorderに関する最初の定義［19］とScott and Suppesによって与えられたsemiorderの定義［28］について考察をおこない，両者が実質的に等価であることを，ブール行列［17］を用いて示している。また，これらのsemiorderの定義に関連する性質を調べ，ブール行列の性質として示している。

semiorderの定義には大きく分けて二つの定義がある。一つは2個の関係を用いてsemiorderを定義するものであり，他の一つは単一の関係を用いてsemiorderを定義するものである。Luceの定義は2個の関係を用いてなされており，Scott and Suppesの定義は単一の関係で与えられている。また，それぞれにいくつかの変形された同値な定義が存在している。Luceの与えた定義にも一部条件の異なる二つの定義がある[19，20，21]。Scott and Suppesの単一の関係で表現されたsemiorderは特殊な非反射的推移関係となっている。本論文では，Luceのsemiorderの定義を構成する二つの関係のうちの一つを消去し，同値性を保ちながら変形をおこなって，Scott and Suppesの定義に帰着させることにより，それらの等価性を示している。

2．演算および記法の定義

ブール行列に関する演算および記法は文献［13, 14］などによるものとするが，注意すべき演算として，0，1の要素をもつn次ブール行列$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$に対するブール行列積$R\times S$と，それに双対な演算$R\diamond S$は次のように定義される。

$$R\times S=[(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})]$$

$$R\diamond S=[(r_{i1}\vee s_{1j})\wedge(r_{i2}\vee s_{2j})\wedge\cdots\wedge(r_{in}\vee s_{nj})]$$

ここに，x, yを0，1の値をとるものとするとき，$x\vee y=\max(x, y)$, $x\wedge y=\min(x, y)$とする。演算$R\diamond S$はブール行列に関する不等式の変形の議論などにおいて有用である。

特殊な行列として，単位行列を$I=[\delta_{ij}]$（δ_{ij}はクロネッカーのデルタ）で，零行列をOで，すべての要素が1の行列をEで表わす。行列I，O，Eは文脈で決まる適当な次数をもつものとする。次数をとくに明示しない行列は，原則としてn次行列であるとする。また，行列Sの(i, j)要素をs_{ij}のように表わすことにする。他の行列の場合も同様である。

一般にブール行列Sが$S\times S\leqq S$となるとき，Sで表現される二項関係は推移的といわれる。また，$S\wedge I=O$のとき対応する関係は非反射的といわれ，$S\wedge S'=O$のときは非対称的といわれる。なお，行列に関する$\wedge$の演算は要素ごとの演算であり，S'はSの転置行列である。

3．結果

Luceが最初に与えたsemiorder［19］とScott and Suppesのsemiorder［28］が実質的に等価であることを示す。まずLuceのsemiorderを構成する二つの関係のうち一つを消去し，残り一つの関係で定義されたsemiorderを求める。次にその条件の一部を，他の条件のもとで，同値な条件で置き換えることを繰り返し，最終的にScott and Suppesの定義にもっていく。また，その変形

の過程においてそれぞれの定義に関連する基本的性質を調べる。

［定義１］［19］

ブール行列S，Tが次の条件を満たすならば，(S，T) はsemiorderを表現する行列対である。

(1)　$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$

(2)　$I\leqq T$

(3)　$S\times T\times S\leqq S$

(4)　$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}$

上の定義１はLuceが最初に与えたsemiorderの定義の行列表現である。この定義における条件(2)の$I\leqq T$は，以下の性質６で示すように条件(1)から得られるので，条件としては冗長である。

［性質１］［14］

$$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$$

$$\Longleftrightarrow(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O,\quad S\vee S'\vee T=E$$

［性質２］　A，Cをm×nブール行列とするとき

$$A\wedge C=O,\quad A\vee C=E\Longleftrightarrow C=\overline{A}$$

(証明)

(1)　$A\wedge C=O$，$A\vee C=E$のとき

明らかに$A\wedge C=O$から$C\leqq\overline{A}$となる。また$A\vee C=E$から$\overline{A}\wedge\overline{C}=O$となり，さらに$\overline{A}\leqq C$となる。したがって$C=\overline{A}$となる。

(2)　$C=\overline{A}$のとき

$$A\wedge C=A\wedge\overline{A}=O$$

$$A\vee C=A\vee\overline{A}=E$$

(証明終)

この性質はほとんど自明であり，よく知られていると思われるが，以下で使用するので示している。

［性質３］　A_1，A_2，…，A_l，Cをm×nブール行列とするとき

$$(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_l)\wedge C=O,\quad A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_l\vee C=E$$

$\Longleftrightarrow C=\overline{A_1}\wedge\overline{A_2}\wedge\cdots\wedge\overline{A_l}$

