一般化された推移性のもとでの非対称関係

Asymmetric Relations under Generalized Transitivity

橋　本　　　寛

HASHIMOTO, Hiroshi

Abstract

Under generalized transitivity we examine elementary properties of asymmetric relations. We show such relations become transitive on the assumption. Then we have some necessary and sufficient conditions for irreflexive transitive relations.

1．はじめに

推移関係を一般化した二項関係を考え，この関係が非反射的推移関係となるための必要十分条件および関連する性質についてブール行列を用いて考察をおこなう。本論文で議論される一般化された推移関係は容易にわかるように非対称であれば非反射的推移関係となる。非反射的推移関係は狭義の半順序とも呼ばれ様々な分野で出現する応用上重要な基本的二項関係である [1, 2,9-12]。

2．定義

0,1の要素をもつn次ブール行列$R=[r_{ij}]$ および$S=[s_{ij}]$ に対して以下のように演算と記法を定める。

$$R \vee S=[r_{ij} \vee s_{ij}]=[\max(r_{ij}, s_{ij})]$$

$$R \wedge S=[r_{ij} \wedge s_{ij}]=[\min(r_{ij}, s_{ij})]$$

$$\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]=[1-r_{ij}]$$

$$R'=[r_{ji}]$$

$$\triangle R=R \wedge \overline{R'}$$

$$\nabla R = R \wedge R'$$

$$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$$

$$R^0 = [r_{ij}^{(0)}] = I = [\delta_{ij}]$$ （δ_{ij} はクロネッカーのデルタ）

$$R^{k+1} = [r_{ij}^{(k+1)}] = R^k \times R \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$R \leqq S \Leftrightarrow r_{ij} \leqq s_{ij}, i, j = 1, 2 \cdots, n$$

推移関係を表現するブール行列Rは$R^2 \leqq R$となるので，$R^2 \leqq R \vee I$なるブール行列Rを，ここでは一般化された推移性をもつブール行列と呼び，Rで表現される二項関係を一般化された推移関係と呼ぶことにする。また非対称的な関係を表現するブール行列Rは$\nabla R = O$となる。なお，Oは零行列である。

3．結果

与えられた関係を表現するブール行列をRとして，一般化された推移性である$R^2 \leqq R \vee I$のもとで，非対称性すなわち$\nabla R = O$と同値になる条件について考察をおこない，非反射的推移性の$R^2 \leqq R \vee I$に関する様々な同値条件を求める。以下の議論においては，$R = [r_{ij}]$ は，特に指定した場合を除き，一般に0,1の要素からなるn次ブール行列であるとする。

［性質1］［7］ $R^2 \leqq R, R \wedge I = O \Leftrightarrow R^2 \leqq R \vee I, \nabla R = O$

［性質2］［4］ $\nabla R \leqq I$のとき

$$R^2 \leqq R \Leftrightarrow R^2 \leqq R \vee I$$

［性質3］ $\nabla R = O$のとき

$$R^2 \leqq R \Leftrightarrow R^2 \leqq R \vee I$$

(証明) 性質2による。(証明終)

この性質3によって，非対称性のもとでは推移性と$R^2 \leqq R \vee I$で表される一般化された推移性は同値であることがわかる。次に非対称性$\nabla R = O$と同値な条件を示す。

［性質4］［7］次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R = O$

(2)　$\triangle R = R$

(3) $R \leqq \overline{R'}$

(4) $R^2 \wedge I = O$

(5) $R = R \wedge \bar{I} = \triangle R$

(6) $\nabla R \leqq \bar{R} \vee \overline{R'}$

(7) $\nabla(R^3) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'}$

(8) $\nabla(R^5) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'}$

(9) すべてのl $(l=0,1,2,\cdots)$ に対して$\nabla(R^{2l+1}) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'}$

(10) あるl $(l=0,1,2,\cdots)$ に対して$\nabla(R^{2l+1}) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'}$

[性質5] あるl $(l=0,1,2,\cdots)$ に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \Leftrightarrow \nabla R = O$

(証明) (1) あるl $(l=0,1,2,\cdots)$ に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$のとき

