債券評価に対する二つの接近法

福　田　司　文

Ⅰ．はじめに

利子率の期間構造は財務意思決定や金融資産価格の解明に必要不可欠なものである。財務理論の基礎的な分析方法として利用される将来キャッシュフローの現在価値評価に際しては，割引率が要求される。この率は期間構造に基づかせるのが厳密な方法である。近年，大きな注目を浴びている資本，金融資産の価格形成モデルにしても利子率が根底にある。例えば，オプションに代表される条件付請求権 (cotingent claim) を考えてみればよい。条件付請求権の価格モデルをつくる際に適用される常套手段は，他の資産とのポートフォリオが無危険利子率を獲得するという条件を制約式として価格関係に取り込むことである。通常，この時の無危険利子率は一定と仮定されることが多い。もしここで，この無危険利子率の将来的な動きを知ることができるなら，より正確に条件付請求権の価値を予想できるにちがいない。期間構造を知ることの意味は大きい。

すでに十分確認されていると思われるが，期間構造を説明する試みは，文献をたどれば I. Fisher の1896年の論文[1]にまで遡ることができる歴史を持つ。これまでに提起されてきた主な理論をあげれば，Hicks の流動性選好仮

1）Irving Fisher, Appreciation and Interest, Publication of the American Economic Association XI, Aug.

説，特定期間選好仮説 (preferred habitats hypothesis)，期待理論などがある。流動性選好仮説とは，投資家は危険回避者で債券の流動性が高くなる程，換言すれば満期期間が短いほどプレミアムが小さくなると主張する。これを一般化したのが特定期間選好仮説である。個々の投資家にとって最も好しい期間が存在し，満期期間がそれより長くても短くても投資家の効用は低下し，投資家の効用が害される程度に応じてプレミアムが大きくなると主張される。期待理論は，スポット・レート (spot rate) やフォワード・レート (forward rate) の予想値によって債券の利子率，長期金利が決まるという考えである。[2)]

期待理論は静学的な世界で考えられた理論であるので，この問題を動学的プロセスのもとで考えることもできる。1970年代に株式オプションの理論が発展するとともに，ここで展開された確率過程を適用して利子率の動学モデルが構築された。主たる貢献は，Cox, Ingersoll, Ross (CIR) の論文〔1985〕によって成し遂げられた。従来の期待理論は，フォワード・レートが期待スポット・レートに等しくなる必要がないという以上のことは取り立てて述べている訳ではなく，プレミアムの決定因をもっとよく知る必要があるという点から意味のあるものである。

期間構造の動学化について CIR のアプローチとは異なった方法が Ho and Lee〔1986〕によってとられた。Ho and Lee (H-L) モデルは，CIR と正反対の構築視点を持っているところに大きな特徴がある。利子率を動学化するのではなく期間構造，言い直せば期間構造を表わす曲線の形状を時間とともに確率的に変化させることにより動学化されている。CIR は連続時間の中で展開され，H-L は離散時間の中で展開されているという差はあるが，この二つの理論は，今後の期間構造の理論，資産価格理論の骨組を形成していくと考えられるので，この二つのアプローチをここで検討しておくことは意味がある。今，利子率の期間構造という用語を用いているが，これは次節の

2）日本の金融市場への適用については，黒田〔1982〕を参照。

定義で明らかなように満期期間と割引債価格との体系（関数関係）を示すこと同意である。割引債価格を用いれば様々なキャッシュフローを直接的に評価できる。そのため，本稿は割引債の価格形成に焦点が当てられるが，二つのものは表裏一体であることに注意してほしい。

