反射的推移関係の性質

橋　本　　　寛

1．はじめに

二項関係は様々な数理的分野で出現し，それぞれの分野において基本的な役割を演じており，重要ないくつかの特殊な二項関係が存在するが，その一つは推移的な関係である。[(1)(2)(9)(11)]ここではその推移関係がさらに反射的である場合について，考察をおこなっている。一般に有限集合上の二項関係は0，1の要素からなるブール行列によって表現されるので，この反射的でかつ推移的な二項関係をブール行列で表現し，その初等的な性質を調べている。反射的推移関係は擬順序(pseudo-order)または前順序(preorder)とも呼ばれ，[(10)]種々の興味深い性質を有しており，これまでにも数多くの性質が知られている。

本論文においては，与えられた関係が反射的推移関係となるための必要十分条件，すなわち実際には与えられたブール行列が擬順序を表現する関係行列となるための必要十分条件や，これらに関連するいくつかの性質を示している。また反射的で，推移的で，かつ反対称的な関係の必要十分条件に関する性質についても考察をおこなっている。この種の関係は一般に半順序 (partial order) と呼ばれているが，[(10)]与えられたブール行列が半順序を表現する関係行列となるためのいくつかの必要十分条件を与えている。さらに，反射的で，推移的で，反対称的で，かつ連結的な関係の同値性に関する性質についても調べている。このような関係は全順序(total order)または線形順序 (linear order) と呼ばれているが，[(10)]与えられたブール行列

がこの全順序を表現する関係行列となるための必要十分条件についても若干の考察をおこなっている。

２．定義

ブール行列に関する記法や演算の定義は文献（３，８）などに従うものとする。いくつかの注意すべきものについて示せば次のとおりである。０，１の要素をもつn次ブール行列$R=[r_{ij}]$に対して

$R'=[r_{ji}]$（転置）

$\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]$（否定）

$\nabla R=R\wedge R'$

$R^k=[r_{ij}^{(k)}]$

$R^0=I=[\delta_{ij}]$（単位行列）

と定める。

対角要素がすべて１の行列Rは$I\leqq R$となり，反射的と呼ばれる。また，すべての要素が１の行列はEで表わされ，$R\vee R'\vee I=E$なるRは連結的といわれる。$\nabla R\leqq I$なるRは反対称的といわれ，$R^2\leqq R$なるRは推移的と呼ばれる。[2][9][12]本論文においては$I\leqq R$かつ$R^2\leqq R$なるブール行列Rすなわち反射的な推移関係行列を主要な考察の対象としている。

３．結果

反射的な推移関係行列のもつある種の初等的な性質について考察をおこなうために，まず反射的推移関係行列の基本的性質や反射性の条件のもとでの推移関係行列に関する必要十分条件などについて述べる。次の性質１はほとんど自明であり，またよく知られているが，以下における他の性質を考察する上で有用であるので，念のため掲げている。

［性質１］

（１）$I\leqq R$のとき

$$R^2\leqq R\Longleftrightarrow R^2=R$$

（2） $R^2 \leqq R,\ I \leqq R \Longleftrightarrow R^2 = R,\ I \leqq R$

以下の性質中において，しばしば $R^2 \leqq R$，$I \leqq R$ なる条件が現われるが，これは上記の性質1によって $R^2 = R$，$I \leqq R$ で置き換えることができる。

[性質2][8]次の条件は同値である。

（1） $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R$

（2） $R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$

（3） $(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R$

（4） $R^2 \leqq R$

[性質3] $I \leqq R$ で，非負の整数 l，m に対し $l + m \geqq 1$ のとき，

$$R^l \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$$

(証明) $I \leqq R$ によって $I \leqq R^l$，$I \leqq R^m$ となる。

（1） $R^l \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq R$ のとき

（a） $l \geqq 1$ のとき

$$R \leqq R^l$$

$$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R^l \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq R$$

したがって性質2により $R^2 \leqq R$ となる。

（b） $m \geqq 1$ のとき

$$R \leqq R^m$$

$$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R^l \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq R$$

したがって性質2により $R^2 \leqq R$ となる。

（2） $R^2 \leqq R$ のとき

$$R^l \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \leqq R^{l+m+1} \leqq R$$ (証明終)