（証明）　性質2による。　（証明終）

［性質4］　A，B，Cを$m\times n$ブール行列とするとき

$(A\wedge C)\vee(B\wedge C)=O,\ A\vee B\vee C=E\Longleftrightarrow C=\overline{A}\wedge\overline{B}$

（証明）　性質3による。　（証明終）

［性質5］［14］

$(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O,\ S\vee S'\vee T=E\Longleftrightarrow T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$

（証明）　性質4による。　（証明終）

［性質6］

$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$のとき

(1)　$S\wedge S'=O$

(2)　$S\wedge I=O$

(3)　$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$

(4)　$T'=T$

(5)　$I\leqq T$

（証明）

(1)　性質1による。

(2)　(1)による。

(3)　性質1および性質5による。

(4)　(3)による。

(5)　(2)，(3)による。　（証明終）

［性質7］

$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E\Longleftrightarrow S\wedge S'=O,\ T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$

（証明）

(1)　$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$のとき

性質6によって

$S\wedge S'=O,\ T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$

(2)　$S\wedge S'=O,\ T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$のとき

$\overline{S}\vee\overline{S'}=E$, $\overline{T}=S\vee S'$であるから

$$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)$$
$$=(S\wedge\overline{S'}\wedge(S\vee S'))\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge(S\vee S'))\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge\overline{S}\wedge\overline{S'})$$
$$=(S\wedge\overline{S'})\vee(\overline{S}\wedge S')\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'})$$
$$=((S\wedge\overline{S'})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\vee((\overline{S}\wedge S')\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}))$$
$$=\overline{S'}\vee\overline{S}$$
$$=E$$

(証明終)

［性質８］　$I\leqq T$, $S\times T\times S\leqq S\Rightarrow S\times S\leqq S$

(証明)

$$S\times S=S\times I\times S\leqq S\times T\times S\leqq S$$

(証明終)

上の性質８は明らかであり，よく知られているであろう。この性質は次の性質９の証明で使用される。

［性質９］

$$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E,\ S\times T\times S\leqq S\Rightarrow S\times S\leqq S$$

(証明)　$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$のとき，性質６によって$I\leqq T$となる。したがって性質８から$S\times S\leqq S$となる。　(証明終)

［性質10］　$I\leqq T$, $(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\wedge I=O$

(証明)　$I\leqq T$だから

$$S=S\times I\leqq S\times T,$$
$$S'=S'\times I\leqq S'\times T$$

となる。したがって

$$S\wedge S'\leqq(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}$$

となる。また$I\leqq T$から$\overline{T}\leqq\overline{I}$となるので$S\wedge S'\leqq\overline{I}$となる。これから$(S\wedge S')\wedge I=O$となり，$S\wedge I=O$が得られる。　(証明終)

［注意１］　次の命題は，一般には成立しない。

$$I\leqq T,\ (S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\leqq S$$

いま

$$T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

とおけば，I≦Tであり，

$$\overline{T}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)=S\wedge S'=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\leqq\overline{T}$$

であるが，

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であって，$S\times S\leqq S$とはなっていない。

［定義2］　ブール行列S, Tが次の条件を満たすならば，(S, T) はsemiorderを表現する行列対である。

(1)　$(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})=O$

(2)　$I\leqq T$

(3)　$S\times T\times S\leqq S$

(4)　$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}$

この定義2が定義1と等価であることを示す。

［性質11］　定義1の条件⟺定義2の条件

(証明)　性質1によって

$$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$$

$$\Longleftrightarrow(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O,\quad S\vee S'\vee T=E$$

$$\Longleftrightarrow(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O,\quad \overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T}=O$$

$$\Longleftrightarrow(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})=O$$

(証明終)

［定義3］　ブール行列Sが次の条件を満たすならば，Sはsemiorderを表現する行列である。

(1)　$S\wedge S'=O$

(2)　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$

(3)　$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$

上の定義3はLuceの最初の定義を単一の行列で表現したものに相当している。以下において，この定義3が定義1から導かれることを示すが，先にこの定義を満たすSの性質を調べる。

［性質12］［22］

$$S\wedge I=O,\ S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Rightarrow S\times S\leqq S$$

(証明)　$S\wedge I=O$から$I\leqq\overline{S}$，$I\leqq\overline{S'}$となり，したがって$I\leqq\overline{S}\wedge\overline{S'}$となるので

$$S\times S=S\times I\times S\leqq S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$$

となる。　(証明終)

［性質13］

$$S\wedge S'=O,\ S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Rightarrow S\times S\leqq S$$

(証明)　性質12による。　(証明終)

［注意2］　一般には，

$$S\wedge S'=O,\ S\times S\leqq S\Rightarrow S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$$

とはならない。いま，

$$S=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

とおけば

$$S'=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \overline{S}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{S'}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$S\wedge S'=O$

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=O\leqq S$$

$$\overline{S}\wedge\overline{S'}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

