||||研究ノート||||

投資決定基準，不確実性及び最適投資*

中　村　　保

1．問題の所在

通常の静学的な企業理論においては，「企業は利潤を最大化する」ように行動する想定されている。これは資本主義経済においては，企業が「利潤を追求すること」を第1の行動基準としていると考えられることを反映しており，企業分析の第一次接近としては妥当な仮定であろう。動学的な行動を分析する際には，この「利潤最大化」という基準を異時点間のものに拡張して目的関数を設定する。例えば，設備投資理論においては，通常企業は利潤の割引現在価値(の合計)，すなわち企業価値，を最大化するものと想定されている。[1]しかし，この基準以外にも代表的な基準として，「(ケインズの)投資(資本)の限界効率と利子率の均等化」あるいは「企業の期末価値の最大化」というものが挙げられる。本稿の目的は，不確実性が存在する時，これらの代表的な意思決定基準のうちどれを選択するかによって最適な投資量がどのような影響を受けるのかを考察することにある。[2]

＊本稿は，山口大学の平成10年度教育研究特別経費（「ファイナンス研究教育の可能性と展望」)により助成を受けた研究成果の一部である。記して謝意を表したい。

1）企業の市場での評価は，その企業が将来にわたって生み出すことができる利潤の現在価値の合計に等しくなるはずである。もちろん，企業価値は潜在的に生み出しうる利潤の最大値を反映している。それゆえ，「企業価値の最大化」という表現は厳密には正しくない。正確に言うと，最大化されたもの(潜在的に達成可能なもの)が企業価値である。

2）企業の設備投資を考察する際には，「利潤最大化」あるいはその動学版である「企業価値最大化」という基準以外の基準，例えば「内部収益率の最大化」等が用いられることがある。その他の投資決定基準については，例えばHarcourt(1968)を参照。

不確実性が存在しない確定的な世界に住んでいる限り,「企業の目的は利潤の追求にある」と仮定するならば，たとえ異時点間の問題を考える場合でも，我々は企業の目的関数についてあまり神経質になる必要は無い。実際のところ，置塩(1988)が示しているように，①(ケインズの)資本(投資)の限界効率と利子率の均等化，②利潤の割引現在価値(の合計)の最大化（企業の計画期首の価値の最大化)，③企業の計画期末の価値の最大化，という上述の三つの基準はまったく同じ投資水準を企業に選択させる。まずこの点を確認しよう。

ここでは企業は 0 期に一回限りの投資Iを行い，1 期からT期までその投資から利潤$\pi_i(I)(i=1,2,\cdots,T)$を得ると想定しよう。企業は，投資財をp_Iの価格で購入し，その据付や新設備の導入に伴う組織の再編等のためにいわゆる内部調整費用$c(I)$を必要とする。利潤関数及び調整費用関数は以下のような通常の性質を持つものと想定しよう。