[性質4] $I \leqq R$ のとき

$$R \times (R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$$

(証明)　性質3による。 (証明終)

[性質5]　非負の整数 l，m に対し $l + m \geqq 1$ のとき，

$$R^l \times (R \wedge \overline{I}) \times R^m \vee I \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ I \leqq R$$

(証明)　性質3による。　(証明終)

[性質6]　$I \leqq R$のとき，すべての非負の整数l，mに対して，

$$R^l \times (R \wedge \overline{I})^2 \times R^m \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$$

(証明)　$I \leqq R$によって$I \leqq R^l$，$I \leqq R^m$となる。

(1) $R^l \times (R \wedge \overline{I})^2 \times R^m \leqq R$のとき

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R^l \times (R \wedge \overline{I})^2 \times R^m \leqq R$$

したがって性質2により$R^2 \leqq R$。

(2) $R^2 \leqq R$のとき

$$R^l \times (R \wedge \overline{I})^2 \times R^m \leqq R^{l+m+2} \leqq R$$

(証明終)

[性質7]　すべての非負の整数l，mに対して，

$$R^l \times (R \wedge \overline{I})^2 \times R^m \vee I \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ I \leqq R$$

(証明)　性質6による。　(証明終)

次の性質は自明であるが，以下において他の性質との比較のために使用するので，念のため証明を与える。

[性質8]　$I \leqq R$のとき，すべてのm ($m=2,\ 3,\ \cdots$) に対して，

$$R^m \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$$

(証明) (1)　$R^m \leqq R$のとき

$I \leqq R$で，$m \geqq 2$だから$R^2 \leqq R^m \leqq R$。

(2) $R^2 \leqq R$のとき

$m \geqq 2$だから$R^m \leqq R^2 \leqq R$。　(証明終)

[性質9]　すべてのm ($m=2,\ 3,\ \cdots$) に対して，

$$R^m \vee I \leqq R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ I \leqq R$$

(証明)　一般に

$$R^m \vee I \leqq R \Longleftrightarrow R^m \leqq R,\ I \leqq R$$

であるから，性質8による。　(証明終)

なお，性質12で示すように，すべてのm ($m=2,\ 3,\ \cdots$) に対して，

$$R^m \vee I = R \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ I \leqq R$$

が成立する。

［性質10］　次の条件は同値である。

(1) $R\times(R\wedge\overline{I})\vee I\leqq R$

(2) $(R\wedge\overline{I})\times R\vee I\leqq R$

(3) $R\times(R\wedge\overline{I})\times R\vee I\leqq R$

(4) $(R\wedge\overline{I})^2\vee I\leqq R$

(5) $R\times(R\wedge\overline{I})^2\vee I\leqq R$

(6) $(R\wedge\overline{I})^2\times R\vee I\leqq R$

(7) $R\times(R\wedge\overline{I})^2\times R\vee I\leqq R$

(8) $R^2\vee I\leqq R$

(9) $R^3\vee I\leqq R$

(10) $R^2\leqq R$，$I\leqq R$

(証明)　性質5，性質7，性質9による。　(証明終)

［性質11］　非負の整数 l，m に対し $l+m\geqq 1$ のとき，

$$R^l\times(R\wedge\overline{I})\times R^m\vee I=R\Longleftrightarrow R^2\leqq R,\ I\leqq R$$

(証明) (1) $R^l\times(R\wedge\overline{I})\times R^m\vee I=R$ のとき

性質5によって $R^2\leqq R$，$I\leqq R$ となる。

(2) $R^2\leqq R$，$I\leqq R$ のとき

性質5によって

$$R^l\times(R\wedge\overline{I})\times R^m\vee I\leqq R$$

次に $R\leqq R^l\times(R\wedge\overline{I})\times R^m\vee I$ となることを示す。

$$\begin{aligned}R&=(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge I)\\&=I\times(R\wedge\overline{I})\times I\vee I\\&\leqq R^l\times(R\wedge\overline{I})\times R^m\vee I\end{aligned}$$