となり，$S\wedge S'=O$で，かつ$S\times S\leqq S$であるけれども$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$とはなっていない。

次の性質はよく知られている。

［性質14］［1，13，27］

$S\times S\leqq S$のとき

$$S\wedge I=O\Longleftrightarrow S\wedge S'=O$$

[性質15]　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき

$$S\wedge I=O\Longleftrightarrow S\wedge S'=O$$

(証明)

(1)　$S\wedge I=O$のとき

性質12によって$S\times S\leqq S$となるので，性質14によって$S\wedge S'=O$となる。

(2)　$S\wedge S'=O$のとき

明らかに$S\wedge I=O$となる。　(証明終)

[注意3]　一般には，

$S\wedge I=O$，$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Rightarrow S\wedge S'=O$とはならない。いま，

$$S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

とおけば，明らかに

$$S\wedge I=O,\ \overline{S}\wedge\overline{S'}=I$$

であり，

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=S\wedge S'\leqq S\vee S'$$

となるが，$S\wedge S'=S\neq O$であって，$S\wedge S'=O$とはならない。

[注意4]　次の命題も一般には成立しない。

$S\wedge S'=O$，$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Rightarrow S\times S\leqq S$

いま，

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

とおけば，

$$S\wedge S'=O$$

$$\overline{S}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \overline{S'}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{S}\wedge\overline{S'}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=S\wedge S'=O\leqq S\vee S'$$

となるが，

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

であって，$S\times S\leqq S$とはなっていない。

［性質16］

定義１の条件$\Longleftrightarrow$定義３の条件および$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$

（証明）

(1)　定義１の条件のとき

性質１によって

$$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$$

$$\Longleftrightarrow(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O,\ \ S\vee S'\vee T=E$$

であるから，$S\wedge S'=O$となる。また性質５によって$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$となる。この$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$を$S\times T\times S\leqq S$に代入して

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$$

が得られる。さらに$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$を

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}$$

に代入すれば，

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

となる。

(2)　定義３の条件および$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$のとき

$S\wedge S'=O$で$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$であるから性質７によって

$$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$$

となる。次に，$S\wedge S'=O$によって$S\wedge I=O$だから$I\leqq\overline{S}\wedge\overline{S'}=T$となる。さらに

$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$によって

$$S\times T\times S=S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$$

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)=(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'=\overline{T}$$

となる。　(証明終)

［定義4］　ブール行列Sが次の条件を満たすならば，Sはsemiorderを表現する行列である。

(1)　$S\wedge S'=O$

(2)　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$

(3)　$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$

以下において，この定義4が定義3と等価であることを示す。まず，上の定義の条件を満たすSの若干の性質を調べる。

［性質17］　$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$のとき

$$S\wedge I=O\Longleftrightarrow S\wedge S'=O$$

(証明)

(1)　$S\wedge I=O$のとき

$s_{ij}=s_{ji}=1$とおく。このとき矛盾の生じることを示す。$s_{ii}=0$であるから$s_{ij}\wedge s_{ji}\wedge(\overline{s_{ii}}\wedge\overline{s_{ii}})=1$となり，$s_{ii}\vee s_{ii}=1$となる。しかし，これは矛盾する。

(2)　$S\wedge S'=O$のとき

明らかに$S\wedge I=O$となる。　(証明終)

［注意5］　すでに性質13で示したように，$S\wedge S'=O$のとき

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Rightarrow S\times S\leqq S$$

となる。しかし，一般には，

$S\wedge S'=O$のとき

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'\Rightarrow S\times S\leqq S$$

とはならない。いま，注意4の場合と同じく

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

とおけば，注意4で示したように

$$S\wedge S'=O$$

$$\overline{S}\wedge\overline{S'}=I$$

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

であり，

$$S\vee S'=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\leqq S\vee S'$$

となって，$S\wedge S'=O$で，かつ$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$であるけれども，$S\times S\leqq S$とはなっていない。

［性質18］

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=O$$

(証明)

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$$

$$\Longleftrightarrow S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq\overline{S'}\diamond(S\vee S')$$

$$\Longleftrightarrow(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge\overline{(\overline{S'}\diamond(S\vee S'))}=O$$

$$\Longleftrightarrow(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=O$$

(証明終)

［性質19］

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'\Rightarrow(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

(証明)　性質18によって

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=O$$
$$\Rightarrow(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

(証明終)

［注意6］　一般には，$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$であっても

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Rightarrow S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$$

とはいえない。いま，

$$S=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\overline{S}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \overline{S'}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \overline{S}\wedge\overline{S'}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\leqq S$$

$$S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$S\vee S'=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\leqq S\vee S'$$

$$S\times S=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

であり，

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$$
$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

