連結的，推移的，非反射的ブール行列の一意性

柏　木　芳　美

1　はじめに

2元ブール代数上の連結的かつ推移的かつ非反射的なブール行列が橋本により研究されている([4])。nを自然数としたとき，そのようなn次ブール行列の個数をいくつかのnに対して数えてみると$n!$となることが予想される。また，グラフでは点の番号の付け替えを行っても本質的には変わらないので，対応するブール行列でも同様のことが成り立つことが予想される。これらのことはn次ブール行列とn次対称群に何らかの関係があることを示唆していると思われる。

この論文では，n次ブール行列に作用する置換を定義し，それを用いて2元ブール代数上の連結的推移的非反射的ブール行列が本質的には1種類であること（定理4.1）及びそのことから導かれるいくつかの性質を示す。特に，最初の予想通り，2元ブール代数上の連結的推移的非反射的n次ブール行列の個数は$n!$であることを示す(系4.1)。また，与えられたブール行列が連結的推移的非反射的であるための判定法（定理5.1，定理5.2）及びこのようなブール行列の1つの構成法を与える（定理6.1)。

2　記号など

一部のものを除き[4]の記号をそのまま用いる。この論文では基礎とな

るブール代数は本質的には2元ブール代数 $\{0, 1\}$ であるが，この節と次の節ではもう少し一般的に必ずしも $\{0, 1\}$ とは限らないブール代数 $\mathscr{B}$ 上で考える。成分が $\mathscr{B}$ の元である n 次正方行列全体を $\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$ と書くこととする。我々の考察の対象の大枠はブール行列代数 $\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$ である。成分がすべて0であるブール行列を O，すべて1であるブール行列を E と書く。$R=(r_{ij})$，$S=(s_{ij})\in\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$ としたとき，$R\vee S=(r_{ij}\vee s_{ij})$，$R\wedge S=(r_{ij}\wedge s_{ij})$，$\bar{R}=(\overline{r_{ij}})$ と定める。次の命題は，ブール代数の定義（例えばHuntingtonの公理系，[2,p.68]）が満たされていることを確認するだけで容易に示される。

命題 2.1　$(\mathscr{M}(n, \mathscr{B}), \vee, \wedge)$ はブール代数である。E がその単位元，O がその零元，$R\in\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$ の補元は $\bar{R}$ である。

$R\leqq S$ は $R\vee S=S$ によって定義されるので，$R\leqq S$ であるための必要十分条件は，すべての (i, j) に対して $r_{ij}\leqq s_{ij}$ となることである。
$a_k\in\mathscr{B}$ $(k\in\{1, \cdots, n\})$ としたとき $\vee_{k=1}^{n}a_k=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$ と書くこととする。$R\times S=(\vee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj}))$ とし，帰納的に $R^1=R$，$R^{k+1}=R^k\times R$ とする（×に関して結合律が成り立つ）。R^t により R の転置行列を表す（[4]では R' と書かれている）。R が $R\vee R^t\vee I=E$ を満たすときは連結的，$R^2\leqq R$ を満たすときは推移的，$R\wedge I=O$ を満たすときは非反射的と呼ばれる。この論文で重要な役割を演じるブール行列は

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

である。次数 n を明記する必要があるときは N_n と書く。n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ と

書く。

3　置換によるブール行列代数の同型

この節では，[3,p.23]に従いブール代数の同型写像を定義し，更に置換によって定まるブール行列代数の自己同型写像を考える。

$\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_2$をブール代数，fを$\mathscr{B}_1$から$\mathscr{B}_2$への写像とする。すべての$x, y\in \mathscr{B}_1$に対して，$f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$，$f(\bar{x})=\overline{f(x)}$が成り立つとき，$f$は$\mathscr{B}_1$から$\mathscr{B}_2$への準同型写像と呼ばれる。$f$が全単射であるとき同型写像と呼ばれ，更に$\mathscr{B}_1=\mathscr{B}_2$のとき自己同型写像と呼ばれる。

$\sigma\in\mathfrak{S}_n$，$R=(r_{ij})\in\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$ に対し，

$$R^{\sigma}=(r_{\sigma(i)\sigma(j)})$$

により$R^{\sigma}\in\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$を定める。$R\mapsto R^{\sigma}$によって定まる$\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$ から$\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$への写像を$\varphi_{\sigma}$と書くことにする。$\mathfrak{S}_n$の単位元は$\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$の恒等写像として作用することに注意しておく。