こうして $R^l\times(R\wedge\overline{I})\times R^m\vee I=R$ となる。　(証明終)

［性質12］　すべての m ($m=2, 3, \cdots$) に対して，

$$R^m\vee I=R\Longleftrightarrow R^2\leqq R,\ I\leqq R$$

(証明) (1) $R^m\vee I=R$ のとき

性質9によって$R^2 \leqq R$，$I \leqq R$。

（2）$R^2 \leqq R$，$I \leqq R$のとき

$R^2 = R$となり，$R^m = R$となるから

$$R^m \vee I = R \vee I = R$$

（証明終）

［性質13］　すべてのm（$m=1, 2, 3, \cdots$）に対して，

$$R^m \vee I \leqq R \Longleftrightarrow R^m \vee I = R$$

（証明）（1）$m=1$のとき

（a）$R \vee I \leqq R$のとき

$$R \leqq R \vee I \leqq R$$

したがって

$$R = R \vee I = R$$

（b）$R \vee I = R$のとき

明らかに

$$R \vee I \leqq R$$

（2）$m \geqq 2$のとき

性質9と性質12による。　（証明終）

［性質14］　次の条件は同値である。

（1）$R \times (R \wedge \bar{I}) \vee I = R$

（2）$(R \wedge \bar{I}) \times R \vee I = R$

（3）$R \times (R \wedge \bar{I}) \times R \vee I = R$

（4）$R^2 \vee I = R$

（5）$R^3 \vee I = R$

（6）$R^2 \leqq R$，$I \leqq R$

（証明）　性質11および性質12による。　（証明終）

すでに示した性質10では$R^2 \leqq R$，$I \leqq R$となるための必要十分条件が不等式で与えられていたが，上記の性質14においてはその必要十分条件が等式で与えられている。

［性質15］

$$(R \wedge \bar{I})^2 \vee I = R \Rightarrow R^2 \leqq R,\ I \leqq R$$

（証明）　性質7による。（証明終）

上記の性質の逆は成立しない。すなわち，一般には

$$R^2 \leqq R,\ I \leqq R \Longrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 \vee I = R$$

とはいえない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$R \wedge \bar{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R \wedge \bar{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり，$(R \wedge \bar{I})^2 \vee I \fallingdotseq R$である。

もちろん，性質10で示したように

$$R^2 \leqq R,\ I \leqq R \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 \vee I \leqq R$$

は成立する。

［性質16］(8)

$$I \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E \Longleftrightarrow R = R \vee \overline{R'} = R \vee \overline{R'} \vee I$$

なお，上記の性質中の$I \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E$は，一般に

$$I \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E \Longleftrightarrow R \vee R' = E$$

であるから，$R \vee R' = E$で置き換えることができる。

［性質17］　$I \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E$のとき，非負の整数$l$，$m$に対して

$$R^l \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m \vee I = R \vee \overline{R'} \vee I \Longleftrightarrow R^2 \leqq R$$

ただし$l + m \geqq 1$とする。

（証明）　性質11および性質16による。（証明終）

［性質18］　$I \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R \times (R \wedge \bar{I}) \vee I = R \vee \overline{R'} \vee I$

（2）$(R \wedge \bar{I}) \times R \vee I = R \vee \overline{R'} \vee I$

（3）$R \times (R \wedge \bar{I}) \times R \vee I = R \vee \overline{R'} \vee I$

（4）$R^2 \leqq R$

（証明）　性質17による。　（証明終）

上記の性質18に関して，一般には

$$R \vee R' \vee I = E,\ R \times (R \wedge \bar{I}) \vee I = R \vee \overline{R'} \vee I \Rightarrow R^2 \leqq R$$

とはいえない。すなわち$I \leqq R$が必要である。これは，いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R \vee R' \vee I = E$で$R \times (R \wedge \bar{I}) \vee I = R \vee \overline{R'} \vee I$であるが，$R^2 \leqq R$とはならないことからわかる。

［性質19］(8) $I \leqq R$のとき

$$R \times (R \wedge \bar{I}) = (R \wedge \bar{I}) \times R$$

［性質20］　$R^2 \leqq R$, $I \leqq R$で，かつ非負の整数l, mに対し$l + m \geqq 1$のとき，

$$R^l \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m = R \times (R \wedge \bar{I}) = (R \wedge \bar{I}) \times R$$