$$\pi_i'(I)>0, \qquad \pi_i''(I)\leq 0, \tag{1.1a}$$

$$c'(I)>0, \qquad c''(I)>0. \tag{1.1b}$$

また，単純化のために利子率rは全期間を通して一定であるとする。

1－1．投資の限界効率と利子率の均等化

ケインズ(Keynes 1936)によると，投資水準は資本(投資)の限界効率mが利子率と等しくなるように決定される。すなわち，

$$m(I)=r, \tag{1.2}$$

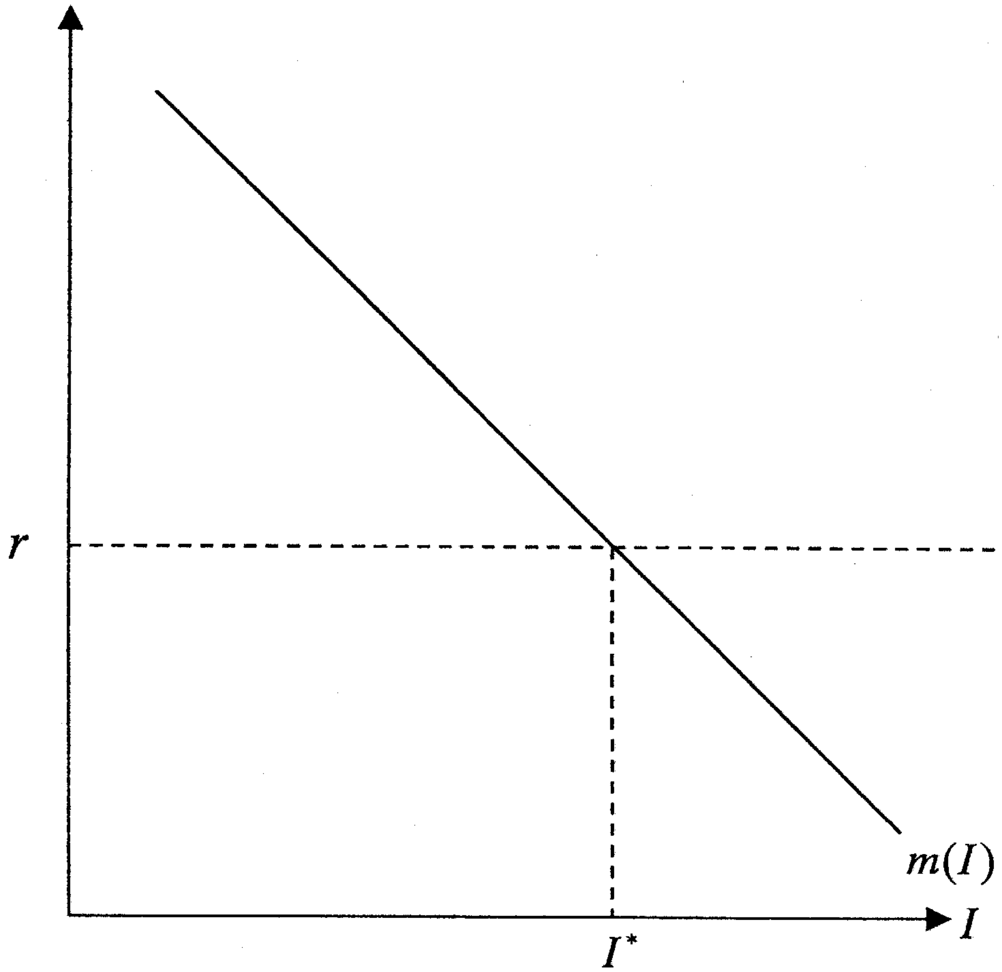
である。但し，資本の限界効率は以下の式を満足するmである。

$$p_I+c'(I)=\sum_{i=1}^{i=T}(1+m)^{-i}\pi_i'(I). \tag{1.3}$$

(1.3)式より

$$m'(I)=\frac{\sum_{i=1}^{i=T}(1+m)\pi_i''(I)-c''(I)}{\sum_{i=1}^{i=T}i(1+m)^{-i-1}\pi_i'(I)}<0, \tag{1.4}$$

であることが分かる。それゆえ，(1.2)式を満たす投資量I^*は第１図のように一意に決まる。



第１図：資本の限界効率と利子率の均等化による最適投資水準の決定

また，(1.2)式を(1.3)式に代入することより，投資の限界効率と利子率の均等化による投資決定の条件は以下のように書き換えられる。

$$p_I + c'(I) = \sum_{i=1}^{i=T} (1+r)^{-i} \pi_i'(I). \tag{1.5}$$

1－2．現在価値最大化

企業がIだけの投資を行ったとすると，企業が今期からT期にかけて獲得することができる（負の場合は「失う」）キャッシュフローは$\{-p_I I-c(I),\pi_1(I),\pi_2(I),\cdots,\pi_T(I)\}$，である。それゆえ，利子率で割り引いたキャッシュフローの合計$V(I,r)$は以下のようになる。