命題 3.1　上の記号の下で次が成り立つ。

(1) $\tau\in\mathfrak{S}_n$のとき$R^{\sigma\tau}=(R^{\sigma})^{\tau}$。

(2) φ_{σ}はブール代数$\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$ の自己同型写像。

証明　(1) i，$j\in\{1, \cdots, n\}$とする。$t_{ij}=r_{\sigma(i)\sigma(j)}$とおく。$(R^{\sigma})^{\tau}$の (i, j) 成分は，

$$t_{\tau(i)\tau(j)}=r_{\sigma(\tau(i))\sigma(\tau(j))}=r_{(\sigma\tau)(i)(\sigma\tau)(j)}。$$

よって$R^{\sigma\tau}=(R^{\sigma})^{\tau}$。

(2) $S=(s_{ij})\in\mathscr{M}(n, \mathscr{B})$ とする。$\varphi_{\sigma}(R\wedge S)$ の (i, j) 成分は$r_{\sigma(i)\sigma(j)}\wedge s_{\sigma(i)\sigma(j)}$となるので，

$$\varphi_\sigma(R\wedge S)=\varphi_\sigma(R)\wedge\varphi_\sigma(S)。$$

$\bar{R}=\left(\overline{r_{ij}}\right)$より，

$$\varphi_\sigma(\bar{R})=\left(\overline{r_{\sigma(i)\sigma(j)}}\right)=\overline{\varphi_\sigma(R)}。$$

よってφ_σはブール代数の準同型写像である。また，(1)より$\varphi_{\sigma^{-1}}$がφ_σの逆写像を与えることが分かる。

注意 3.1　$\mathcal{M}(n,\mathcal{B})$の自己同型写像全体は群（自己同型群）をなす。$\varphi_\sigma$を$\mathcal{M}(n,\mathcal{B})$の元の右から作用させると，$\sigma\mapsto\varphi_\sigma$によって定まる$\mathfrak{S}_n$から$\mathcal{M}(n,\mathcal{B})$の自己同型群への写像は群の準同型を与える。この写像が単射であることは容易に分かる。

後のために$\mathfrak{S}_n$の作用を命題3.2としてまとめておく。まず，次の補題が成り立つことに注意する（[3,p.23]）。

補題 3.1　$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$をブール代数，fを$\mathcal{B}_1$から$\mathcal{B}_2$への準同型写像とする。このとき次が成り立つ。ただし，x，$y\in\mathcal{B}_1$。

(1) $f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$。

(2) $f(1)=1$，$f(0)=0$。

(3) $x\leqq y$ならば$f(x)\leqq f(y)$。

命題 3.2　$R,S\in\mathcal{M}(n,\mathcal{B})$とし，$\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n$とする。このとき次が成り立つ。

(1) $E^\sigma=E$，$O^\sigma=O$，$I^\sigma=I$。

(2) $(R\vee S)^\sigma=R^\sigma\vee S^\sigma$，$(R\wedge S)^\sigma=R^\sigma\wedge S^\sigma$，$\overline{R}^\sigma=\overline{R^\sigma}$。

(3) $R\leqq S$ならば$R^\sigma\leqq S^\sigma$。

(4) $R^1=R$，$R^{\sigma\tau}=(R^\sigma)^\tau$。ただし，$R^1$の１は$\mathfrak{S}_n$の単位元。

(5) $(R^t)^\sigma=(R^\sigma)^t$。

(6) $(R\times S)^\sigma=R^\sigma\times S^\sigma$。

(7) kが自然数のとき，$(R^k)^\sigma=(R^\sigma)^k$。

証明　(1)～(4)　$I^{\sigma}=I$は容易に分かる。他のものは，命題2.1と命題3.1と補題3.1より。

(5)　容易。

(6)　$S=(s_{ij})$とする。$R\times S$の（$\sigma(i)$，$\sigma(j)$）成分は$\vee_{k=1}^{n} r_{\sigma(i)k}\wedge s_{k\sigma(j)}$。$k$は1から$n$を渡るので，$\vee_{k=1}^{n} r_{\sigma(i)k}\wedge s_{k\sigma(j)}=\vee_{k=1}^{n} r_{\sigma(i)\sigma(k)}\wedge s_{\sigma(k)\sigma(j)}$。これが（$(R\times S)^{\sigma}$の（$i$，$j$）成分なので，$(R\times S)^{\sigma}=R^{\sigma}\times S^{\sigma}$。

