$R^3=\bar{R}^t \vee I$を満たすブール行列

Boolean Matrices Which Satisfy $R^3=\bar{R}^t \vee I$

柏　木　芳　美

Yoshimi Kashiwagi

Abstract

We consider Boolean matrices with the property $R^3=\bar{R}^t \vee I$ and show that if a Boolean matrix R with this property is of order 2, 3 or 4, then there exists a permutation σ with $R^\sigma=Z$, where

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Induction and calculation are used in the proof. Permutations and transposition decrease the number of cases that we should handle.

1　はじめに

橋本とのディスカッションにおいて「ブール行列 R が関係式 $R^3=\bar{R}^t \vee I$ を満たすならば $I \leqq R$ か」という問題が提起された（橋本［3］参考）。Zは $R^3=\bar{R}^t \vee I$ を満たす。ここで，Z は次の形の n 次ブール行列で，Z_n と書くこともある。

$$Z=Z_n=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}。$$

残念ながら証明は出来ていないが，少し計算してみると

予想1． ブール行列 R が関係式 $R^3=\bar{R}^t \vee I$ を満たすならば，置換 σ 存在して $R^\sigma=Z$ となる

が予想でき，従って $I=I^{\sigma^{-1}} \leqq R$ となる。

この論文では，ブール行列 R の次数 n が4以下の場合にこの予想が正しいことを計算により示す。キーポイントは，置換と転置を利用して計算すべき場合の数を減らすことである。

2　記号

この論文では，成分が0または1であるブール行列を扱う。単位行列を I，成分がすべて1のブール行列を E と書く。$R=(r_{ij})$，$S=(s_{ij})$ を n 次ブール行列としたとき

$$R \vee S=(r_{ij} \vee s_{ij})$$
$$R \wedge S=(r_{ij} \wedge s_{ij})$$
$$R^t=(r_{ji})$$ （橋本の論文では R' と書かれている）
$$\bar{R}=(\bar{r}_{ij})$$
$$RS=R \times S=(\vee_{k=1}^n (r_{ik} \wedge s_{kj}))$$
$$R^{k+1}=R^k R$$

と定める。$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とし $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ としたとき

$$R^\sigma=(r_{i\sigma j\sigma})$$

と定める。柏木［1］では $R^\sigma=(r_{\sigma(i)\sigma(j)})$ と定義したが，これでは $\mathfrak{S}_n$ が準同型に作用しないので（［1，命題3．1(1)］の証明は誤り），上のように定義を改める。

$\mathrm{r}=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n)$ を行ベクトルとしたとき

$$w(\mathrm{r})=\#\{i \mid r_i \neq 0\}$$

をベクトル r の重さという。r が列ベクトルの場合も同じ記号を用いる。

3　準備

ここでは後の証明で用いる $R^3=\bar{R}^t\vee I$ に関係したいくつかの性質を示す。

次の性質は既に知られている。尚，元の主張は3ではなくすべての奇数に対して示されている。

命題2． $R=(r_{ij})$ をブール行列とする。このとき，次が成り立つ。

(1)(橋本［2，性質20］) $R^3\leqq\bar{R}^t\vee I$ ならば $R\wedge R^t\leqq I$。すなわち，$i\neq j$ で $r_{ij}=1$ ならば $r_{ji}=0$。

(2)(橋本［3，性質5］) $R^3=\bar{R}^t\vee I$ ならば $R\leqq R^3$。

まず，$R^3=\bar{R}^t\vee I$ という性質が転置や置換で不変であることを示す。

命題3． R をブール行列としたとき，次が成り立つ。

(1) $R^3=\bar{R}^t\vee I$ となるため必要十分条件は $(R^t)^3=(\overline{R^t})^t\vee I$。

(2) $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ とする。$R^3=\bar{R}^t\vee I$ となるため必要十分条件は $(R^\sigma)^3=(\overline{R^\sigma})^t\vee I$。

証明.