$$V(I,r)=\sum_{i=1}^{i=T}(1+r)^{-i}\pi_i(I)-p_I I-c(I). \tag{1.6}$$

(1.6)式を最大化するための一階の条件は以下の通りである。

$$p_I+c'(I)=\sum_{i=1}^{i=T}(1+r)^{-i}\pi_i'(I). \tag{1.7}$$

言うまでもなく(1.5)式と(1.7)式は全く同じである。すなわち，ケインズの投資決定基準と現在価値最大化基準は同一のものである。

1－3．期末価値最大化

企業が獲得したキャッシュフローを利子運用しながら次期に繰越してゆくとすると，T期末に蓄積される額$W(I,r)$は，

$$W(I,r)=\sum_{i=1}^{i=T}(1+r)^{(T-i)}\pi_i(I)-(1+r)^T[p_I I-c(I)]. \tag{1.8}$$

となる。もし企業がこの計画期末に実現する価値を最大化するように投資を決定すると仮定すると，最大化のための一階の条件は，

$$(1+r)^T[p_I-c'(I)]=\sum_{i=1}^{i=T}(1+r)^{(T-i)}\pi_i'(I). \tag{1.9}$$

である。この式の両辺を$(1+r)^T$で割ると次式を得る。

$$p_I+c'(I)=\sum_{i=1}^{i=T}(1+r)^{-i}\pi_i'(I). \tag{1.10}$$

(1.10)式は(1.5)式や(1.7)式と全く同じである。すなわち，ケインズの限界効率基準，現在価値最大化基準，期末価値最大化基準，の三つの基準は全く

同一のものである。

これまでの議論では不確実性を全く考慮していない。通常の不確実性を考慮した投資モデルでは，企業は現在価値を最大化するように投資量を決定すると仮定されている。もし不確実性を考慮しても上記の三つの基準が同一であれば，この不確実性下の投資決定理論はケインズの投資理論とも解釈される。次節以降では，この三つの基準が不確実性下でも同一となるかどうかを簡単なモデルで考察する。

2．不確実性と投資決定基準

前節の議論では，外生変数は利子率のみであった。そこで，ここでは利子率rが確率変数であると考えよう。[3]実際には各期の利子率r_iが確率変数であると考えるべきであろうが，議論を出来るだけ簡単にするために，利子率$\tilde{r}$がすべての期間の利子率を代表しており，それが確率変数であると想定しよう。ここではさらに以下のように仮定する。

$$E[\tilde{r}]=\bar{r} \quad \text{and} \quad V(\tilde{r})=\sigma^2, \tag{2.1}$$

但し，$E(\cdot)$は期待値オペレータ，$V(\cdot)$は分散オペレータ，$\bar{r}$とσは正の定数である。このような想定の下で前節で議論した三つの投資決定基準が等しくなるかどうかを検討しよう。

2－1．投資の限界効率と利子率の均等化

不確実性が存在する下では，単純に「投資量は資本(投資)の限界効率と利子率が等しくなる水準で決定される」とは主張できなくなる。そこで，ここでは「限界効率と利子率の『期待値』が等しくなるように企業は最適な投資量を決定する」と，ケインズの投資決定基準を再解釈しよう。[4]すなわち，

3）現在価値最大化基準の下で，利子率の不確実性が投資に与える影響を詳細に分析したものとして，Ingersoll and Ross(1992)がある。

$$m(I)=E(\tilde{r})=\bar{r}, \tag{2.2}$$

である。資本の限界効率の定義は(1.3)式と同様であるので，(2.2)式を(1.3)式に代入することによって，不確実性下のケインズの限界効率基準による投資決定の最適条件式が得られる。

$$p_I+c'(I_K)=\sum_{i=1}^{i=T}(1+\bar{r})^{-i}\pi_i'(I_K), \tag{2.3}$$

但し，I_Kはケインズの限界効率基準によって決定される最適投資量である。

2－2．現在価値最大化

利子率が不確実である場合，企業の現在価値も再定義する必要がある。ここでは，確率変数である利子率で割り引いたキャッシュフローの合計$V(I, \tilde{r})$の期待値を企業価値と考えよう。すなわち，企業にとって最大化の対象となるものは，

$$E[V(I,\tilde{r})]=E[\sum_{i=1}^{i=T}(1+\tilde{r})^{-i}\pi_i(I)-p_I I-c(I)]. \tag{2.4}$$

(2.4)式の最大化のための一階の条件は以下の通りである。

$$p_I+c'(I_V)=E[\sum_{i=1}^{i=T}(1+\tilde{r})^{-i}\pi_i'(I_V)], \tag{2.5}$$

但し，I_Vは現在価値最大化基準によって決定される最適投資量である。

言うまでもないことであるが，$(1+\tilde{r})^{-i}$は$\tilde{r}$の厳密な意味での凸関数である。それゆえ，周知のジェンセンの不等式より，以下の関係が成り立つ。

$$E[(1+\tilde{r})^{-i}]>(1+\bar{r})^{-i} \qquad \text{for } i=1,2,\cdots\cdots,T. \tag{2.6}$$

(2.3)と(2.5)の2式の右辺を比較すると，

$$E[\sum_{i=1}^{i=T}(1+\tilde{r})^{-i}\pi_i'(I)]>\sum_{i=1}^{i=T}(1+\bar{r})^{-i}\pi_i'(I), \tag{2.7}$$