（証明）　性質19によって$R \times (R \wedge \bar{I}) = (R \wedge \bar{I}) \times R$であるから

$$R^l \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m = R \times (R \wedge \bar{I})$$

となることだけを示す。まず性質1によって$R^2 \leqq R$, $I \leqq R$のとき$R^2 = R$となる。

（1）$l \geqq 1$，$m \geqq 1$のとき

このとき$R^l = R$，$R^m = R$であり，また性質19によって

$$\begin{aligned} R^l \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m &= R \times (R \wedge \bar{I}) \times R \\ &= R \times R \times (R \wedge \bar{I}) \\ &= R \times (R \wedge \bar{I}) \end{aligned}$$

（2）$l \geqq 1$，$m = 0$のとき

$$R^l \times (R \wedge \bar{I}) \times R^m = R \times (R \wedge \bar{I}) \times I = R \times (R \wedge \bar{I})$$

(3) $l=0$, $m\geqq 1$のとき

$$R^l\times(R\wedge\bar{I})\times R^m=I\times(R\wedge\bar{I})\times R$$
$$=R\times(R\wedge\bar{I})$$

(証明終)

[性質21]　$R^2\leqq R$, $I\leqq R$のとき

$$R\times(R\wedge\bar{I})\times R=R\times(R\wedge\bar{I})=(R\wedge\bar{I})\times R$$

(証明)　性質20による。　(証明終)

[性質22][4][6]次の条件は同値である。

(1) $(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$

(2) $R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\wedge\bar{I}$

(3) $(R\wedge\bar{I})\times R\leqq R\wedge\bar{I}$

(4) $R^2\leqq R$, $\triangledown R\leqq I$

上記の性質22に関して

$$R\times(R\wedge\bar{I})\times R\leqq R\wedge\bar{I}\Rightarrow R^2\leqq R,\ \triangledown R\leqq I$$

は，一般には成立しない。このことは

$$R=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

とおいてみればわかる。

[性質23][8]

$$R^2\leqq R,\ I\leqq R,\ \triangledown R\leqq I\Rightarrow R\times(R\wedge\bar{I})=(R\wedge\bar{I})\times R=R\wedge\bar{I}$$

なお，一般に

$$I\leqq R,\ \triangledown R\leqq I\Longleftrightarrow\triangledown R=I$$

であるから，上記の性質23の$I\leqq R$, $\triangledown R\leqq I$を$\triangledown R=I$で置き換えてもよい。

[性質24][8]

(1) $R\times(R\wedge\bar{I})=R\wedge\bar{I}\Rightarrow R^2=R,\ \triangledown R\leqq I$

(2) $(R\wedge\bar{I})\times R=R\wedge\bar{I}\Rightarrow R^2=R,\ \triangledown R\leqq I$

［性質25］　$I \leqq R$，$\nabla R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(2)　$R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

(3)　$(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$

(4)　$R^2 \leqq R$

(5)　$R \times (R \wedge \bar{I}) = R \wedge \bar{I}$

(6)　$(R \wedge \bar{I}) \times R = R \wedge \bar{I}$

(7)　$R^2 = R$

(証明)　(1)$\Longleftrightarrow$(2)$\Longleftrightarrow$(3)$\Longleftrightarrow$(4)性質22による。

(4)$\Rightarrow$(5)　性質23による。

(5)$\Rightarrow$(4)　性質24(1)による。

(4)$\Rightarrow$(6)　性質23による。

(6)$\Rightarrow$(4)　性質24(2)による。

(4)$\Longleftrightarrow$(7)　性質1による。　(証明終)

［性質26］　すべての l　($l=1, 2, \cdots$)　に対して，

$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^l \Rightarrow R^2 \leqq R$，$I \leqq R$

(証明)　まず $R^2 \leqq R$ となることを示す。このために $r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき $r_{ij}=1$ となることを示す。$i=k$ または $k=j$ のときはそれぞれ明らかであるから，$i \neq k$，$k \neq j$ とする。

