# 関係代数的証明

柏 木 芳 美

## 1　はじめに

［8］ではブール行列に関する色々な性質が成分を用いた証明ではなく極力関係代数的に証明されている。一方，例えば［7］を見ると，ところどころブール行列の成分を用いた証明が散見される。この論文では，［7］および［7］で引用されている性質のうち成分を用いた証明をほとんどすべて関係代数的な証明に変える。キーポイントはSchröder equivalences（命題1）である。尚，命題12を除き，命題自体には真新しいものはなく，証明方法が異なっているだけである。

## 2　準備

この論文では，ブール代数$\{0, 1\}$を成分とする同じ集合上のブール行列を考える。従って，必ずしも有限とは限らない。以下，$Q, R, S$はすべてブール行列とする。

［7］の記号をほとんどそのまま用いる。異なる記号は，積$RS = R \times S$と転置行列$R^t = R'$だけである。

次の命題が重要な役割を果たす。証明は［8, Proposition 2.3.4］を参照。

**命題1（Schröder equivalences）** $QR \leqq S$と$Q^t\overline{S} \leqq \overline{R}$と$\overline{S}R^t \leqq \overline{Q}$は同値。

補題 3 のために次の命題が必要である。証明は[ 8 , Corollary 2 . 3 . 5 ]を参照。

**命題 2** (Dedekind formula) $QR \wedge S \leqq (Q \wedge SR^t)(R \wedge Q^tS)$。

この論文で用いるその他の性質を補題としてまとめておく。

**補題 3** 次が成り立つ。

(1) $Q \wedge R \leqq S$ と $Q \leqq \overline{R} \vee S$ は同値。

(2) $R\overline{R^t} \leqq \overline{I}$。

(3) $R \leqq I$ ならば $R^t = R$。特に $I^t = I$。

(4) ([ 8 , Exercise 2 . 3 . 7 ]) $R \leqq I$ ならば $R^2 = R$。

(5) $R \vee R^t = E$ ならば $I \leqq R$。

**証明**

(1) $Q \wedge R \leqq S$ とすると

$$Q = Q \wedge E = Q \wedge (\overline{R} \vee R) = (Q \wedge \overline{R}) \vee (Q \wedge R) \leqq \overline{R} \vee S。$$

逆に $Q \leqq \overline{R} \vee S$ とすると

$$Q \wedge R \leqq (\overline{R} \vee S) \wedge R = (\overline{R} \wedge R) \vee (S \wedge R) \leqq S。$$

(2) $IR = R$ なので $IR \leqq R$。この関係式に命題 1 を適用すると

$$IR \leqq R \Longleftrightarrow \overline{R}R^t \leqq \overline{I}。$$

$\overline{R}R^t \leqq \overline{I}$ の $R$ に $\overline{R}$ を代入する。

(3) 命題 2 より

$$R = RI \wedge I \leqq (R \wedge II^t)(I \wedge R^tI) \leqq I^tR^t = (RI)^t = R^t。$$

この関係式の転置をとって $R^t \leqq R$。よって $R^t = R$。

(4) $R \leqq I$ より $R^2 \leqq R$。一方，命題 2 と $I^t = I$ より

$$R = I \wedge R = II \wedge R \leqq (I \wedge RI^t)(I \wedge I^tR) \leqq R^2。$$

(5) まず

$$I=I\wedge E=I\wedge(R\vee R^t)=(I\wedge R)\vee(I\wedge R^t)。$$

(3)より $I\wedge R^t=(I\wedge R^t)^t=I\wedge(R^t)^t=I\wedge R$。よって $I=I\wedge R\leqq R$。

ここに明示していない性質は［8］を参照。

## 3　結果

まず［7, 性質8］すなわち［5, 性質34］から始める。

**命題4**　$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R$ と $R^2\leqq R$ は同値。

**証明**　$R^2\leqq R$ とする。このとき，［5, 性質34］の証明と全く同様に，$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R^2\leqq R$。

次に逆を示す。［5］では成分を用いているが，ここでは関係代数的な証明を与える。

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R$ と仮定する。

$$R=R\wedge E=R\wedge(I\vee\overline{I})=(R\wedge I)\vee(R\wedge\overline{I})。$$

よって，

$$\begin{aligned}R^2&=\{(R\wedge I)\vee(R\wedge\overline{I})\}\{(R\wedge I)\vee(R\wedge\overline{I})\}\\&=(R\wedge I)(R\wedge I)\vee(R\wedge I)(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge\overline{I})(R\wedge I)\vee(R\wedge\overline{I})(R\wedge\overline{I})。\end{aligned}$$