(1) $(R^t)^3=(R^3)^t=(\bar{R}^t\vee I)^t=(\bar{R}^t)^t\vee I^t=(\overline{R^t})^t\vee I$。$(R^t)^t=R$ より十分性も言える。

(2) (1)の証明とほぼ同様。十分性は $(R^\sigma)^{\sigma^{-1}}=R$ を使う。 □

次に $R^3\neq\bar{R}^t\vee I$ となる場合をいつくか与える。

命題4． R をブール行列としたとき，次が成り立つ。

(1) l を自然数とする。R のある行またはある列の成分がすべて0ならば R^l のその行またはその列の成分はすべて0。従って，このときは $R^3\neq\bar{R}^t\vee I$。

(2) $R \leqq I$ ならば $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$。

(3) $R^3 = E$ ならば $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$。

証明.

(1) 容易。

(2) $R \leqq I$ ならば $\bar{R}^t$ は対角成分以外に1を持つ。一方，$R \leqq I$ なので $R^3 \leqq R^2 \leqq R \leqq I$。よって $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$。

(3) $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ と仮定する。$R^3 = E$ ならば $\bar{R}^t \vee I = E$。従って，$R \leqq I$。これは(2)に反する。□

系5. R をブール行列，$i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ とする。R の (i, i) 成分が0で他の第 i 行の成分がすべて1ならば $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$。行を列に変えても同じ結果が成り立つ。

証明. 命題2(1)より R の第 i 列の成分はすべて0になるので命題4(1)より。□

特別な場合には予想1は正しいことが解る。

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

とする。

命題6. ブール行列 R が $R^3 = \bar{R}^t \vee I$ を満たすとする。このとき，次が成り立つ。

(1) $N \leqq R$ ならば $R = Z$。特に，$Z \leqq R$ ならば $R = Z$。

(2) $Z \geqq R$ ならば $R = Z$。

証明. $R=(r_{ij})$ とおく。

(1) $i<j$ とする。$N \leqq R$ より $r_{ij}=1$ である。よって，命題2(1)より $r_{ji}=0$ となる。よって，$R \leqq Z$ となる。従って，ある $J \leqq I$ により $R=N \vee J$ と書ける。よって，$R^2=(N \vee J)(N \vee J)=N^2 \vee NJ \vee JN \vee J^2 \leqq N \vee J=R$。よって，$I \leqq R^3=R^2R \leqq R^2 \leqq N \vee J$。よって，$J=I$。従って，$R=N \vee I=Z$。

(2) もし $r_{ij}=0$ で $i<j$ となる i, j が存在するならば $\bar{R}^t \not\leqq Z$ となる。一方，$\bar{R}^t \leqq \bar{R}^t \vee I=R^3 \leqq Z^3=Z$。これは矛盾。従って，$N \leqq R$。よって(1)より $R=Z$。 □

命題6は次のように一般化できる。

系7. $R^3=\bar{R}^t \vee I$ とする。このとき，次が成り立つ。

(1) $N \leqq R^3$ ならば $R=Z$。特に，$Z \leqq R^3$ ならば $R=Z$。

(2) $Z \geqq R^3$ ならば $R=Z$。

証明.

(1) $N \leqq R^3=\bar{R}^t \vee I$ なので $N \leqq \bar{R}^t$。よって，$Z=\overline{N^t} \geqq R$。従って，命題6(2)より $R=Z$。

(2) $Z \geqq R^3=\bar{R}^t \vee I \geqq \bar{R}^t$。よって，$N=\overline{Z^t} \leqq R$。従って，命題6(1)より $R=Z$。 □

帰納的に考えるとき，以下の性質が役に立つ。

命題8. $n>1$ とし，$n-1$ のとき予想1が成り立つとする。R を $R^3=\bar{R}^t \vee I$ を満たす n 次ブール行列とする。このとき，次が成り立つ。

(1) $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ とする。R の (j, j) 成分が1で他の j 列の成分はすべて0とする。このとき，$R^\sigma=Z$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在する。列を行に変えても同様。