(7)　kに関する数学的帰納法と(6)より。

この命題より，連結性，推移性，非反射性は各々$\mathfrak{S}_n$不変であることが直ちに分かる。すなわち，

系 3.1　$R\in\mathscr{M}(n,\mathscr{B})$，$\sigma\in\mathfrak{S}_n$とする。このとき次が成り立つ。

(1)　Rが連結的ならばR^{σ}も連結的。

(2)　Rが推移的ならばR^{σ}も推移的。

(3)　Rが非反射的ならばR^{σ}も非反射的。

4　一意性

この節以降，基礎となるブール代数$\mathscr{B}$は2元ブール代数｛0，1｝とする。また，連結的推移的非反射的ブール行列を(P)を満たすブール行列ということにする。すなわち，ブール行列Rに対して次の性質を考える：

(P)　　$R\vee R^{t}\vee I=E$かつ$R^2\leqq R$かつ$R\wedge I=O$。

性質(P)を満たす典型的なブール行列はNである。この節では，(P)を満たすブール行列はすべて$N^{\sigma}(\sigma\in\mathfrak{S}_n)$の形をしていることを示す。まず，

命題 4.1　(1)　$\sigma\in\mathfrak{S}_n$としたときN^{σ}は(P)を満たす。

(2) $R=(r_{ij})$ を n 次ブール行列とする。R が(P)を満たすための必要十分条件は次の(a)～(c)がすべて成り立つことである。ただし，i, j, $k\in\{1, \cdots, n\}$。

(a) すべての i に対して $r_{ii}=0$。

(b) $i\neq j$ ならば $r_{ji}=\overline{r_{ij}}$。

(c) $r_{ik}=r_{kj}=1$ ならば $r_{ij}=1$。

(3) $n\geqq 2$, $k\in\{1,\cdots,n\}$ とする。n 次ブール行列 R が(P)を満たせば R の第 k 行と第 k 列を取り去った $n-1$ 次のブール行列も(P)を満たす。

(4) (P)を満たすブール行列は成分がすべて0の行を持つ。

証明　(1) N が (P) を満たすことと系3.1より。

(2) まず，$R\wedge I=O$ と(a)の同値性，$R^2\leqq R$ と(c)の同値性は容易に分かる。また，R が(b)を満たせば $R\vee R^t\vee I=E$ となることは容易に分かる。従って，R が(a)～(c)を満たせば (P) を満たす。逆に，R が (P)を満たすとする。(b)を満たすことを示せばよい。$R\vee R^t\vee I=E$ より，$r_{ij}=1$ または $r_{ji}=1$。もし $r_{ij}=r_{ji}=1$ ならば，(c)より $r_{ii}=1$ となり矛盾。よって，$r_{ij}=1$ かつ $r_{ji}=0$ であるか又は，$r_{ij}=0$ かつ $r_{ji}=1$。従って(b)が成り立つ。

(3) (a)～(c)において，添え字に k を含むものをすべて除き，$l>k$ となる番号 l を $l-1$ に置き換えたものを考えると，R の第 k 行と第 k 列を取り去った行列 S が(a)～(c)を満たすことが分かる。よって，(2)より S は (P) を満たす。

(4) n に関する帰納法による。$n=1$ のときは成立する。$n>1$ とし $n-1$ の場合を仮定する。$R=(r_{ij})$ とする。(3)より R の第 n 行と第 n 列を取り去った行列も (P) を満たす。よって帰納法の仮定より，R のある行（i 行とする）は $(0, 0, \cdots, 0, r_{in})$ の形。$r_{in}=0$ なら第 i 行が求めるもの。$r_{in}=1$ の場合を考える。$r_{ni}=\overline{r_{in}}=0$ である。

$1 \leqq j \leqq n-1$，$j \neq i$とする。$r_{ij}=0$なので$r_{ji}=1$。$r_{ji}=r_{in}=1$より$r_{jn}=1$。よって，$r_{nj}=0$。$r_{nn}=0$なので，Rの第n行の成分はすべて０。

命題 4.2　n次ブール行列Rが(P)を満たすとする。このとき$R=N^{\sigma}$となる$\sigma \in \mathfrak{S}_n$が存在する。