ここで，

$$(R\wedge I)(R\wedge I)\leqq IR=R,$$

$$(R\wedge I)(R\wedge\overline{I})\leqq IR=R,$$

$$(R\wedge\overline{I})(R\wedge I)\leqq RI=R,$$

$$(R\wedge\overline{I})(R\wedge\overline{I})\leqq R\ （仮定より）。$$

従って，$R^2\leqq R$。

次に［7, 性質12］について。これは［2, 性質1］と［5, 性質3と性質5］である。［2, 性質1］の証明は成分を用いている。［5, 性質3と性質5］は関係代数的に証明されているが，ここでは命題1と補題3(2)を用いた別証を与える。

**命題5**　次の条件は同値である。

(1) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$。

(2) $R(R\wedge\overline{I})=R\wedge\overline{I}$。

(3) $(R\wedge\overline{I})R\leqq R\wedge\overline{I}$。

(4) $R^2\leqq R$, $\nabla R\leqq I$。

**証明**　[(1)$\Longleftrightarrow$(2), (1)$\Longleftrightarrow$(3)]　$R\wedge\overline{I}\leqq R$ より(2)$\Longrightarrow$(1)と(3)$\Longrightarrow$(1)は明らか。(1)を仮定する。$R=(R\wedge I)\vee(R\wedge\overline{I})$ より

$$R(R\wedge\overline{I})=(R\wedge I)(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge\overline{I})^2\leqq I(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge\overline{I})=R\wedge\overline{I},$$

$$(R\wedge\overline{I})R=(R\wedge\overline{I})(R\wedge I)\vee(R\wedge\overline{I})^2\leqq(R\wedge\overline{I})I\vee(R\wedge\overline{I})=R\wedge\overline{I}。$$

よって(2)と(3)が成り立つ。

[(2)$\Longrightarrow$(4)]　命題1より

$$\begin{aligned} R(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I} &\Longleftrightarrow R^t\,\overline{R\wedge\overline{I}}\leqq\overline{R\wedge\overline{I}} \\ &\Longleftrightarrow R^t(\overline{R}\vee I)\leqq\overline{R}\vee I \\ &\Longleftrightarrow R^t\overline{R}\vee R^t\leqq\overline{R}\vee I。\end{aligned}$$

よって，$R^t\leqq\overline{R}\vee I$。従って，

$$\nabla R=R\wedge R^t\leqq R\wedge(\overline{R}\vee I)=(R\wedge\overline{R})\vee(R\wedge I)=R\wedge I\leqq I。$$

また，$R=(R\wedge I)\vee(R\wedge\overline{I})$ なので

$$R^2=R(R\wedge I)\vee R(R\wedge\overline{I})\leqq RI\vee(R\wedge\overline{I})=R。$$

[(4)$\Longrightarrow$(1)]　$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R^2\leqq R$ なので $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{I}$ を示せばよい。$R\wedge R^t\leqq I$ より $\overline{I}\leqq\overline{R}\vee\overline{R^t}$。よって，$R\wedge\overline{I}\leqq(R\wedge\overline{R})\vee(R\wedge\overline{R^t})=R\wedge\overline{R^t}$。従って，$(R\wedge\overline{I})^2\leqq(R\wedge\overline{R^t})(R\wedge\overline{R^t})\leqq R\overline{R^t}$。よって，補題3(2)より $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{I}$。これで証明が終わった。

[7，性質20と性質22] について。

**命題 6** $R\wedge\overline{I}\leqq S$ かつ $S^2\leqq\overline{R^t}$ ならば $RS\leqq\overline{R^t}$ かつ $SR\leqq\overline{R^t}$。

**証明** まず命題1より

$$\begin{aligned} RS\leqq\overline{R^t} &\Longleftrightarrow R^tS^t\leqq\overline{R} \\ &\Longleftrightarrow (SR)^t\leqq\overline{R} \\ &\Longleftrightarrow SR\leqq\overline{R^t}。\end{aligned}$$

よって，$R\wedge\overline{I}\leqq S$ かつ $S^2\leqq\overline{R^t}$ ならば $RS\leqq\overline{R^t}$ となることを示せばよい。

$$RS=\{(R\wedge I)\vee(R\wedge\overline{I})\}S=(R\wedge I)S\vee(R\wedge\overline{I})S$$

で $(R\wedge\overline{I})S\leqq S^2\leqq\overline{R^t}$ なので $(R\wedge I)S\leqq\overline{R^t}$ となることを示せばよい。ここで

$$\begin{aligned}(R\wedge I)S&=(R\wedge I)\{(S\wedge I)\vee(S\wedge\overline{I})\} \\ &=(R\wedge I)(S\wedge I)\vee(R\wedge I)(S\wedge\overline{I})。\end{aligned}$$