4）おそらく他の解釈も可能であろうが，利子率を「利子率の期待値」と読みかえるのが最も自然であろう。

であるので，

$$I_V > I_K, \tag{2.8}$$

と言う関係が得られる。すなわち，不確実性が存在する下では，ケインズの限界効率基準と現在価値最大化基準は必ずしも同一のものではないのである。そして，利子率が確率変数である場合は，現在価値基準を採用している企業の方がケインズの限界効率基準を採用している企業より多く投資を行うのである。

2－3．期末価値最大化

企業のキャッシュフローの計画期末における合計額の期待値は，

$$E[W(I,\tilde{r})]=E[\sum_{i=1}^{i=T}(1+\tilde{r})^{T-i}\pi_i'(I)-(1+\tilde{r})^T\{p_I I+c(I)\}]. \tag{2.9}$$

となる。期待期末価値の最大化のための一階の条件は，

$$E[\sum_{i=1}^{i=T}(1+\tilde{r})^{T-i}\pi_i'(I_W)]=E[(1+\tilde{r})^T\{p_I I_W+c(I_W)\}]. \tag{2.10}$$

である。但し，I_Wは期末価値最大化基準の下での最適投資率を表わしている。この式は以下のように書き直せる。

$$p_I+c'(I_W)=\frac{E[\sum_{i=1}^{i=T}(1+\tilde{r})^{T-i}\pi_i'(I_W)]}{E[(1+\tilde{r})^T]}. \tag{2.11}$$

(2.11)式で決定されるI_WがI_KやI_Vと比較して大きいか小さいかどうかはすぐには分からない。これらの比較と，利子率の不確実性が各々の基準の下での最適投資水準にどのような影響を与えるかは，次の節で簡単化のための仮定を追加して分析しよう。

3．不確実性の最適投資への影響

この節では以下のような簡単化のための仮定を追加して分析を進める。

①計画期間は2期間である，すなわち，$T=2$。

②各期の利潤関数の関数形は同一である，すなわち，$\pi_i(\cdot)=\pi(\cdot)$ for $i=1$, 2。

上のような簡単化の仮定の下で，最適条件(2.3)，(2.5)及び(2.11)は各々以下のようになる。

$$F(I_K)=\sum_{i=1}^{i=2}(1+\bar{r})^{-i}=(1+\bar{r})^{-1}+(1+\bar{r})^{-2}, \tag{3.1}$$

$$F(I_V)=E[\sum_{i=1}^{i=T}(1+\tilde{r})^{-1}]=E[(1+\tilde{r})^{-1}+(1+\tilde{r})^{-2}], \tag{3.2}$$

$$F(I_W)=\frac{E[\sum_{i=1}^{i=2}(1+\tilde{r})^{2-i}]}{E[(1+\tilde{r})^2]}=\frac{E[2+\tilde{r}]}{E[(1+\tilde{r})^2]}, \tag{3.3}$$

但し，

$$F(I)=\frac{p_I+c'(I)}{\pi'(I)}$$

である。$c''(I)>0$かつ$\pi''(I)\leq 0$であるので，$F'(I)>0$であることが分かる。

(3.1)式をさらに書き換えると，

$$F(I_K)=\frac{2+\bar{r}}{(1+\bar{r})^2}=\frac{2+\bar{r}}{1+2\bar{r}+\bar{r}^2}, \tag{3.4}$$

となる。また，(3.3)式を書き換えると，

$$F(I_W)=\frac{E[2+\tilde{r}]}{E[(1+\tilde{r})^2]}=\frac{2+\bar{r}}{E[1+2\tilde{r}+\tilde{r}^2]}=\frac{2+\bar{r}}{1+2\bar{r}+E[\tilde{r}^2]}, \tag{3.5}$$

となる。周知のように，$\sigma^2=E[\tilde{r}^2]-\bar{r}^2$であるので，

$$F(I_W)=\frac{2+\bar{r}}{1+2\bar{r}+\bar{r}^2+\sigma^2}, \tag{3.6}$$

が得られる。不確実性が存在する限り，すなわち，$\sigma>0$である限り，

$$\frac{2+\bar{r}}{1+2\bar{r}+\bar{r}^2}>\frac{2+\bar{r}}{1+2\bar{r}+\bar{r}^2+\sigma^2}, \tag{3.7}$$