証明　nに関する帰納法。$n=1$のときは成り立つ。$n>1$とし$n-1$の場合を仮定する。命題4.1(4)よりRは成分がすべて０の行を持つ。それを第i行とする。$i=n$なら$\alpha=1$とし，$i \neq n$なら$\alpha=(in)$とおくことにより$\alpha \in \mathfrak{S}_n$を定める。$R^{\alpha}$の第$n$行の成分はすべて０である。系3.1より$R^{\alpha}$は連結的なので，

$$R^{\alpha}=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & R_1 & \vdots \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

の形になる。ここでR_1は$n-1$次の行列である。系3.1と命題4.1(3)よりR_1も (P) を満たす。帰納法の仮定より$R_1{}^{\beta}=N_{n-1}$となる$\beta \in \mathfrak{S}_{n-1}$が存在する。$\gamma(j)=\beta(j)$（$1 \leqq j \leqq n-1$），$\gamma(n)=n$により$\gamma \in \mathfrak{S}_n$を定めると，$R^{\alpha\gamma}=N$となる。よって，$\sigma=\gamma^{-1}\alpha^{-1}$が求めるもの。

命題4.2を用いると［４，性質６］の別証が得られる。

命題 4.3　$n \geqq 2$とする。Rが(P)を満たすn次ブール行列ならば，$R^{n-1} \neq O$かつ$R^n=O$。

証明　$k \in \{1, \cdots, n\}$とすると

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

となることがkに関する帰納法で示される。ただし，第1行と第n列の1の個数は$n-k$である。よって，$N^{n-1} \neq O$かつ$N^n = O$。命題4.2より$R = N^\sigma$となる$\sigma \in \mathfrak{S}_n$が存在する。命題3.1(2)と命題3.2(7)を用いると，$R^{n-1} \neq O$と$R^n = O$が言える。

命題4.2のσはRに対して一意的に定まることも示せる。まず，置換に関する次の性質に注意しておく。

補題 4.1　$\sigma \in \mathfrak{S}_n$, i, $j \in \{1, \cdots, n\}$とする。$i < j$ならば常に$\sigma(i) < \sigma(j)$が成り立つとする。このとき$\sigma = 1$。

証明　$\sigma \neq 1$と仮定する。$\sigma(i) \neq i$となるiがある。iをこのようなもので最小にとる。もし$\sigma(i) < i$ならiの最小性より$\sigma(\sigma(i)) = \sigma(i)$。これより$\sigma(i) = i$となるので$i < \sigma(i)$である。もし$i \leqq \sigma^{-1}(i)$ならば，$\sigma(i) \leqq \sigma(\sigma^{-1}(i)) = i$となるので，$\sigma^{-1}(i) < i$。$i$の最小性より$\sigma(\sigma^{-1}(i)) = \sigma^{-1}(i)$。よって$\sigma(i) = i$となり矛盾。従って$\sigma = 1$。

命題 4.4　σ, $\tau \in \mathfrak{S}_n$とする。$N^\sigma = N^\tau$ならば$\sigma = \tau$。

証明　命題3.2(4)より，$N^\sigma = N$ならば$\sigma = 1$となることを示せばよい。

$N=(n_{ij})$ とおく。

$$n_{ij}=\begin{cases}1 & (i<j)\\ 0 & (i\geqq j)\end{cases}$$

である。$N^{\sigma}=(n_{\sigma(i)\sigma(j)})=N$ なので，

$$n_{\sigma(i)\sigma(j)}=\begin{cases}1 & (i<j)\\ 0 & (i\geqq j)。\end{cases}$$

よって，$i<j$ ならば $\sigma(i)<\sigma(j)$ が成り立つ。補題4.1より $\sigma=1$。

以上の結果をまとめて，

定理 4.1　R を２元ブール代数上の n 次ブール行列とする。R が連結的推移的非反射的であるための必要十分条件は $R=N^{\sigma}$ となる $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が存在することである。このとき，σ は R に対して一意的に定まる。

$\mathfrak{S}_n$ の元と(P)を満たすブール行列が１対１に対応するので，

系4.1　(P)を満たす n 次ブール行列の個数は $n!$。

5　判定法

この節ではブール行列が(P)を満たすための判定法を与える。

まず，定理4.1より命題4.1(4)が一般化される。

系 5.1　$k\in\{1, \cdots, n\}$ とする。(P) を満たすブール行列は１の個数が $k-1$ の行と列を唯１つ持つ。

証明　N はこの性質を持つ。$\mathfrak{S}_n$ の元は N の行と列を置換するだけなので，

各行の１の個数に注目するとその配置を変えるだけである。従って，N^σ（$\sigma \in \mathfrak{S}_n$）は１の個数が$k-1$の行を唯１つ持つ。列についても同様。