となるが，

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$$

とはなっていない。

［性質20］　$S\times S\leqq S$のとき

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$$

（証明）

(1)　$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$のとき

$s_{ik}\wedge s_{kl}\wedge\overline{s_{lj}}\wedge\overline{s_{jl}}=1$とおく。このとき$s_{ij}\vee s_{ji}=0$とおけば矛盾の生じることを示す。$S\times S\leqq S$だから，$s_{ik}=1$，$s_{ij}=0$によって$s_{kj}=0$となる。また，$s_{kl}=1$，$s_{jl}=0$によって$s_{jk}=0$となる。ところで

$$s_{kl}\wedge\overline{s_{lj}}\wedge\overline{s_{jl}}=1,\quad s_{ik}\wedge\overline{s_{ij}}\wedge\overline{s_{ji}}=1$$

であるから，

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

によって$s_{kj}\vee s_{jk}=1$となる。しかし，これは矛盾する。

(2)　$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$のとき

性質19による。　（証明終）

［性質21］　$S\wedge I=O$，$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$$

（証明）　性質12および性質20による。　（証明終）

［性質22］　$S\wedge S'=O$，$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$$

（証明）　$S\wedge S'=O$のとき$S\wedge I=O$であるから，性質21による。（証明終）

［性質23］　定義3の条件$\Longleftrightarrow$定義4の条件

（証明）　性質22による。　（証明終）

［定義5］　ブール行列Sが次の条件を満たすならば，Sはsemiorderを表現する行列である。

(1)　$S\wedge I=O$

(2)　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$

(3)　$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$

この定義5が定義3と等価であることは次の性質によって示される。

[性質24]　定義3の条件$\Longleftrightarrow$定義5の条件

(証明)　性質15による。　(証明終)

[注意7]　すでに注意3でも述べたように，一般には，

$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$のとき

$S\wedge I=O\Rightarrow S\wedge S'=O$

とはならない。

[定義6]　ブール行列Sが次の条件を満たすならば，Sはsemiorderを表現する行列である。

(1)　$S\wedge I=O$

(2)　$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

(3)　$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$

この定義6が定義5と等価であることを示す。次の性質はよく知られている。

[性質25] [2，6，7，10]

$S\wedge I=O,\ S\times\overline{S'}\times S\leqq S\Rightarrow S\times S\leqq S$

(証明)　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

であるから性質12による。　(証明終)

上記の性質中の$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$を満たすSの表現する二項関係はFerrers関係またはbiorderとよばれる[2，10]。$S\wedge I=O$かつ$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$なるSはinterval orderまたはirreflexive biorderとよばれる二項関係を表現するブール行列となる[2，7，16]。

[注意8]　一般には，

$S\wedge I=O,\ S\times S\leqq S\Rightarrow S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

とはいえない。注意2の場合と同じく

$$S=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

とおけば，注意2で示したように，このSは$S\wedge S'=O$, $S\times S\leqq S$であるけれども，$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$を満たさない。明らかに$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\times\overline{S'}\times S$であるから，このSは$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$も満たさない。実際，

$$S\times\overline{S'}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$S\times\overline{S'}\times S=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

となるから，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$とはなっていない。

［性質26］　$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

$$S\wedge I=O\Longleftrightarrow S\wedge S'=O$$

（証明）　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

であるから性質15による。　（証明終）

［性質27］　$S\times S\leqq S$のとき

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Longleftrightarrow S\times\overline{S'}\times S\leqq S$$

（証明）

(1)　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき

$s_{ik}=1$，$s_{lk}=0$，$s_{lj}=1$とおく。このとき$s_{ij}=0$とすると矛盾の生じることを示す。$s_{ik}=1$，$s_{ij}=0$だから$S\times S\leqq S$によって$s_{kj}=0$となる。また$s_{lj}=1$，$s_{kj}=0$によって$s_{kl}=0$となる。こうして$s_{ik}\wedge(\overline{s_{kl}}\wedge\overline{s_{lk}})\wedge s_{lj}=1$だから$s_{ij}=1$となる。しかし，これは矛盾する。

(2)　$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

明らかに

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\times\overline{S'}\times S$$

であるから$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$となる。　(証明終)

[性質28]　$S\wedge I=O$のとき

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Longleftrightarrow S\times\overline{S'}\times S\leqq S$$

(証明)

(1)　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき

$S\wedge I=O$だから性質12によって$S\times S\leqq S$となる。したがって性質27から$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$となる。

(2)　$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

明らかに

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\times\overline{S'}\times S\leqq S$$

となる。　(証明終)

[性質29]　$S\wedge S'=O$のとき

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Longleftrightarrow S\times\overline{S'}\times S\leqq S$$

(証明)　$S\wedge S'=O$のとき$S\wedge I=O$であるから性質28による。　(証明終)

[注意9]　一般には,

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S' \text{のとき}$$

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Rightarrow S\times\overline{S'}\times S\leqq S$$