(2) R のある行またはある列のすべての成分が1とする。このとき，$R^\sigma=Z$

となる $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在する。

証明. 列に関する主張が示されると，行に関する主張は命題3(1)によって示される。

(1) $j=1$ のときは $(1j)=1$ とする。$R^{(1j)}$ は次の形になる。

$$R^{(1j)}=\begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & S & \\ 0 & & & \end{bmatrix}。$$

ただし，S は $n-1$ 次のブール行列で，$*$ は0または1を表す。ここで，

$$(R^{(1j)})^3=\begin{bmatrix} 1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & & S^3 \\ 0 & & \end{bmatrix},$$

$$(R^{(1j)})^3=(R^3)^{(1j)}=(\bar{R}^t \vee I)^{(1j)}=(\overline{R^{(1j)}})^t \vee I=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ * & & & \\ \cdots & & \overline{S^t} & \\ * & & & \end{bmatrix} \vee I。$$

従って，

$S^3=\overline{S^t} \vee I$。

帰納法の仮定より，$\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ が存在して $S^\tau=Z_{n-1}$ となる。よって，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して $R^\sigma \leqq Z$ となる。従って，命題6(2)より $R^\sigma=Z$ となる。

(2) R の第 j 列のすべての成分が1であるとする。命題2(1)より第 j 行は (j,j) 成分が1で他の成分がすべて0である。従って，(1)より結論が成り立つ。 □

$n-1$ のとき予想1が正しいと仮定すると，n のとき系7(1)や命題8は次のように拡張される。

系 9. 命題 8 と同じ仮定の下で，次が成り立つ。

(1) $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ とする。R^3 の (j,j) 成分以外の第 j 列の成分がすべて 0 ならば，$R^\sigma=Z$ となる $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が存在する。行に関しても同様。

(2) R^3のある行またはある列の成分がすべて 1 ならば，$R^\sigma=Z$ となる $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が存在する。

証明.

(1) $R^3=\bar{R}^t\vee I$ なので，$\bar{R}^t$の (j,j) 以外の第 j 列の成分はすべて 0。よって，Rの (j,j) 以外の第 j 行の成分はすべて 1。系 5 よりR の (j,j) 成分は 1 となる。すなわち，R の第 j 行の成分はすべて 1。従って，命題 8 (2)より結論が成り立つ。命題 3 (1)より行に関する主張が示される。

(2) (1)の証明とほぼ同様。 □

Z^t が Z の置換で表されることを示しておく。

命題10. n が偶数のときは

$$Z^t=Z^{(1n)(2,n-1)\cdots(n/2,n/2+1)},$$

n が奇数のときは

$$Z^t=Z^{(1n)(2,n-1)\cdots((n-1)/2,(n+1)/2+1)}。$$

証明. $i=1,2,\cdots,n$ とする。右辺の第 i 行は，すべての $j=1,2,\cdots,n$に関して Z の第 $n-i+1$ 行の第 j 列を第 $n-j+1$ 列と入れ替えたものである。それが Z^t になる。□

以下，$n=2,3,4$ のとき予想 1 が正しいことを示す。ブール行列 R の第 i 行を r_i と書くことにする。命題 4 (1)より重さが 0 の r_i があるときは考える必要がない。各 n について第 1 行の重さ $w(\mathrm{r}_1)$ で場合分けする。

4　$n=2$

$R=(r_{ij})$ を $R^3=\bar{R}^t\vee I$ を満たす 2 次ブール行列とする。

4.1　$w(\mathrm{r}_1)=1$

4.1.1　$r_{11}=1$ の場合

$r_{12}=0$ となる。$r_{22}=0$ ならば命題4(1)より $R^3 \neq \bar{R}^t \vee I$ となり矛盾。よって $r_{22}=1$。$r_{21}=0$ なら命題4(2)より矛盾。よって $r_{21}=1$ となり，$R=Z^t=Z^{(12)}$ なので $R^{(12)}=Z$ となる。