この系の結論を満たすブール行列では，行（又は列）の番号と行（又は列）の１の個数が１対１に対応していることに注意する。定理4.1のσ(次の命題のσ^{-1})が具体的に得られる。

命題 5.1　Rを(P)を満たすn次ブール行列，$k \in \{1, \cdots, n\}$とする。１の個数が$k-1$である列の番号を$c(k)$と書くことにする。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$を$\sigma(k) = c(k)$により定める。このとき，$R^\sigma = N$。また，１の個数が$k-1$である行の番号を$r(k)$とすると$r(k) = c(n-k+1)$。

証明　R^σの第j列の１の個数は$j-1$である。R^σの(i, j)成分をt_{ij}と書くことにする。

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & (i < j) \\ 0 & (i \geqq j) \end{cases}$$

となることを示せばよい。jに関する帰納法を用いる。$j=1$のときは第１列の成分はすべて０なので成り立つ。$j>1$とし$j-1$まで仮定する。今，$t_{ij}=0$となる$i\,(<j)$があったと仮定する。連結性より$t_{ji}=1$。これは帰納法の仮定に反する。

また，$R^\sigma = N$なので，R^σの第$n-k+1$行の１の個数は$k-1$。よって，$\sigma(n-k+1) = r(k)$。従って，$r(k) = c(n-k+1)$。

例 5.1

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。Rが (P) を満たすことは計算により確かめられる。

$$c(1)=3,\ c(2)=1,\ c(3)=5,\ c(4)=4,\ c(5)=2$$

であるから，命題5.1のσは

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。$R^{\sigma}=N$となることが計算により確かめられる。

また，

$$r(1)=2,\ r(2)=4,\ r(3)=5,\ r(4)=1,\ r(5)=3$$

より$r(k)=c(5-k+1)$ ($k\in\{1, \cdots, 5\}$) が確かめられる。また，第k行の１の個数を$s(k)$，第k列の１の個数を$t(k)$とすると，すべてのkに対して$s(k)+t(k)=5-1$となることも確かめられる。これらの等式はRが(P)を満たすことを各々意味していることが以下で示される。

まず，行列Nに関する次の性質に注意する。

補題 5.1　Aをn次ブール行列とする。$A=N$であるための必要十分条件は，すべての$k\in\{1, \cdots, n\}$に対して第k行の１の個数は$n-k$でかつ第k列の１の個数は$k-1$であること。

証明　必要条件であることは明らか。十分条件であることをnに関する帰納法で示す。$n=1$のときは$A=0$で成り立つ。$n>1$とし$n-1$のとき仮定する。Aの第n行の成分はすべて０なので (n, n) 成分も０。第n列の１

の個数は$n-1$なので(i, n)成分$(i<n)$はすべて1。従って，Aの第n行と第n列を取り去った残りの行列Bも条件を満たす。帰納法の仮定より$B=N_{n-1}$。従って，$A=N$。

ブール行列が(P)を満たすための1つの判定法を与える。

命題 5.2　Rをn次ブール行列とする。Rが(P)を満たすことと次の条件がともに成り立つことは同値である。ただし，$k\in\{1, \cdots, n\}$。

(1) すべてのkに対して，Rは1の個数が$k-1$である行と列を持つ。

(2) 1の個数が$k-1$である行の番号を$r(k)$，列の番号を$c(k)$とする。このとき，すべてのkに対して$r(k)=c(n-k+1)$。

証明　系5.1と命題5.1より，Rが(P)を満たせば(1)と(2)が成り立つ。逆に，Rが(1)と(2)を満たすとする。まず，1の個数が$k-1$である行も列も唯1つであることに注意しておく。$\sigma\in\mathfrak{S}_n$を$\sigma(k)=c(k)$により定める。R^{σ}の第k列は$k-1$個の1を持つ。また，$\sigma(k)=r(n-k+1)$なのでR^{σ}の第k行の1の個数は$n-k$。よって，補題5.1より$R^{\sigma}=N$。従って，$R=N^{\sigma^{-1}}$は(P)を満たす。

次の形の判定法も得られる。

定理 5.1　Rを2元ブール代数上のn次ブール行列とする。Rが連結的推移的非反射的であることと次の条件がともに成り立つことは同値である。ただし，$k\in\{1, \cdots, n\}$。