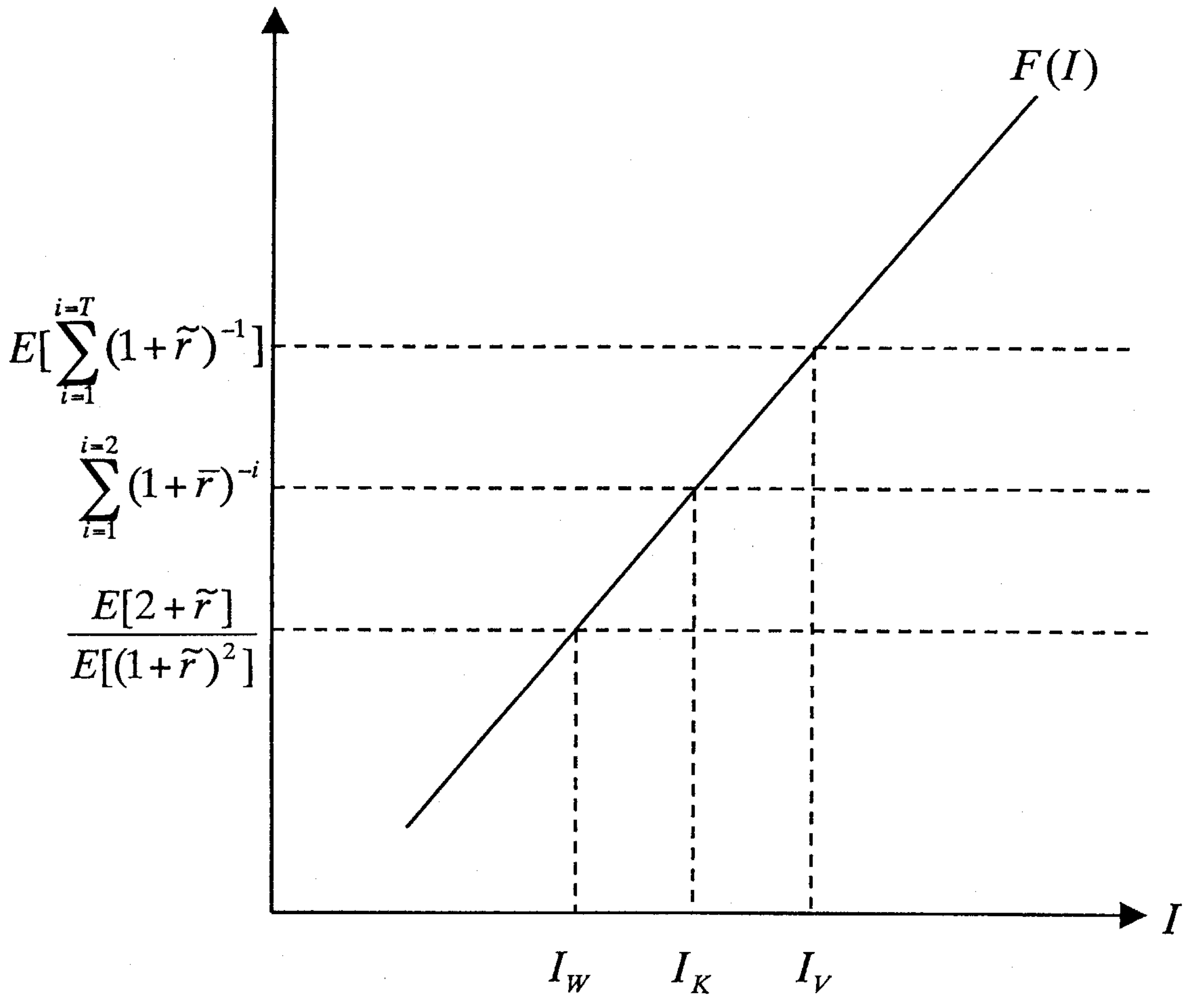
である。$F'(I)>0$より，このことは以下の不等式を意味する。

$$I_K>I_W. \tag{3.8}$$

より一般的な仮定の下で，(2.8) の関係($I_V > I_K$)が得られるので，ここでの単純な仮定の下では，不確実性が存在する限り次の不等式が成り立つ。

$$I_V > I_K > I_W. \tag{3.9}$$

第2図は，I_V，I_K及びI_Wの決定を表している。



第2図：不確実性が存在する下での投資決定

(3.9)の関係は，ケインズの限界効率基準に従った場合の最適投資量が他の二つの基準に従った場合の最適投資量の間に入ることを示している。しかし，より重要な点は，他の二つの基準の下での投資が利子率の不確実性の影響を受けるのに対して，ケインズの基準は利子率の不確実性から自由であること