(1)　$i \neq j$ のとき

もし $r_{ij}=0$ とすれば $r^{(l)}_{ji}=1$。ところで $r_{ik}=1$ だから $r^{(l+1)}_{jk}=1$。また一方 $r_{kj}=1$ と $R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I$ より $r^{(l+1)}_{jk}=0$ となるが，これは矛盾する。ゆえに $r_{ij}=1$。

(2)　$i=j$ のとき

$r_{ik}=r_{ki}=1$。よって $r^{(l+1)}_{ki}=r^{(l+1)}_{ik}=0$。また $I \leqq R^l$ によって $r^{(l)}_{ii}=1$ であるから，これと $r_{ik}=1$ によって $r^{(l+1)}_{ik}=1$。しかし，これは矛盾する。ゆえに，この場合はありえない。

こうして $R^2 \leqq R$ となり，$I \leqq R^l$ によって $I \leqq R$ となる。　(証明終)

なお，一般には

$$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l} \vee I \Rightarrow R^{2} \leqq R \quad (l=1, 2, \cdots)$$

とはいえない。これは

$$l=1, \quad R=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおいてみればわかる。ただし $l=2$ の場合，すなわち

$$R^{3} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{2} \vee I \Rightarrow R^{2} \leqq R$$

は成立することが知られている(5)(7)。

［性質27］　すべての l （$l=1, 2, \cdots$）に対して，

$$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l} \Rightarrow \triangledown R \leqq I$$

（証明）　いま $r_{ij}=r_{ji}=1$ （$i \neq j$）とすれば $r_{ij}^{(l+1)}=r_{ji}^{(l+1)}=0$ となるが，性質26によって $r_{ii}=1$ であるから $r_{ii}^{(l)}=1$ となり，$r_{ij}=r_{ji}=1$ によって $r_{ij}^{(l+1)}=r_{ji}^{(l+1)}=1$ となる。しかし，これは矛盾するので，$i \neq j$ のとき $r_{ij} \wedge r_{ji}=0$。したがって $\triangledown R \leqq I$。　（証明終）

なお，性質26によれば，上記の性質の条件のもとで $I \leqq R$ となるから，すべての l （$l=1, 2, \cdots$）に対して，

$$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l} \Rightarrow \triangledown R = I$$

となる。

［性質28］　すべての l （$l=1, 2, \cdots$）に対して，

$$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l} \Rightarrow R \vee R' \vee I = E$$

（証明）　いま $r_{ij}=0$ （$i \neq j$）とすれば $\overline{R'} \vee I \leqq R^{l}$ によって $r_{ji}^{(l)}=1$。また性質26によって $R^{2} \leqq R$ だから $r_{ji}=1$ となる。したがって

$$R \vee R' \vee I = E$$

（証明終）

上記の性質28の条件のもとでは，すでに示した性質26によって $I \leqq R$ となるから，この性質28の条件のもとで $R \vee R' = E$ が得られる。

［性質29］　$R^{2} \leqq R$，$I \leqq R$，$\triangledown R \leqq I$，$R \vee R' \vee I = E$ のとき，すべての l （$l=1, 2, \cdots$）に対して，

$$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l}$$

(証明)　$R^2 \leqq R$，$I \leqq R$だから性質1によって$R^2 = R$となる。したがって$R^l = R^{l+1} = R$となるから

$$R \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R$$

を示せばよい。

まず$R \leqq \overline{R'} \vee I$となること，すなわち$r_{ij} = 1$のとき$\overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$となることを示す。$i = j$のとき$\delta_{ij} = 1$であるから$i \neq j$とする。$\nabla R \leqq I$によって$r_{ij} = 1$のとき$r_{ji} = 0$。したがって$\overline{r_{ji}} = 1$。

次に$\overline{R'} \vee I \leqq R$となること，すなわち$\overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$のとき$r_{ij} = 1$となることを示す。$I \leqq R$によって$i = j$のとき$r_{ij} = 1$となるから$i \neq j$とする。$\overline{r_{ji}} = 1$すなわち$r_{ji} = 0$のとき$R \vee R' \vee I = E$によって$r_{ij} = 1$となる。　(証明終)