とはいえない。いま,

$$S=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\overline{S}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \overline{S'}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\overline{S}\wedge\overline{S'}=O$

$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=O\leqq S\vee S'$

$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S=O\leqq S$

$$S\times\overline{S'}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$S\times\overline{S'}\times S=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

となり，

$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$

$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$

であるけれども，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$とはなっていない。

［注意10］　次の命題も一般には成立しない。

$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$のとき

$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Rightarrow S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

いま，注意9と同じく

$$S=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

とおけば，

$\overline{S}\wedge\overline{S'}=O$

$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})=O\leqq S\vee S'$

$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S=O\leqq S$

となり，

$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$

$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$

であるけれども，上の注意9で示したように$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$とはなっていない。

［性質30］　$S\wedge I=O$，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$

（証明）　明らかに

$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

であるから性質21による。　（証明終）

［性質31］　$S\wedge S'=O$，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$

（証明）　性質30による。　（証明終）

［注意11］　一般には，

$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$，$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$

$\Rightarrow S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$

とはならない。いま，注意6の場合と同じく

$$S=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

とおき，注意6の計算を参照すれば

$$\overline{S'}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$S\times\overline{S'}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$S\times\overline{S'}\times S=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\leqq S$$

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

$$S\vee S'=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

であって

$$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$$

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

となるが,

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$$

とはなっていない。

［性質32］　定義5の条件$\Longleftrightarrow$定義6の条件

（証明）　性質28による。　（証明終）

［性質33］　次の条件は同値である。

(1)　$S\wedge S'=O$,　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$

(2)　$S\wedge S'=O$,　$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

(3)　$S\wedge I=O$,　$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$

(4)　$S\wedge I=O$,　$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

（証明）

(1)$\Longleftrightarrow$(3)　性質15による。

(2)$\Longleftrightarrow$(4)　性質26による。

(3)$\Longleftrightarrow$(4)　性質28による。　（証明終）

なお，上の性質33に関して，(1)$\Longleftrightarrow$(2)であることは性質29からもわかる。

［定義7］［5，28］

ブール行列Sが次の条件を満たすならば，Sはsemiorderを表現する行列である。

(1)　$S\wedge I=O$

(2)　$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$

(3)　$S\times S\leqq S\diamond S$

この定義７が定義６と等価であることを示す。まず上の定義の条件を満たす行列Sの性質を調べる。次の性質はよく知られている。

［性質34］［９，10］

$S\wedge I=O,\ S\times S\leqq S\diamond S\Rightarrow S\times S\leqq S$

（証明）　一般に

$S\times S\leqq S\diamond S\Longleftrightarrow S\times S\times\overline{S'}\leqq S$

であり，また$S\wedge I=O$から$I\leqq\overline{S'}$となるので

$S\times S=S\times S\times I\leqq S\times S\times\overline{S'}\leqq S$となる。　（証明終）

上の性質34における$S\times S\leqq S\diamond S$を満たすSで表現される関係はsemitransitive関係と呼ばれる［８，10］。上の証明中で示しているように$S\times S\leqq S\diamond S$は$S\times S\times\overline{S'}\leqq S$と同値であるが，さらに，$S\times S\leqq S\diamond S$を変形することにより，このほかにも様々な同値条件が得られる。

［性質35］　$S\wedge S'=O,\ S\times S\leqq S\diamond S\Rightarrow S\times S\leqq S$

（証明）　$S\wedge S'=O$のとき$S\wedge I=O$であるから性質34による。　（証明終）

［注意12］　一般には，

$S\wedge S'=O,\ S\times S\leqq S\Rightarrow S\times S\leqq S\diamond S$

とはならない。いま，

$$S=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

とおけば，

$S\wedge S'=O$

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\leqq S$$

$$S\diamond S=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\diamond\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

となり，$S\wedge S'=O$で，かつ$S\times S\leqq S$であるけれども，$S\times S\leqq S\diamond S$とはなっていない。

［性質36］　$S\times S\leqq S\diamond S$のとき

$$S\wedge I=O\Longleftrightarrow S\wedge S'=O$$

(証明)

(1)　$S\wedge I=O$のとき

性質34により，$S\times S\leqq S$となる。したがって$S\wedge I=O$のとき，性質14によって$S\wedge S'=O$となる。

(2)　$S\wedge S'=O$のとき

明らかに$S\wedge I=O$となる。　(証明終)

すでに性質28で示しているように，

$S\wedge I=O$のとき

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Longleftrightarrow S\times\overline{S'}\times S\leqq S$$

となる。しかし，次の注意13で示すように，条件の$S\wedge I=O$を，$S\times S\leqq S\diamond S$で置き換えることはできない。

［注意13］　一般には，

$S\times S\leqq S\diamond S$のとき

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S\Rightarrow S\times\overline{S'}\times S\leqq S$$