であろう。[5]不確実性が存在しない状況の下で決定される最適投資水準に上付きの添え字Cをつけると明らかに，

$$I_V^C = I_K^C = I_W^C, \tag{3.10}$$

である。不確実性下の最適投資量に上付きの添え字Uを付けると，(3.9)と(3.10)から，

$$I_V^U > I_V^C, \qquad I_K^U = I_K^C, \qquad I_W^U < I_W^C, \tag{3.11}$$

という関係が得られる。また，I_K^UとI_W^Uに関しては次の比較静学的な結論も得られる。

$$\frac{\partial I_K^U}{\partial \sigma} = 0, \qquad \frac{\partial I_W^U}{\partial \sigma} < 0. \tag{3.12}$$

最近，不確実性下の設備投資理論が注目を集めている。それは，Hartman (1976)が，生産物の価格や名目賃金率を確率変数とした離散型の投資の調整費用モデルにおいて,「確率分布における平均保存的な分散の上昇は完全競争企業の投資を増加させる」という逆説的な命題を導いたことに始まる。[6]この結論は，直接的には目的関数が生産物価格や賃金率の凸関数であることに依存しているが，この凸性は本来新古典派生産関数の性質そのものに起因している。[7]

通常の投資モデルにおいては，利子率に関する不確実性の増大も最適投資水準を増加させる。[8]これは，現在価値最大化という投資決定基準の場合，目的関数が利子率の凸関数になるからである。しかし,「現在価値最大化」という投資の決定基準がここで紹介した他の二つの基準よりも優れていると先験的に言うことは出来ない。もし投資プロジェクトの評価に際して,「現在価値

5）この場合,「利子率の不確実性」とは確率変数である利子率の分散を指している。これは，Rothchild and Stiglitz (1970)の定義に従ったものである。

6）最近の不確実性下の投資理論の展開については，拙稿(1999)を参照。

7）生産物の価格や名目賃金率の不確実性が投資に与える定性的な効果は，ここで紹介した投資の決定基準のどれを選択するかには依存しない。

8）前掲Ingersoll and Ross (1992)，Dixit and Pindyck (1994)等を参照。

最大化」以外の基準—例えば，「期末価値最大化」—を採用すれば，「(利子率に関する) 不確実性の増大は投資を減少させる」と言う常識的な結論が得られる可能性があることをここでの分析は示している。

4．今後の課題

通常の「不確実性下の投資理論」では，生産物の価格 (不完全競争企業の場合は，需要水準)や賃金率の不確実性を考慮する場合が多い。その場合は，(少なくとも定性的な分析を行う際には)ここで考察の対象とした三つの投資の決定基準について特別注意を払う必要はない。しかし，一旦利子率の不確実性を視野に入れると，どの投資決定基準を用いるかによって最適投資量が変化する。さらには，投資と不確実性の関係も変化する。このノートでは，これらの諸点を非常に簡単なモデルを用いて明らかにした。どの投資の決定基準が最良のものであると先験的に言えないとすれば，不確実性下の投資を論じる際には，我々は決定基準にも注意を払わなければならない。

但し，ここでの分析は極めて試論的なものであり，頑健な結論を導くにはより一般的な想定の下で分析する必要がある。不確実性をどのように扱うかを含めて課題は多い。また，利子率の不確実性が存在する下でケインズの投資理論をどのように考えるかも課題の一つである。ケインズは，企業の短期的な行動について単純な利潤極大化仮説を採用したのに，投資の決定では，その動学版である「現在価値最大化」ではなく「(資本の) 限界効率と利子率の均等化」と言う基準を採用している。不確実性下での彼の投資理論を再構成することで，この点にも新しい光を投げかけられるかもしれない。これらの諸問題は今後の課題としたい。

参考文献

Harcourt, G.C., 1968, “Investment Decision Criteria, Investment Incentives and the Choice of Technique,” *Economic Journal* Vol. 78, March, pp.77-95.

Ingersoll, Jonthan E., and Stephen A. Ross. 1992, "Waiting to Invest: Investment and Uncertainty," *Journal of Business* 65 (January): 1-29.

Keynes, J.M. 1936, *The General Theory of Employment, Interest and Money,* London: Macmillan

Dixit A. and R. Pindyck, 1994, *Investment Under Uncertainty,* Princeton University Press, NJ.

Rothchild, M., and J.E. Stigilitz, 1970, "Increasing Risk I: A Definition," *Journal of Economic Theory* 2, 25-243.

板垣 有記輔(1982)『動的最適化と経済理論』, 多賀出版

中村 保(1999)「不確実性下の投資決定：展望論文」山口経済学雑誌, 第47巻第3号, 41—60ページ

置塩信雄(1988)『現代経済学II』, 筑摩書房