なお，上の性質中の$\nabla R \leqq I$に関して

$$\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow R \leqq \overline{R'} \vee I$$

なることが知られている[6]

［性質30］　すべてのl（$l = 1, 2, \cdots$）に対し，次の条件は同値である。

(1)　$R^{l+1} = \overline{R'} \vee I = R^l$

(2)　$R^{l+1} = \overline{R'} \vee I \leqq R^l$

(3)　$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I = R^l$

(4)　$R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^l$

(証明)　(1)⇒(2)⇒(4)および(1)⇒(3)⇒(4)は明らかであるので(4)⇒(1)となることを示す。

性質26によって$R^2 \leqq R$，$I \leqq R$だから$R^2 = R$となる。したがって$R^{l+1} = R^l = R$。このとき

$$R \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R$$

となり

$$R = \overline{R'} \vee I = R$$

となるから

$R^{l+1} = \overline{R'} \vee I = R^{l}$　　(証明終)

［性質31］　次の条件は同値である。

(1) $R^{2} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R$

(2) ある l ($l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l}$

(3) すべての l ($l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{l+1} \leqq \overline{R'} \vee I \leqq R^{l}$

(4) $R^{2} = \overline{R'} \vee I = R$

(5) ある l ($l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{l+1} = \overline{R'} \vee I = R^{l}$

(6) すべての l ($l = 1, 2, \cdots$) に対して $R^{l+1} = \overline{R'} \vee I = R^{l}$

(7) $R^{2} \leqq R$, $I \leqq R$, $\bigtriangledown R \leqq I$, $R \vee R' \vee I = E$

(証明)　性質26，性質27，性質28，性質29，性質30による。

(証明終)

この性質31と類似の結果が文献(7)にも示されている。

4．まとめ

反射的な推移関係すなわちいわゆる擬順序について考察をおこない，その若干の初等的性質を明らかにしている。また擬順序の特別な場合である半順序や全順序についても，それらの必要十分条件などに関する性質を示している。これらの性質の大半はほとんど自明のものであるが，いくつかのものはこれまで一般には知られていない性質のようにおもわれ，擬順序，半順序，および全順序に関してこれまで比較的議論されていない一つの側面を示すものであると考えられる。推移関係については，すでに多数の基本的性質が知られているが，[9][11]非反射性[2]や連結性との関連において，まだ数多くの考察すべき性質が存在しているように感じられる。これらの点については今後検討をおこない，次の機会に報告したいと考えている。

文　献

(１) Arrow,K.J.:“Social Choice and Individual Values,”2nd ed.,Yale University Press,New Haven(1963).

(２) Fishburn,P.C.:“The Theory of Social Choice,”Princeton University Press,Princeton,New Jersey(1973).

(３) 橋本　寛：“連結的推移関係行列の性質”，山口経済学雑誌，第34巻，第３・４号，pp.387-405（昭和60年６月）.

(４) 橋本　寛：“連結的関係に関する若干の性質”，山口経済学雑誌，第36巻，第５・６号，pp.245-261（昭和62年５月）.

(５) 橋本　寛：“関係の連結性に関するある種の十分条件について”，山口経済学雑誌，第38巻，第５・６号，pp.783-797（平成元年11月）.

(６) 橋本　寛：“反対称的推移関係”，山口経済学雑誌，第41巻，第５・６号，pp.473-489（平成６年５月）.

(７) 橋本　寛：“連結的な反対称的推移関係”，山口経済学雑誌，第42巻，第１・２号，pp.53-74（平成６年９月）.

(８) 橋本　寛：“反射的な連結的関係に関する若干の性質”，山口経済学雑誌，第44巻，第５・６号，pp.495-515（平成８年３月）.

(９) Kim,K.H.:“Boolean Matrix Theory and Applications,”Marcel Dekker,New York(1982).

(10) 日本数学会：“岩波数学辞典第３版”，岩波書店（1985）.

(11) Schmidt,G.and Ströhlein,T.:“Relations and Graphs,”Springer-Verlag,Berlin(1993).

(12) Tarski,A.:“Introduction to Logic,”Oxford University Press,New York(1965).