4.1.2　$r_{11}=0$ の場合

$r_{12}=1$ となるので，命題2(1)より $r_{21}=0$ となる。よって，第1列の成分がすべて0となるので命題4(1)より矛盾。

4.2　$w(\mathrm{r}_1)=2$

$r_{12}=1$ なので $r_{21}=0$。よって，命題4(1)より $r_{22}=1$ となる。従って，$R=Z$。

以上により，$n=2$ のとき予想1は正しいことが解る。すなわち，$R^3=\bar{R}^t \vee I$ を満たす R は

$$Z=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},\qquad Z^{(12)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$$

だけである。

5　$n=3$

R を $R^3=\bar{R}^t \vee I$ を満たす3次ブール行列とする。$n=2$ の場合が示されたので，命題8の(1)と(2)より

$$\mathrm{r}_1=(1,0,0),\ \mathrm{r}_2=(0,1,0),\ \mathrm{r}_3=(0,0,1),\ \mathrm{r}_1=(1,1,1)$$

は調べる必要がない。

5.1　$w(\mathrm{r}_1)=1$

$\mathrm{r}_1=(0,1,0)$ の場合が示されると，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}^{(23)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

なので, $\mathrm{r}_1=(0, 0, 1)$の場合は考える必要がない。よって $\mathrm{r}_1=(0, 1, 0)$とする。命題 2 (1)より $\mathrm{r}_2=(0, *, *)$となる。$\mathrm{r}_2=(0, *, 0)$は済んでいる。残っているのは $\mathrm{r}_2=(0, 0, 1)$と $\mathrm{r}_2=(0, 1, 1)$である。また, 命題 2 (1)と命題 4 (1)より $\mathrm{r}_3=(1, 0, *)$としてよい。

5.1.1 $\mathrm{r}_2=(0, 0, 1)$の場合

このときは

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad R^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

となり $R \not\leq R^3$ なので命題 2 (2)に反する。

5.1.2 $\mathrm{r}_2=(0, 1, 1)$の場合

このときは

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad R^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので系 9 (2)より $R^\sigma=Z$ となるが, R は重さ 3 の行ベクトルを持たないので矛盾。

5.2 $w(\mathrm{r}_1)=2$

系 5 より $\mathrm{r}_1=(0, 1, 1)$は考える必要がない。$\mathrm{r}_1=(1, 1, 0)$の場合が示されると, 置換 (23) により $\mathrm{r}_1=(1, 0, 1)$の場合は出てくる。よって, $\mathrm{r}_1=(1, 1, 0)$としてよい。このときは, $\mathrm{r}_2=(0, *, *)$となる。$\mathrm{r}_2=(0, *, 0)$は済んでいるので, $\mathrm{r}_2=(0, *, 1)$としてよい。また, 命題 8 (1)より $\mathrm{r}_3=(1, 0, *)$としてよい。よって,

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&*&1\\1&0&*\end{pmatrix},\qquad R^3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&*\\1&1&1\end{pmatrix}$$

なので系9(2)に反する。

以上により，$n=3$ のとき予想1が正しいことが示された。従って，このとき $R^3=\bar{R}^t\vee I$ を満たす R は

$$Z=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad Z^{(12)}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad Z^{(13)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$Z^{(23)}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad Z^{(123)}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad Z^{(132)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

だけである。

6　$n=4$

$R=(r_{ij})$ を $R^3=\bar{R}^t\vee I$ を満たす4次ブール行列とする。$n=3$ の場合が示されたので，命題8の(1)と(2)より

$\mathrm{r}_1=(1,0,0,0)$,　$\mathrm{r}_2=(0,1,0,0)$,　$\mathrm{r}_3=(0,0,1,0)$,

$\mathrm{r}_4=(0,0,0,1)$,　$\mathrm{r}_1=(1,1,1,1)$

は調べる必要がない。

6.1　$w(\mathrm{r}_1)=1$

$\mathrm{r}_1=(0,1,0,0)$ の場合が示されると，置換により $\mathrm{r}_1=(0,0,1,0)$ と $\mathrm{r}_1=(0,0,0,1)$ は示す必要がない。よって