もし$r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$とすれば$r_{ii}^{(2)} = 1$であるから

$$r_{ij}^{(2l+1)} \geqq r_{ii}^{(2l)} \wedge r_{ij} = 1$$

となり，$r_{ji}=0$となるが，これは矛盾する。したがって$r_{ij} \wedge r_{ji} = 0$すなわち$\nabla R = O$となる。

(2) $\nabla R = O$のとき

$\nabla R = O$から$R \wedge R' = O$となり，$R \leqq \overline{R'}$となる。これは$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$の$l=0$の場合であるから，ある$l$ $(l=0,1,2,\cdots)$ に対して$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$となる。(証明終)

[注意1] 一般には，

$$\nabla R = O \Rightarrow \text{すべての} l \ (l=0,1,2,\cdots) \text{ に対して} R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$$

とはならない。いま$l=1$,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$2l+1=3$,

$$\overline{R'}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$R^2=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$R^3=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

となり，$\nabla R=O$であるが$R^3\leqq\overline{R'}$とはならない。

［性質 6 ］次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R, R\wedge I=O$

(2)　$R^2\leqq R\vee I, \triangle R=R$

(3)　$R^2\leqq R\vee I, R\leqq\overline{R'}$

(4)　$R^2\leqq R\vee I, R^2\wedge I=O$

(5)　$R^2\leqq R\vee I, R=R\wedge\bar{I}=\triangle R$

(6)　$R^2\leqq R\vee I, \nabla R\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(7)　$R^2\leqq R\vee I, \nabla(R^3)\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(8)　$R^2\leqq R\vee I, \nabla(R^5)\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(9)　$R^2\leqq R\vee I,$すべてのl（$l=0,1,2,\cdots$）に対して$\nabla(R^{2l+1})\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(10)　$R^2\leqq R\vee I,$あるl（$l=0,1,2,\cdots$）に対して$\nabla(R^{2l+1})\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(11)　$R^2\leqq R\vee I,$あるl（$l=0,1,2,\cdots$）に対して$R^{2l+1}\leqq\overline{R'}$

(証明) 性質1によって

$$R^2 \leqq R, R \wedge I = O \Leftrightarrow R^2 \leqq R \vee I, \nabla R = O$$

であるので性質4および性質5による。(証明終)

なお，上記の条件(4)に関しては

$$R^2 \wedge I = O \Leftrightarrow R^2 \leqq \bar{I}$$

であるから，

$$R^2 \leqq R \vee I, R^2 \wedge I = O \Leftrightarrow R^2 \leqq (R \vee I) \wedge \bar{I} = R \wedge \bar{I}$$

となる。

［性質7］［7］あるl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R^l} \Leftrightarrow R \wedge I = O$

［性質8］あるl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して$R^l \leqq \overline{R^l} \Leftrightarrow R \wedge I = O$

(証明) (1) あるl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して$R^l \leqq \overline{R^l}$のとき

$R^l \wedge I \leqq R^l \leqq \overline{R^l}$ であるから性質7によって$R \wedge I = O$となる。

(2) $R \wedge I = O$のとき

このとき$I \leqq \overline{R^l}$となるが，これは$R^l \leqq \overline{R^l}$の$l=0$の場合であるから，あるl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して$R^l \leqq \overline{R^l}$となる。(証明終)

［性質9］すべてのl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して，

$$R^2 \leqq R \vee I,\ R^{2l+1} \leqq \overline{R^l} \vee I \Rightarrow R^2 \leqq R$$

(証明) $r_{ik} = r_{kj} = 1$とおく。このとき$r_{ij} = 1$となることを示す。

(1) $i \neq j$のとき

$r_{ij}^{(2)} = 1$であるから$R^2 \leqq R \vee I$によって$r_{ij} = 1$となる。

(2) $i = j$のとき

$r_{ik} = r_{ki} = 1$だから$r_{ii}^{(2)} = 1$となり，したがって$r_{ii}^{(2l)} \wedge r_{ik} = 1$すなわち$r_{ik}^{(2l+1)} = 1$となる。いま，もし$i \neq k$とすれば，$R^{2l+1} \leqq \overline{R^l} \vee I$から$r_{ki} = 0$となるが，これは矛盾するので，$i = k$でなければならない。よって$r_{ii} = 1$となり，$r_{ij} = r_{ii} = 1$となる。(証明終)

なお，一般に，すべてのl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して，

$$R^{2l+1} \leqq \overline{R}' \vee I \Rightarrow \nabla R \leqq I$$

が成立する［3］。

［性質10］$R^2 \leqq R \vee I$のとき

(1)　$R \leqq \overline{R}' \vee I \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2)　$R^3 \leqq \overline{R}' \vee I \Rightarrow R^2 \leqq R$