とはならない。いま，注意9と同じく

$$S=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

とおけば,

$$S\diamond S=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\diamond\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$S\times S=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\leqq S\diamond S$$

となり，また注意9で示したように

$$\overline{S}\wedge\overline{S'}=O$$

$$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S=O\leqq S$$

$$S\times\overline{S'}\times S=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

となって，$S\times S\leqq S\diamond S$で，かつ$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$であるけれども，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$とはなっていない。

［性質37］［5］

$$S\times S\leqq S\diamond S\Longleftrightarrow(S\times\overline{S'})\wedge(S'\times\overline{S})=O$$

(証明)

$$S\times S\leqq S\diamond S$$

$$\Longleftrightarrow S\leqq\overline{S'}\diamond S\diamond S$$

$$\Longleftrightarrow S\times\overline{S'}\leqq\overline{S'}\diamond S$$

$\Longleftrightarrow (S\times\overline{S'})\wedge\overline{(\overline{S'}\diamond S)}=O$

$\Longleftrightarrow (S\times\overline{S'})\wedge(S'\times\overline{S})=O$　(証明終)

上の性質の右辺は，さらに以下のように変形できる。

$(S\times\overline{S'})\wedge(S'\times\overline{S})=O$

$\Longleftrightarrow \overline{(S\times\overline{S'})}\vee\overline{(S'\times\overline{S})}=E$

$\Longleftrightarrow (\overline{S}\diamond S')\vee(\overline{S'}\diamond S)=E$

$\Longleftrightarrow (S\diamond\overline{S'})'\vee(\overline{S'}\diamond S)=E$

$\Longleftrightarrow (S\diamond\overline{S'})\vee(\overline{S'}\diamond S)'=E$

変形によって得られた式中の$S\diamond\overline{S'}$はSの表現する関係のright traceとよばれ，$\overline{S'}\diamond S$に相当するものはleft traceとよばれる［4，10］。

［性質38］　$S\times S\leqq S\diamond S\Rightarrow(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=O$

（証明）　性質37によって

$S\times S\leqq S\diamond S\Longleftrightarrow(S\times\overline{S'})\wedge(S'\times\overline{S})=O$

であり，また明らかに

$(S\times\overline{S'})\wedge(S'\times\overline{S})\geqq(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))$

であるから

$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=O$

となる。　(証明終)

［性質39］

$S\times S\leqq S\diamond S\Rightarrow(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$

（証明）　性質38による。　(証明終)

［性質40］　$S\times S\leqq S$のとき

$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\leqq S\diamond S$

（証明）

(1)　$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$のとき

$s_{ik}=1$，$s_{kj}=1$とする。このとき$s_{il}=0$，$s_{lj}=0$とおくと矛盾の生じることを示す。$s_{ik}=1$，$s_{il}=0$のとき$S\times S\leqq S$によって$s_{kl}=0$となる。同様に$s_{kj}=1$，$s_{lj}=0$によって$s_{lk}=0$となる。$s_{kj}=1$と$s_{kl}=0$によって$s_{jl}=0$となり，

$s_{ik}=1$，$s_{lk}=0$ によって$s_{li}=0$ となる。したがって，

$$s_{kj}\wedge(\overline{s_{jl}}\wedge\overline{s_{lj}})=1,\quad s_{ik}\wedge(\overline{s_{il}}\wedge\overline{s_{li}})=1$$

となり，$s_{kl}\vee s_{lk}=1$ が得られる。しかし，これは矛盾する。ゆえに，$S\times S\leqq S\diamond S$となる。

(2) $S\times S\leqq S\diamond S$のとき

性質39によって

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$ (証明終)

［性質41］ $S\wedge I=O$，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\leqq S\diamond S$$

（証明） $S\wedge I=O$，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき，性質25によって$S\times S\leqq S$となるから，性質40による。 (証明終)

［注意14］ 上の性質の条件の$S\wedge I=O$をはずすことはできない。すなわち，一般には，

$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Rightarrow S\times S\leqq S\diamond S$$

とはいえない。いま，注意6と同じく

$$S=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

とおき，注意6を参照すれば

$$\overline{S'}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$S\times\overline{S'}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$S\times\overline{S'}\times S=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\leqq S$$

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

$$S\times S=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$S\diamond S=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\diamond\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

となり，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$で，かつ

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

であるけれども，$S\times S\leqq S\diamond S$とはなっていない。

［注意15］　上の性質41において，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$をはずすこともできない。すなわち，一般には，

$S\wedge I=O$のとき

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Rightarrow S\times S\leqq S\diamond S$$

とはいえない。いま，

$$S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\overline{S}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \overline{S'}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \overline{S}\wedge\overline{S'}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))=S\wedge S'\leqq S\vee S'$$

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$S\diamond S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\diamond\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