(1) すべてのkに対して，Rは1の個数が$k-1$である行と列を持つ。

(2) 第k行の1の個数を$s(k)$，第k列の1の個数を$t(k)$とする。このとき，すべてのkに対して$s(k)+t(k)=n-1$。

証明　命題5.2のrとcをそのまま用いる。(1)を仮定したとき，命題5.2の

(2)とこの定理の(2)が同値であることを示せばよい。(1)を仮定し，l，l_1，$l_2\in\{0, \cdots, n-1\}$とする。$s(k)=l$と$r(l+1)=k$は同値で，$t(k)=l$と$c(l+1)=k$は同値である。よって，$s(k)=l_1, t(k)=l_2$とおくと，$r(l_1+1)=k=c(l_2+1)$である。今，$r(k)=c(n-k+1)$を仮定すると，$c(l_2+1)=r(l_1+1)=c(n-l_1)$。$c$は単射なので，$l_2+1=n-l_1$。よって，$s(k)+t(k)=n-1$。逆に，$s(k)+t(k)=n-1$とすると$l_1+l_2=n-1$。よって，$r(l_1+1)=c(l_2+1)=c(n-l_1)$。従って，すべての$k$に対して$r(k)=c(n-k+1)$。

より簡潔な次の判定法が橋本により予想された。命題4.2の証明を少し変形することにより，その予想は正しいことが示される。

定理 5.2　Rを2元ブール代数上のn次ブール行列とする。Rが連結的推移的非反射的であることと次の条件がともに成り立つことは同値である。

(1) すべての$k\in\{1, \cdots, n\}$に対して，Rは1の個数が$k-1$である行と列を持つ。

(2) Rは非反射的である。

証明　(1)と(2)からRが(P)を満たすことを導けばよい。$\sigma\in\mathfrak{S}_n$に対し，R^σも(1)と(2)を満たすことに注意しておく。nに関する帰納法を用いる。$n=1$のときは明らか。$n>1$とし$n-1$の場合を仮定する。成分がすべて0である行の番号をiとする。$i=n$なら$\alpha=1$とし，$i\neq n$なら$\alpha=(in)$とおくことにより$\alpha\in\mathfrak{S}_n$を定める。

$$R^\alpha=\begin{pmatrix} & & * \\ & R_1 & \vdots \\ & & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

の形になる。ただし，R_1は$n-1$次の行列で，$*$は0または1である。ここ

で，R^{σ}は非反射的なのでR_1も非反射的。特にR^{σ}の第1列から第$n-1$列までは少なくとも2個の0を持つ。よって，1の個数が$n-1$であるR^{σ}の列は第n列である。特に＊はすべて1である。従って，R_1は(1)と(2)を満たす。帰納法の仮定よりR_1は (P) を満たす。よって，$R_1{}^{\beta}=N_{n-1}$となる$\beta\in\mathfrak{S}_{n-1}$が存在する。$\gamma(j)=\beta(j)$ $(1\leqq j\leqq n-1)$，$\gamma(n)=n$により$\gamma\in\mathfrak{S}_n$を定めると，$R^{\alpha\gamma}=N$となる。従って，Rは(P) を満たす。

6　構成

この節では，(P)を満たす与えられたn次ブール行列から(P)を満たす$n+1$次ブール行列を構成する方法を示す。この構成方法を順次適用すると，与えられたnに対して，(P)を満たすn次までのブール行列がすべて得られることになる。

定理 6.1　Rを2元ブール代数上の連結的推移的非反射的n次ブール行列とする。1の個数が$k-1$である列の番号を$c(k)$とする($k\in\{1,\cdots,n\}$)。$l\in\{0,1,\cdots,n\}$とする。$r^l_{n+1,p}$，$r^l_{p,n+1}\in\{0,1\}$ ($p\in\{1,\cdots,n+1\}$) を以下のように定める。

(a) $r^l_{n+1,n+1}=0$。

(b) $r^0_{n+1,1}=r^0_{n+1,2}=\cdots=r^0_{n+1,n}=0$。

(c) $l\in\{1,\cdots,n\}$のとき，

$$r^l_{n+1,c(n)}=r^l_{n+1,c(n-1)}=\cdots=r^l_{n+1,c(n-l+1)}=1,$$

$$r^l_{n+1,c(n-l)}=r^l_{n+1,c(n-l-1)}=\cdots=r^l_{n+1,c(1)}=0。$$

ただし，$l=n$のときは下の式は考えない。

(d) $l\in\{0,1,\cdots,n\}$，$p\in\{1,\cdots,n\}$ のとき，$r^l_{p,n+1}=\overline{r^l_{n+1,p}}$。