(3)　$R^5 \leqq \overline{R}' \vee I \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）性質9による。（証明終）

［注意2］一般には，

$$R^2 \leqq R \vee I,\ R^2 \leqq \overline{R}' \Rightarrow R^2 \leqq R$$

とはならない。いま，

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，明らかに$R^2 \leqq R \vee I$，$R^2 \leqq \overline{R}'$であるけれども$R^2 \leqq R$とはならない。

［注意3］一般には，

$$R^3 \leqq R \vee I,\ R^3 \leqq \overline{R}' \vee I \Rightarrow R^3 \leqq R$$

とはならない。いま，

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R^3 = I$であって

$$R^3 \leqq R \vee I,\ R^3 \leqq \overline{R}' \vee I$$

となるが，$R^3 \leqq R$とはならない。

［性質11］［7］$R^2 \leqq R, R \wedge I = O \Leftrightarrow R^2 \leqq R, R^n = O$

［性質12］［8］$R^n = O \Leftrightarrow$すべてのk（$k=0,1,2,\cdots$）に対して$R^k \leqq \overline{R}'$

次の性質はほとんど自明であり，またよく知られている。

［性質13］$R^n = O \Rightarrow \nabla R = O$

(証明) $R^n=O$のとき$R^{2n}=O$となる。もし$r_{ij}\wedge r_{ji}=1$ならば$r_{ii}^{(2)}=1$，したがって$r_{ii}^{(2n)}=1$となり，矛盾する。よって$r_{ij}\wedge r_{ji}=0$すなわち$\nabla R=O$となる。(証明終)

なお，上記の性質13は，性質12の$k=1$の場合からも導かれる。すなわち$k=1$とすれば

$$R^n=O\Rightarrow R\leqq\overline{R'}$$

となる。したがって$\nabla R=O$が得られる。

[性質14] $R^2\leqq R\vee I$のとき

$\nabla R=O\Leftrightarrow R^n=O$

(証明) (1) $\nabla R=O$のとき

性質１によって$R^2\leqq R,R\wedge I=O$となるから性質11によって$R^n=O$となる。

(2) $R^n=O$のとき

性質13によって$\nabla R=O$となる。(証明終)

[注意４] 一般には，

$$R^2\leqq R\vee I,R\wedge I=O\Rightarrow\nabla R=O$$

とはならない。そのことは

$$R=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

とおいてみれば容易にわかる。

[性質15] [５] 次の条件は同値である。

(1) $R^2\leqq R,R\wedge I=O$

(2) $R^2\leqq R\vee I,R^n=O$

(証明) 性質１によって

$$R^2 \leqq R, R \wedge I = O \Leftrightarrow R^2 \leqq R \vee I, \nabla R = O$$

であるから，性質14による。(証明終)

［性質16］次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R, R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R \vee I$, すべてのk ($k=0,1,2,\cdots$) に対して$R^k \leqq \overline{R'}$

(証明) 性質15によって

$$R^2 \leqq R, R \wedge I = O \Leftrightarrow R^2 \leqq R \vee I, R^n = O$$

であるから，性質12による。(証明終)

［性質17］すべてのl ($l=0,1,2,\cdots$) に対して，次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R, R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R \vee I, R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$

(証明) (1) ⇒ (2) 明らかに$R^2 \leqq R \leqq R \vee I$であり，また$\nabla R = O$となるから$R \leqq \overline{R'}$となる。したがって$R^{2l+1} \leqq R \leqq \overline{R'}$となる。

(2) ⇒ (1) 明らかに$R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \leqq \overline{R'} \vee I$であるから，性質９によって$R^2 \leqq R$となる。また性質８によって$R^{2l+1} \leqq \overline{R'}$から$R \wedge I = O$が得られる。(証明終)

なお，上記の (1) ⇒ (2) は性質16によってもわかる。また (2) ⇒ (1) は性質６ (1) (11) からもいえる。

［性質18］次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R, R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R \vee I, R \leqq \overline{R'}$

(3)　$R^2 \leqq R \vee I, R^3 \leqq \overline{R'}$

(4)　$R^2 \leqq R \vee I, R^5 \leqq \overline{R'}$

(証明) 性質17による。(証明終)