であって，$S\wedge I=O$で

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'$$

となるけれども，$S\times S\leqq S\diamond S$とはなっていない。

［性質42］　$S\wedge S'=O$，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\leqq S\diamond S$$

（証明）　性質41による　（証明終）

［性質43］　$S\wedge I=O$，$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき

$$(S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\wedge(S'\times(\overline{S}\wedge\overline{S'}))\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\leqq S\diamond S$$

(証明)　$S \wedge I = O$, $S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'}) \times S \leqq S$のとき，性質12によって$S \times S \leqq S$となるから，性質40による。　(証明終)

[性質44]　$S \wedge S' = O$, $S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'}) \times S \leqq S$のとき

$$(S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'})) \wedge (S' \times (\overline{S} \wedge \overline{S'})) \leqq S \vee S' \Longleftrightarrow S \times S \leqq S \diamond S$$

(証明)　性質43による　(証明終)

[性質45]

$$S \times S \leqq S \diamond S \Rightarrow S \times S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'}) \leqq S \vee S'$$

(証明)

$$\begin{aligned} & S \times S \leqq S \diamond S \\ \Longleftrightarrow & S \times S \times \overline{S'} \leqq S \\ \Longrightarrow & S \times S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'}) \leqq S \\ \Longrightarrow & S \times S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'}) \leqq S \vee S' \end{aligned}$$

(証明終)

[性質46]　$S \times S \leqq S$のとき

$$S \times S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'}) \leqq S \vee S' \Longleftrightarrow S \times S \leqq S \diamond S$$

(証明)　性質20および性質40による。　(証明終)

[性質47]　$S \wedge I = O$, $S \times \overline{S'} \times S \leqq S$のとき

$$S \times S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'}) \leqq S \vee S' \Longleftrightarrow S \times S \leqq S \diamond S$$

(証明)　$S \wedge I = O$, $S \times \overline{S'} \times S \leqq S$のとき，性質25によって$S \times S \leqq S$となるから性質46による。　(証明終)

[注意16]　一般には，

$S \times \overline{S'} \times S \leqq S$のとき，

$$S \times S \times (\overline{S} \wedge \overline{S'}) \leqq S \vee S' \Rightarrow S \times S \leqq S \diamond S$$

とはならない。いま，

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$S'=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\1&1&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad \overline{S'}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$S\times\overline{S'}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S\times\overline{S'}\times S=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\leqq S$$

$$S\times S=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{S}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{S}\wedge\overline{S'}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$S\vee S'=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\leqq S\vee S'$$

$$S\diamond S=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\diamond\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

となり，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$で，かつ$S\times S\times(\overline{S'}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'$であるけれども$S\times S\leqq S\diamond S$とはなっていない。

［性質48］　$S\wedge S'=O$，$S\times\overline{S'}\times S\leqq S$のとき

$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\leqq S\diamond S$

（証明）　性質47による。　（証明終）

［性質49］　$S\wedge I=O$，$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき

$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\leqq S\diamond S$

（証明）　$S\wedge I=O$，$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき性質12によって$S\times S\leqq S$となるから性質46による。　（証明終）

［性質50］　$S\wedge S'=O$，$S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\times S\leqq S$のとき

$S\times S\times(\overline{S}\wedge\overline{S'})\leqq S\vee S'\Longleftrightarrow S\times S\leqq S\diamond S$

（証明）　性質49による。　（証明終）

［性質51］　定義６の条件$\Longleftrightarrow$定義７の条件

（証明）　性質41による。　（証明終）

［性質52］

定義１の条件$\Longleftrightarrow$定義７の条件および$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$

（証明）

定義１の条件$\Longleftrightarrow$定義３の条件および$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$（性質16）

$\Longleftrightarrow$定義５の条件および$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$（性質24）

$\Longleftrightarrow$定義６の条件および$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$（性質32）

$$\Longleftrightarrow \text{定義7の条件および} T = \overline{S} \wedge \overline{S'} \ \text{（性質51）}$$

（証明終）

この性質52は，Luceによって与えられた最初の定義［19］とScott and Suppesによって与えられた定義［28］が，実質的に等価であることを示している。

4．まとめ

Luceによって与えられたsemiorderに関する最初の定義とScott and Suppesによって与えられたsemiorderに関する定義が，実質的に等価であることを，ブール行列を用いて示した。一般には，Scott and Suppesのsemiorderの定義はLuceの定義を論理的に簡単化したものとして理解されており，両者の等価性は，論理的には知られていると思われるが，本論文では，両者の定義をブール行列で表現し，それらの等価性をブール行列の性質として示した。ブール行列を用いることにより議論が明確になり，semiorderのもつ性質も明らかとなる。またLuceの定義における一部条件の冗長性なども明白となる。さらに，定義の中の条件に関して，ある性質が成立するために必要な条件などがはっきりする。また，ブール行列を用いて議論することにより，これまで知られている性質の一般化も可能と考えられる。