$\mathrm{r}_1=(0,1,0,0)$

とする。よって $\mathrm{r}_2=(0,*,*,*)$ となる。

6.1.1　$w=(\mathrm{r}_2)=1$ の場合

$r_2=(0,1,0,0)$は調べる必要がない。置換により$r_2=(0,0,1,0)$としてよい。このときは$r_3=(*,0,*,*)$となる。$r_3=(0,0,*,0)$は調べる必要がない。$r_3=(*,0,*,0)$なら命題4(1)よりRの第4列が命題8(1)の条件を満たす。従って，$r_3=(*,0,*,1)$としてよい。よって，$r_4=(*,*,0,*)$となる。従って，

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\*&0&*&1\\*&*&0&*\end{pmatrix},\quad R^3=\begin{pmatrix}*&0&*&1\\*&*&*&*\\*&*&*&*\\*&*&*&*\end{pmatrix}$$

となり$R\not\leq R^3$で命題2(2)に反する。

6.1.2　$w(r_2)=2$ の場合

この場合は,$r_2=(0,1,1,0)$と$r_2=(0,1,0,1)$と$r_2=(0,0,1,1)$であるが，置換(23)により$r_2=(0,1,1,0)$を示せば$r_2=(0,1,0,1)$は扱う必要がない。よって，$r_2=(0,1,1,0)$または$r_2=(0,0,1,1)$としてよい。

(1) $r_2=(0,1,1,0)$の場合

6.1.1と同様に$r_3=(*,0,*,1)$，$r_4=(*,*,0,*)$としてよい。

(i) $r_{31}=0$の場合

$r_4=(1,*,0,*)$としてよいので

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&*&1\\1&*&0&*\end{pmatrix},\quad R^3=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&1\\*&1&*&*\\*&1&1&*\end{pmatrix}$$

となり$I\not\leq R^3$なので矛盾。

(ii) $r_{31}=1$の場合

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&*&1\\*&*&0&*\end{pmatrix},\quad R^3=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\*&1&1&*\\*&*&*&*\end{pmatrix}$$

となり系9(2)より$R^\sigma=Z$となるが，Rは重さ4の行ベクトルを持たないので矛盾。

(2) $\mathrm{r}_2=(0,0,1,1)$の場合

このときは$\mathrm{r}_3=(*,0,*,*)$，$\mathrm{r}_4=(*,0,*,*)$となる。

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\*&0&*&*\\*&0&*&*\end{pmatrix},\quad R^3=\begin{pmatrix}*&0&*&*\\*&*&*&*\\*&*&*&*\\*&*&*&*\end{pmatrix}$$

となり$R\nleqq R^3$なので矛盾。

6.1.3　$w(\mathrm{r}_2)=3$の場合

このときは$\mathrm{r}_2=(0,1,1,1)$，$\mathrm{r}_3=(*,0,*,*)$，$\mathrm{r}_4=(*,0,*,*)$となる。$\mathrm{r}_3=(1,0,0,0)$とする。

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\*&0&*&*\end{pmatrix},\quad R^3=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\\*&*&*&*\end{pmatrix}$$

となり系9(2)に反する。

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&*&*\\*&0&*&*\end{pmatrix}.$$

とすると$R\leqq S$なので$R^3\leqq S^3$。よって，系9(2)に反する。従って，$\mathrm{r}_3=(1,0,*,*)$の場合は済んだ。よって，$\mathrm{r}_3=(0,0,*,*)$の場合を考えればよいが，$\mathrm{r}_3=(0,0,*,0)$の場合は済んでいるので$\mathrm{r}_3=(0,0,*,1)$としてよ

い。よって，$\mathrm{r}_4=(*, 0, 0, *)$となる。$\mathrm{r}_4=(0, 0, 0, *)$の場合は済んでいるので$\mathrm{r}_4=(1, 0, 0, *)$としてよい。

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad R^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ * & 1 & * & * \\ * & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり系 9 (2)に反する。