なお，上記の (2) は性質６ (3) でも示されている。

[性質19] [6] すべてのk ($k=0,1,2,\cdots$) に対して

$$R^k \leqq \overline{R'} \Leftrightarrow R^{k+1} \wedge I = O$$

[性質20] すべてのk ($k=1,2,\cdots$) に対して，次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R, R \wedge I = O$

(2) $R^2 \leqq R \vee I, R^{2k} \wedge I = O$

(証明) 性質19によって

$$R^{2l+1} \leqq \overline{R'} \Leftrightarrow R^{2l+2} \wedge I = O$$

であるから性質17による。(証明終)

[性質21] 次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R, R \wedge I = O$

(2) $R^2 \leqq R \vee I, R^2 \wedge I = O$

(3) $R^2 \leqq R \vee I, R^4 \wedge I = O$

(4) $R^2 \leqq R \vee I, R^6 \wedge I = O$

(証明) 性質20による。(証明終)

なお，上記の (2) はすでに性質6 (4) でも示されている。

[性質22] 次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R \vee I$

(2) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \vee I$

(3) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \vee I$

(4) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee I$

(証明) (1) ⇒ (2) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R^2 \leqq R \vee I$

(1) ⇒ (3) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R^2 \leqq R \vee I$

(2) ⇒ (4) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \vee I$

(3) ⇒ (4) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq (R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \vee I$

(4) ⇒ (1) $r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$とおく。このとき$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$となることを示す。

(a) $i \neq k, k \neq j$のとき

$r_{ik} \wedge \overline{\delta_{ik}} \wedge r_{kj} \wedge \overline{\delta_{kj}} = 1$となるから$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$となる。

(b) $i=k$のとき

$r_{ii} \wedge r_{ij} = 1$だから$r_{ij} = 1$となり，$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$となる。

(c) $k=j$のとき

$r_{ij} \wedge r_{jj} = 1$だから$r_{ij} = 1$となり，$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$となる。(証明終)

なお，$R^2 \leqq R \vee I$と同値な条件が文献［5］でも示されている。

4．まとめ

本論文では一般化された推移性のもとで，非対称性と同値になる条件を調べることにより，非反射的推移性のいくつかの同値条件を明らかにした。これらの性質の大部分はほとんど自明であり，また直接応用に結びつくものではないが，非反射的推移関係の基本的性質を議論する上で有用であると考えられる。なお，今後の問題として，ここでの考察とは逆に，非対称性のもとで一般化された推移性と同値となる条件を調べることがある。これについては次の機会に報告したい。

謝辞　LaTeXによる原稿作成においてご援助いただいた柏木芳美教授に感謝します。

文　献

［1］Arrow,K.J.: “Social Choice and Individual Values,” 2nd ed.,Yale University Press, New Haven (1963).

［2］Fishburn,P.C.: “The Theory of Social Choice,” Princeton University Press, New Jersey (1973).

［3］橋本　寛: “連結的推移関係行列の性質Ⅱ”, 山口経済学雑誌, 第35巻, 第3・4号, pp.281-293 (昭和61年1月).

［4］橋本　寛: “連結的関係行列の初等的性質”, 山口経済学雑誌, 第38巻, 第3・4号, pp.557-576 (平成元年7月).

［5］橋本　寛: “ほとんど推移的な関係行列の性質”, 山口経済学雑誌,

第43巻, 第3・4号, pp.273-288 (平成7年5月).

[6] 橋本　寛: "非反射的推移関係", 山口経済学雑誌, 第46巻, 第4号, pp.479-498 (平成10年7月).

[7] 橋本　寛: "非反射的推移関係に関する同値条件", 山口経済学雑誌, 第48巻, 第2号, pp.257-285 (平成12年3月).

[8] 橋本　寛: "非対称性のもとでの推移関係", 山口経済学雑誌, 第49巻, 第2号, pp.81-110 (平成13年3月).

[9] 小野寛晰: "情報代数", 共立出版 (1994年2月).

[10] Scott, D. and Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement," The Journal of Symbolic Logic, 23, pp.113-128 (1958).

[11] Sen, A.K.: "Collective Choice and Social Welfare," Holden-Day, San Francisco (1970).

[12] Suzumura,K.: "Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare," Cambridge University Press, Cambridge (1983).