補題3(4)より $S\wedge I=(S\wedge I)^2\leqq S^2\leqq\overline{R^t}$ なので

$$(R\wedge I)(S\wedge I)\leqq I(S\wedge I)=S\wedge I\leqq\overline{R^t}。$$

よって，$(R\wedge I)(S\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}$ を示せばよい。$S^2\leqq\overline{R^t}$ に命題1を適用すると

$$\begin{aligned} S^2\leqq\overline{R^t} &\Longleftrightarrow S^tR^t\leqq\overline{S} \\ &\Longleftrightarrow RS\leqq\overline{S^t}。\end{aligned}$$

また，$R\wedge\overline{I}\leqq S$ より $\overline{S^t}\leqq\overline{R^t}\vee I$。よって，$RS\leqq\overline{R^t}\vee I$。従って，

$$\begin{aligned}(R\wedge I)(S\wedge\overline{I})&\leqq RS\wedge\overline{I} \\ &\leqq(\overline{R^t}\vee I)\wedge\overline{I} \\ &\leqq(\overline{R^t}\wedge\overline{I})\vee(I\wedge\overline{I}) \\ &\leqq\overline{R^t}。\end{aligned}$$

これで証明が終わった。

[7，性質27] について。この性質の証明には [7] で性質20から性質26まで用いられている。ここでは命題1を用いた簡潔な証明を与える。[7，

性質27］とは少し順番を変えて，

**命題 7**　次の条件は同値である。

(1) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R^t}$。

(2) $R(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}\vee I$。

(3) $(R\wedge\overline{I})R\leqq\overline{R^t}\vee I$。

(4) $R^2\leqq\overline{R^t}\vee I$。

(5) $R(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}$。

(6) $R(R\wedge\overline{I})R\leqq\overline{R^t}$。

**証明**　［(1)$\Longleftrightarrow$(2)$\Longleftrightarrow$(3)］命題1より

$$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R^t}\Longleftrightarrow(R\wedge\overline{I}^t)R^t\leqq\overline{R\wedge\overline{I}}\Longleftrightarrow R^t(R\wedge\overline{I})^t\leqq\overline{R\wedge\overline{I}}\,。$$

ここで，$(R\wedge\overline{I})^tR^t=\{R(R\wedge\overline{I})\}^t$，$\overline{R\wedge\overline{I}}=\overline{R}\vee I$。よって，

$$\begin{aligned}(R\wedge\overline{I})^tR^t\leqq\overline{R\wedge\overline{I}}&\Longleftrightarrow\{R(R\wedge\overline{I})\}^t\leqq\overline{R}\vee I\\&\Longleftrightarrow R(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}\vee I。\end{aligned}$$

これで(1)と(2)の同値性が示された。同様に，

$$R^t(R\wedge\overline{I})^t\leqq\overline{R\wedge\overline{I}}\Longleftrightarrow(R\wedge\overline{I})R\leqq\overline{R^t}\vee I。$$

よって(1)と(3)も同値である。

［(4)$\Longleftrightarrow$(5)$\Longleftrightarrow$(6)］命題1より

$$R^2\leqq\overline{R^t}\vee I\Longleftrightarrow R^t(R^t\wedge\overline{I})\leqq\overline{R}\Longleftrightarrow(R^t\wedge\overline{I})R^t\leqq\overline{R}。$$

また，

$$R^t(R^t\wedge\overline{I})\leqq\overline{R}\Longleftrightarrow(R\wedge\overline{I})R\leqq\overline{R^t}$$

$$(R^t\wedge\overline{I})R^t\leqq\overline{R}\Longleftrightarrow R(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}。$$

［(5)$\Longrightarrow$(2)］明らか。

［(1)，(2)，(3)$\Longrightarrow$(4)］$R=(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)$ なので

$$\begin{aligned}R^2&=\{(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)\}\{(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)\}\\&=(R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})(R\wedge I)\vee(R\wedge I)(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)^2。\end{aligned}$$

ここで，(1)，(2)，(3)より

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R^t}$,

$(R\wedge\overline{I})(R\wedge I)\leqq(R\wedge\overline{I})R\leqq\overline{R^t}\vee I$,

$(R\wedge I)(R\wedge\overline{I})\leqq R(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}\vee I$,