$w(\mathrm{r}_1)=1$の場合が示されたので，置換と転置により，

(6.1) 行ベクトルまたは列ベクトルの重さが1の場合は調べる必要がない。

6.2　$w(\mathrm{r}_1)=2$ の場合

置換により$\mathrm{r}_1=(1, 1, 0, 0)$と$\mathrm{r}_1=(0, 1, 1, 0)$を調べればよい。

6.2.1　$\mathrm{r}_1=(1, 1, 0, 0)$の場合

$\mathrm{r}_2=(0, *, *, *)$としてよい。また，(6.1)より$w(\mathrm{r}_i) \geqq 2$ $(i=2, 3, 4)$としてよい。よって，置換により$\mathrm{r}_2=(0, 1, 1, 0)$と$\mathrm{r}_2=(0, 0, 1, 1)$を調べればよい。

(1) $\mathrm{r}_2=(0, 1, 1, 0)$の場合

$\mathrm{r}_3=(*, 0, *, *)$となる。$w(\mathrm{r}_3) \geqq 2$なので次の4つの場合に別れる。

(i) $\mathrm{r}_3=(1, 0, 1, 0)$の場合

$\mathrm{r}_4=(*, *, *, 1)$としてよい。このときは命題 4 (1)より第4列の重さが1になるので(6.1)より。

(ii) $\mathrm{r}_3=(1, 0, 0, 1)$の場合

$\mathrm{r}_4=(*, *, 0, *)$となる。このときは$R$の第3列の重さが1になる。

(iii) $\mathrm{r}_3=(0, 0, 1, 1)$の場合

$\mathrm{r}_4=(*, *, 0, *)$となる。

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\*&*&0&*\end{pmatrix},\qquad R^3=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\*&1&1&1\\*&*&1&1\\*&*&*&*\end{pmatrix}$$

となり系9(2)に反する。

(iv) $r_3=(1,0,1,1)$の場合

$$S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\*&*&0&*\end{pmatrix}$$

とおく。Rを(iii)のブール行列とすると $R^3\leqq S^3$。よって，系9(2)に反する。

(2) $r_2=(0,0,1,1)$の場合

このときは $r_3=(*,0,*,*)$，$r_4=(*,0,*,*)$となりRの第2列の重さが1になる。

6.2.2　$r_1=(0,1,1,0)$の場合

このときは

$$R=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&*&*&*\\0&*&*&*\\1&*&*&*\end{pmatrix}$$

となり第1列の重さが1になる。

$w(r_1)=2$ の場合が示されたので，置換と転置により，

（6.2）行ベクトルまたは列ベクトルの重さが2の場合は調べる必要がない。

6.3　$w(r_1)=3$ の場合

置換により $r_1=(1,1,1,0)$と $r_1=(0,1,1,1)$ を調べればよい。$r_1=$

(0, 1, 1, 1)の場合は系5で示した。よって，$r_1=(1, 1, 1, 0)$としてよい。このときは

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

となる。R の第1列は重さが1または2なので(6.1)または(6.2)に帰着する。

以上により，$n=4$ のとき予想1が正しいことが示された。

7　おわりに

$R^3=\bar{R}^t \vee I$ ならば $R^\sigma \in Z$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在することを，ブール行列の次数 n が2, 3, 4の場合に示した。証明には，帰納法といくつかの性質と計算を用いた。置換と転置により場合の数をかなり減らすことが出来たが，すべての n に対して予想1を示すためにはまだ示すべき性質が不足しているようである。今後の検討課題である。

面白い話題を提供していただいた橋本先生に感謝する。

参考文献

[1] 柏木　芳美：“連結的，推移的，非反射的ブール行列の一意性”，山口大学経済学雑誌，第45巻，第4号，pp.497-513(1997).

[2] 橋本　寛：“連結的推移関係行列の性質II”，山口大学経済学雑誌，第35巻，第3・4号，pp.281-293(1986).

[3] 橋本　寛：“連結的な反対称的推移関係”，山口大学経済学雑誌，第42巻，第3・4号，pp.53-74(1994).