凸解析の一つの命題

南　　正　義

経済・経営理論に用いられる数理計画論，最適制御理論の数学的道具の一つは凸解析である。これらの理論の研究を進めるなかで，凸解析に関する次の命題１が成り立つことに気づいた。この命題１は集合の内部，閉包，凸包の間の一つの基本的な関係を示しているが，凸解析に関するテキストなどにはこの形のものは見られない。

命題１　R^nの集合Cについて，$\mathrm{int}C \neq \phi$ならば，

$$\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}C) \subset \mathrm{int}\,(\mathrm{conv}C)$$

が成り立つ。ここで，記号 intA は集合 A の内部を，記号 clA は集合 A の閉包を，記号 convA は集合 A の凸包を表す[注1]。

命題１の証明

$z \in \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}C)$，$x \in \mathrm{R}^n$ とすると，

$y = z - \varepsilon_0 (x - z) \in \mathrm{cl}C$ をみたす$\varepsilon_0 > 0$が存在する。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$y = y_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon$，$y_\varepsilon \in C$，$\| b_\varepsilon \| < 1$[注2]をみたす y_ε，b_ε が存在する。

$\mathrm{int}C \neq \phi$ だから，$x \in \mathrm{int}C$ とし，b を $\| b \| < 1$ をみたすものとする。

$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき，

$$x+\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon_0}b_\varepsilon+\frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}b\right)\in \mathrm{C}$$

となる。そのような $\varepsilon>0$ に対して，

$$z+\varepsilon b=\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}x+\frac{1}{1+\varepsilon_0}y+\varepsilon b$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}x+\frac{1}{1+\varepsilon_0}(y_\varepsilon+\varepsilon b_\varepsilon)+\varepsilon b$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\left(x+\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon_0}b_\varepsilon+\frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}b\right)\right)+\frac{1}{1+\varepsilon_0}y_\varepsilon$$

となり，$z+\varepsilon b\in \mathrm{convC}$ が成り立つ。

故に，$z\in \mathrm{int\,(convC)}$ となる。

（証明終わり）

記号 affA は集合 A を含む最小のアフィン空間[注3]を表すものとすれば，アフィン空間は閉凸集合だから，R^nの集合 C に対して，

aff (clC) = aff (convC) = affC

が成り立つ。このことに注意すれば，よく知られた次の命題２が命題１から導かれる。

命題２　R^n の凸集合 C (C$\neq\phi$) について

rel.int (clC) = rel.int C

が成り立つ。ここで記号 rel.intA は affA に制限したときの相対位相に関する集合 A の内部を表す。

命題２の証明

affC の次元が $m\,(>0)$ のとき，C の部分集合として m 次元単体[注4]が取れるし，m次元単体の内部に m 次元球が取れるから，rel.int C $\neq\phi$ となる。したがって，affC を全空間と考えれば，命題１から命題２の片方の包

含関係が導かれる。逆の包含関係は明らかである。

affC の次元が 0 のときも命題 2 は成り立つ。　(証明終わり)

(注 1) それぞれ次の集合である。

$\mathrm{int}A = \{x \in R^n \mid U_\varepsilon(x) \subset A$ をみたす点 x の ε-近傍 $U_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$ が存在する$\}$

$\mathrm{cl}A = \{x \in R^n \mid U_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$ が点 x の任意の ε-近傍 $U_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$ について成り立つ$\}$

$\mathrm{conv}A = \{x \in R^n \mid y_i \in A\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ および $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ をみたす $\lambda_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ で $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$ と表せる $(k = 1, 2, \cdots)\}$

(注 2) 記号 $\|x\|$ は x のノルムを表す。

(注 3) R^n の集合 A がアフィン空間であるとは，A に属する任意の元 x, y および任意の実数 λ に対して，$\lambda x + (1-\lambda)y$ が A に属することである。

(注 4) R^n の m 次元単体とは，R^n の $m+1$ 個のベクトルからなるアフィン独立系 a_0，a_1，…，a_m に対して定まる $\mathrm{conv}\{a_0, a_1, \cdots, a_m\}$ のことである。ここで，a_0，a_1，…a_m がアフィン独立系であるとは，次が成り立つことである。

$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i a_i = 0$，　$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ ならば，$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$。

参考文献

[1] Bazaraa, M. S. and Shetty, C. M.; "Foundations of Optimization", Springer-Verlag, 1976.

[2] 布川昊・中山弘隆・谷野哲三共著；「線形代数と凸解析」，コロナ社，1991.

[3] 岩橋亮輔著；「最適制御理論入門」，サイエンス社，1975.

[4] Panik, M. J.; "Fundamental of Convex Analysis", Kluwer, 1993.

[5] Rockafellar, R.T.; "Convex Analysis", Princeton University

Press, 1970.

[6] 田中謙輔著；「凸解析と最適化理論」，牧野書店，1994.

[7] Valentine, F. A. ; "Convex Sets", R. E. Krieger Publishing Company, 1976.

[8] Van Tiel, J. ; "Convex Analysis. An Introductory Text", John Wiley and Sons, 1984.

[9] 渡部隆一著；「凸解析」，培風館，1986.