$(R\wedge I)^2\leqq I^2=I$。

従って $R^2\leqq\overline{R^t}\vee I$。

［7, 性質28］について。これを示す前に

**補題 8** （［1, 性質10］）$\nabla R\leqq I$ と $R\leqq\overline{R^t}\vee I$ は同値。

**証明** 補題 3 (1)より明らか。

**命題 9** $R\vee R^t=E$ のとき命題 7 の各条件は

(7) $R^2=R$ かつ $\nabla R=I$

と同値。

**証明** (7)$\Longleftrightarrow$命題 7 (4)を示す。$R^2=R$ かつ $\nabla R=I$ とすると上の補題より $R^2=R\leqq\overline{R^t}\vee I$。次に $R\vee R^t=E$ と $R^2\leqq\overline{R^t}\vee I$ を仮定する。$R\vee R^t=E$ より $\overline{R^t}\leqq R$。また，補題 3 (5)より $I\leqq R$。よって，$R^2\leqq R\vee I\leqq R$。$I\leqq R$ より $R\leqq R^2$。従って，$R^2=R$。よって $R=R^2\leqq\overline{R^t}\vee I$ なので上の補題より $\nabla R\leqq I$。また $I\leqq R$ の転置をとって $I\leqq R^t$。よって，$I\leqq\nabla R$。従って，$\nabla R=I$。

［7, 性質29と性質30］について。これらは［5, 性質20と性質21］で，証明は成分を用いている。ここでは命題 9 を用いる。

**命題10** (1) $R\vee R^t=E$ かつ $R(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}$ と $R(R\wedge\overline{I})=\overline{R^t}=R\wedge\overline{I}$ は同値である。

(2) $R\vee R^t=E$ かつ $(R\wedge\overline{I})R\leqq\overline{R^t}$ と $(R\wedge\overline{I})R=\overline{R^t}=R\wedge\overline{I}$ は同値であ

る。

**証明**　(1)　[$R(R\wedge\overline{I})=\overline{R^t}=R\wedge\overline{I}\Longrightarrow R\vee R^t=E$ かつ $(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}$] これは [5, 性質20] の証明と同様に,

$$E=\overline{R^t}\vee R^t=(R\wedge\overline{I})\vee R^t\leqq R\vee R^t\leqq E。$$

[$R\vee R^t=E$ かつ $R(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}\Longrightarrow R(R\wedge\overline{I})=\overline{R^t}=R\wedge\overline{I}$] $R\vee R^t=E$ より $\overline{R^t}\leqq R$ かつ $I\leqq R$。よって, $\overline{R^t}\vee I\leqq R$。また命題9より $R=R^2\leqq\overline{R^t}\vee I$。よって, $R=\overline{R^t}\vee I$。ここで,

$$\begin{aligned} R=\overline{R^t}\vee I &\Longleftrightarrow R^t=\overline{R}\vee I \\ &\Longleftrightarrow \overline{R^t}=R\wedge\overline{I}。\end{aligned}$$

また,

$$\overline{R^t}=R\wedge\overline{I}=I(R\wedge\overline{I})\leqq R(R\wedge\overline{I})。$$

(2) (1)の証明とほとんど同様。

**注意11**　上の(1)の [$R\vee R^t=E$ かつ $R(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R^t}\Longrightarrow R(R\wedge\overline{I})=\overline{R^t}=R\wedge\overline{I}$] の証明で, 命題9と [7, 性質2] ([6, 性質14]) を用いて $R=\overline{R^t}\vee I$ を示してもよい。

[7, 性質34と性質36] について。これらの性質は少し一般化された形で言える。

**命題12** 次が成り立つ。

(1) $RS\leqq S\wedge\overline{I}$ ならば $RS\leqq\overline{R^t}$。特に, $RS\leqq R\wedge\overline{I}\leqq S$ ならば $RS\leqq\overline{R^t}$。

(2) $SR\leqq S\wedge\overline{I}$ ならば $SR\leqq\overline{R^t}$。特に, $SR\leqq R\wedge\overline{I}\leqq S$ ならば $SR\leqq\overline{R^t}$。

**証明**　(1) 命題1より

$$\begin{aligned} RS\leqq\overline{I} &\Longleftrightarrow R^tI\leqq\overline{S} \\ &\Longleftrightarrow R^t\leqq\overline{S} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow S \leqq \overline{R^t}。$$

よって，$RS \leqq S \leqq \overline{R^t}$。

(2) (1)の証明と同様。

［7，性質35と性質37］について。順番を入れ換えて

**命題13** (1) $R(R\wedge\overline{I}) \leqq R\wedge\overline{I}$ ならば $R(R\wedge\overline{I}) \leqq \overline{R^t}$。

(2) $(R\wedge\overline{I})^2 \leqq R\wedge\overline{I}$ ならば $R(R\wedge\overline{I}) \leqq \overline{R^t}$。