なお，semiorderに関しては，Luceのsemiorderについても，またScott and Suppesのsemiorderについても，本論文で述べた以外に様々な性質や種々の同値条件が知られている。これらをブール行列を用いて表現し考察をおこなえば，さらに興味ある性質が得られるものと考えられる。また，今後の課題として，本論文で一部示している推移性のもとでのFerrers関係やsemitransitive関係についても，考察の余地があると思われる。これらについては次の機会に報告したい。

謝辞　本研究の一部は山口大学経済学部学術振興基金の研究助成によるものである。与えられたご援助に対し深謝する。

文　献

[1] Carnap, R.: "Introduction to Symbolic Logic and its Applications, " Dover Publications, New York (1958).

[2] Doignon, J.-P., Ducamp, A., and Falmagne, J.-C.: "On realizable biorders and the biorder dimention of a relation," Journal of Mathematical Psychology, 28, pp. 73-109 (1984).

[3] Doignon, J.-P., Ducamp, A., and Falmagne, J.-C.: "On the separation of two relations by a biorder or a semiorder," Mathematical Social Sciences, 13, pp. 1-18 (1987).

[4] Doignon, J.-P., Monjardet, B., Roubens, M., and Vincke, Ph.: "Biorder families, valued relations, and preference modelling," Journal of Mathematical Psychology, 30, pp. 435-480 (1986).

[5] Ducamp, A. and Falmagne, J.-C.: "Composite Measurement," Journal of Mathematical Psychology, 6, pp. 359-390 (1969).

[6] Fishburn, P. C.: "Intransitive indifference with unequal indifference intervals," Journal of Mathematical Psychology, 7, pp. 144-149 (1970).

[7] Fishburn, P. C.: "Intransitive indifference in preference theory: A survey," Operations Research, 18, pp. 207-228 (1970).

[8] Fishburn, P. C.: "Suborders on commodity spaces," Journal of Economic Theory, 2, pp. 321-328 (1970).

[9] Fishburn, P. C.: "Semiorders and choice functions," Econometrica, Vol. 43, No. 5-6, pp. 975-977 (1975).

[10] Fodor, J. and Roubens, M.: "Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support," Kluwer Academic Pub., Dordrecht (1994).

[11] Gensemer, S. H.: "Continuous semiorder representations," Journal of Mathematical Economics, 16, pp. 275-289 (1987).

[12] Golumbic, M. C.: "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs," Academic Press, New York (1980).

[13] 橋本　寛："非反射的推移関係"，山口経済学雑誌，第46巻，第4号，pp. 479-498（平成10年7月）.

[14] 橋本　寛："Luceによるsemiorderのブール行列表現"，山口経済学雑誌，第48巻，第3号，pp. 453-475（平成12年5月）.

[15] Jacquet-Lagrèze. E.: "How we can use the notion of semi-orders to

build outranking relations in multi-criteria decision making" in Utility, Probability, and Human Decision Making (Wendt, D. and Vlek, C. eds.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1975), pp. 87-112.

[16] Jamison, D. T., and Lau, L. J.: "Semiorders and the theory of choice," Econometrica, Vol. 41, No. 5, pp. 901-912 (1973).

[17] Kim K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).

[18] Krantz, D.: "A survey of measurement theory" in Mathematics of the Decision Sciences Part 2 (Dantzig, G. B. and Veinott, A. F., Jr. eds.), American Mathematical Society, Providence (1968), pp. 314-350.

[19] Luce, R. D.: "Semiorders and a theory of utility discrimination," Econometrica, 24, pp. 178-191 (1956).

[20] Luce, R. D.: "Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis," John Wiley & Sons, New York (1959).

[21] Luce, R. D. and Galanter, E.: "Discrimination" in Handbook of Mathematical Psychology, Vol. I (Luce, R. D., Bush, R. R. and Galanter, E., eds.), John Wiley & Sons, New York (1963), pp. 191-243.

[22] Monjardet, B.: "A generalization of probabilistic consistency: Linearity conditions for valued preference relations" in Non-Conventional Preference Relations in Decision Making (Kacprzyk, J. and Roubens, M. eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 301, Springer-Verlag, Berlin (1988), pp. 36-53.

[23] Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to social, biological, and environmental problems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

[24] Roberts, F. S.: "Measurement Theory, with Applications to Decision-making, Utility and the Social Sciences," Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1979).

[25] Roubens, M. and Vincke, Ph.: "On families of semiorders and interval orders inbedded in a valued structure of preference: A survey," Information Sciences, 34, pp. 187-198 (1984).

[26] Roubens, M. and Vincke, Ph.: "Preference Modelling," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag, Berlin

(1985).

[27] Schmidt, G, and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).

[28] Scott, D. and Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement," The Journal of Symbolic Logic, 23, pp. 113-128, (1958).