この$r^l_{n+1,p}$，$r^l_{p,n+1}$をRの下と右に付け加えて$n+1$次のブール行列$\tilde{R}(l)$を作る。このとき次が成り立つ。

(1) $\tilde{R}(l)$は連結的推移的非反射的である。

(2) 連結的推移的非反射的$n+1$次ブール行列で最初のn行とn列がRと一致するものは，いずれかの$\tilde{R}(l)$と一致する。

証明

(1) $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ c(1) & \cdots & c(n) \end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 \\ c(1) & \cdots & c(n) & n+1 \end{pmatrix}$とする。命題5.1より$R^{\sigma}=N$。$\tilde{T}=\tilde{R}(l)^{\tau}$とおき，その$(i,\ j)$成分を$t_{ij}$とする。$\tilde{T}$が(P)を満たすことを示せばよい。$1\leqq j\leqq n$とすると，

$$t_{n+1,j}=r^{l}{}_{\tau(n+1),\tau(j)}=r^{l}{}_{n+1,c(j)},$$
$$t_{j,n+1}=r^{l}{}_{c(j),n+1}=\overline{r^{l}{}_{n+1,c(j)}}=\overline{t_{n+1,j}}$$

なので，

$$\tilde{T}=\begin{pmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & N & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ただし，第$n+1$行の1の個数はl，第$n+1$列の1の個数は$n-1$。$m\in\{1,\cdots,n+1\}$とし，$\tilde{T}$の第m行の1の個数を$s(m)$，第m列の1の個数を$t(m)$とする。$\tilde{T}$の形より，$1\leqq m\leqq n-1$ならば$s(m)=n-m+1$，$t(m)=m-1$，$n-l+1\leqq m\leqq n$ならば$s(m)=n-m$, $t(m)=m$, $m=n+1$ならば$s(n+1)=l$, $t(n+1)=n-1$。よって，$\tilde{T}$は1の個数が$m-1$である行と列を持ち，$s(m)+t(m)=n$が成り立つ。従って，定理5.1又は定理5.2より$\tilde{T}$は(P)を満たす。

(2) 系4.1より（P）を満たすn次ブール行列Sの個数は$n!$。各Sに対して$n+1$個の（P）を満たす$n+1$次ブール行列をこのように構成すると，全部で$(n+1)!$個の（P）を満たす$n+1$次ブール行列が得

られる。再び系4.1より，(P)を満たす$n+1$次のブール行列はこれで尽くされている。特に，最初のn行とn列がRと一致するものはいずれかの$\tilde{R}(l)$ になる。

例 6.1

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。Rは(P)を満たす。$c(4)=2$，$c(3)=4$，$c(2)=1$，$c(1)=3$なので，

$$\tilde{R}(0)=\begin{pmatrix} 0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},\ \tilde{R}(1)=\begin{pmatrix} 0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix},\ \tilde{R}(2)=\begin{pmatrix} 0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}(3)=\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0 \end{pmatrix},\ \tilde{R}(4)=\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

となる。$\tilde{R}(2)$が例5.1のブール行列である。

7　謝辞

ブール代数自体は２元体上の代数構造を同時に持っているので，代数構造としては面白いものである。橋本先生には，そのようなブール代数上の行列が関係論理学やグラフ理論で重要であることを示唆され，このような問題を考える契機を与えていただきました。更に，この原稿に目を通され，定理5.2を予想していただきました。橋本先生に深く感謝いたします。

参考文献

[1] Rotman,J. : "*The Theory of Groups*", Allyn and Bacon(1973)
[2] 小倉久和，高濱徹行："情報の論理数学入門"，近代科学社(1991)
[3] コッペルベルク，Ｓ．："現代のブール代数"，共立出版(1986)
[4] 橋本寛："連結的推移関係行列の性質"，山口大学経済学雑誌，第34巻，第３・４号，pp.387-405(1985)
[5] ベザット，Ｍ．,チャートランド，Ｇ．,レスニャック・ホスター，Ｌ．："グラフとダイグラフの理論"，共立出版(1981)