(3) $(R\wedge\overline{I})R \leqq R\wedge\overline{I}$ ならば $(R\wedge\overline{I})R \leqq \overline{R^t}$。

(4) $(R\wedge\overline{I})^2 \leqq R\wedge\overline{I}$ ならば $(R\wedge\overline{I})R \leqq \overline{R^t}$。

**証明**　命題1より

$$\begin{aligned} R(R\wedge\overline{I}) \leqq \overline{R^t} &\Longleftrightarrow R^t(R\wedge\overline{I})^t \leqq \overline{R} \\ &\Longleftrightarrow \{(R\wedge\overline{I})R\}^t \leqq \overline{R} \\ &\Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})R \leqq \overline{R^t}。\end{aligned}$$

よって(1)と(2)を示せば(3)と(4)は言える。

(1) 命題12で $S=R\wedge\overline{I}$ とすればよい。

(2) 命題5より $(R\wedge\overline{I})^2 \leqq R\wedge\overline{I}$ と $R(R\wedge\overline{I}) \leqq R\wedge\overline{I}$ は同値なので(1)より。

［7，性質38］について。これは［1，性質11］であるが本質的には補題8（［1，性質10］）である。

最後に［7，性質42と性質43］。

**命題14** 次が成り立つ。

(1) $R(R\wedge\overline{I}) = R\wedge\overline{I}$ ならば $R^2=R$ かつ $\nabla R \leqq I$。

(2) $(R\wedge\overline{I})R = R\wedge\overline{I}$ ならば $R^2=R$ かつ $\nabla R \leqq I$。

**証明**　まとめて証明する。(1)，(2)いずれの場合でも命題5より$R^2 \leqq R$で$\nabla R \leqq I$。よって，$R \leqq R^2$を示せばよい。

$$R=(R \wedge \overline{I}) \vee (R \wedge I)$$

に注意すると，$R \wedge \overline{I} \leqq R^2$，$R \wedge I \leqq R^2$を示せばよい。

(1)より

$$R \wedge \overline{I}=R(R \wedge \overline{I}) \leqq R^2。$$

(2)より

$$R \wedge \overline{I}=(R \wedge \overline{I})R \leqq R^2。$$

また，$R \wedge I \leqq I$なので補題3(4)より$R \wedge I=(R \wedge I)^2 \leqq R^2$。

## 4　問題点

この論文では［7］で示されたほとんどの性質の関係代数的証明を与えた。Schröder equivalences（命題1）を用いることが1つのキーポイントであった。ところで，［7］で引用されている性質19の関係代数的証明がまだできていない。本質的には次の命題の関係代数的証明である。

**命題15**（［3，性質11］）$R \vee R^t \vee I=E$のとき，ある$l(l=0,1,2,\cdots)$に対して$(R \wedge \overline{I})^{2+3l} \leqq R \vee \overline{R^t} \vee I$ならば$R^2 \leqq R \vee I$。

また，次の命題の関係代数的証明も興味のあるところである。

**命題16**（［3，性質10］）$R^5 \leqq R \vee I$ならば$R^2 \leqq R \vee \overline{R^t} \vee I$。

## 参考文献


[1] 橋本寛："連結的推移関係行列の性質II", 山口大学経済学雑誌, 第35巻, 第3・4号, pp.281-293 (1986).

[2] 橋本寛："連結的関係に関する若干の性質", 山口大学経済学雑誌, 第36巻, 第5・6号, pp.245-261 (1987).

[3] 橋本寛："連結的関係行列の初等的性質", 山口大学経済学雑誌, 第38巻, 第3・4号, pp.557-576 (1989).

[4] 橋本寛："反射的で反対称的な連結的推移関係", 山口大学経済学雑誌, 第39巻, 第5・6号, pp.621-637 (1991).

[5] 橋本寛："反対称的推移関係", 山口大学経済学雑誌, 第41巻, 第5・6号, pp.473-489 (1994).

[6] 橋本寛："連結的な反対称的推移関係", 山口大学経済学雑誌, 第42巻, 第1・2号, pp.53-74 (1994).

[7] 橋本寛："反射的な連結的関係に関する若干の性質", 山口大学経済学雑誌, 第44巻, 第5・6号, pp.495-515 (1996).

[8] Schmidt, G. and Ströhlein, T. : "*Relations and Graphs*", Springer, Berlin (1993).