最初に期間構造の定義と他の尺度との比較検討を行い，三節以下で価格形成理論を論じる。

Ⅱ．割引債と利付債

まず利子率の期間構造の定義を明確にし，よく利用される利回り曲線 (yield curve) との違いを明らかにしておこう。離散時間を考える。n 期間にわたってクーポンレート c を支払う額面 P_0 の利子債があるとする。この債券の価格（現在価格）は，次式で表わされる。

$$P=\sum_{t=1}^{n} cP_0(1+y)^{-t}+P_0(1+y)^{-n} \tag{2-1}$$

ただし，y は n 期までの満期利回りである。

満期利回りを知ることができれば，債券の価格を知ることができる。各期間に満期が到来する債券が現在流通していれば，各債券の満期利回りが計算できる。満期利回りによって債券価格を求めることは計算が容易であるためしばしば用いられる。しかし，債券の満期が異なれば y も異るため，同一期間に発生したキャッシュ・フローに対して適用される割引率が違うという論理的に不整合な事態が生じる。

満期利回りの代りに各期間ごとのスポット・レートを用いることによって，この欠点を回避することができる。0 時点から t 時点までのスポット・レートを $r(0,t)$ と表わせば，（2－1）は次のように書き直せる。

$$P=\sum_{t=1}^{n} cP_0(1+r(0,t))^{-t}+P_0(1+r(0,n))^{-n} \tag{2-2}$$

このスポット・レートの列,

$r(0,1),\ r(0,2),\ \cdots,\ r(0,n)$

と期間との関係が利子率の期間構造 (term structure of interest rate) と呼ばれる。スポット・レートはある時点のキャッシュ・フローを現在価値に換算するときの割引率であるから,（ゼロ・クーポンの）割引債の利回りと考えることができる。従って，スポット・レートを知ることは，割引債の現在の価格を知ることと同じである。本稿では以後，スポット・レートの代わりに割引債価格を用いたり，割引債価格を分析したりするが，それは期間構造の分析を行っていることと同じだと考えられる。

われわれが市場で観察できるのはほとんどの場合利付債であり，期間構造を知るのに十分な種類の割引債は流通していない。そこで，利回り曲線が代替的なものとして用いられるが，すでに述べたように理論的に正当化されているわけではない。期間構造の曲線と利回り曲線は一致せず一定方向にバイアスがかかることが知られている。これはクーポン・バイアス (coupon biase[3]) と呼ばれる。どんなバイアスが生じるのか検討してみよう。

クーポン・バイアス

n 時点で満期になる利子債の価格 P は，毎期末にクーポン・レート c の利払いがなされ，各期のスポット・レートを $r(0,t)$ とすれば，(2－2)で示される。同じ利付債を満期利回り y で表わせば，（2－1）のように示される。（2－1）と（2－2）より,

$$F=c\sum_{t=1}^{n}\left[(1+r(0,t))^{-t}-(1+y)^{-t}\right]+\left[(1+r(0,n))^{-n}-(1+y)^{-n}\right]=0 \tag{2-3}$$

でなければならない。

今，期間構造は右上り，$r(0,1)<r(0,2)<\cdots\cdots<r(0,n)$ であるとす

3）Bierwag [1987] でこの用語が用いられている。

る。もし$y>r(0,n)$であれば右上りの期間構造の仮定より，すべてのyに対して$y>r(0,n)$である。それ故，$(1+r(0,t))^{-t}>(1+y)^{-t}$となり$F>0$となる。(2－3) が成立するためには$y \leqq r(0,n)$でなければならない。次にもし$y<r(0,1)$であれば，期間構造の仮定よりすべての$t$に対して$y<r(0,t)$である。それ故，$(1+r(0,t))^{-t}<(1+y)^{-t}$より$F>0$となる。$F=0$が成立するためには，$y \geqq r(0,1)$でなければならない。二つの結果をまとめれば，$r(0,1) \leqq y \leqq r(0,n)$である。

次に$y=r(0,n)$であれば$t<n$に対して期間構造より$1+r(0,t))^{-t}>(1+y)^{-t}$となり，$F>0$である。従って$y \neq r(0,n)$。$y=r(0,1)$であれば$(1+r(0,t))^{-t}<(1+y)^{-t}$となるから$F<0$である。従って，$y \neq r(0,1)$。以上のことにより$F=0$が満されるのは，$r(0,1)<y<r(0,n)$のときのみである。逆に期間構造が右下りの場合には，$r(0,n)<y<r(0,1)$が言える。

上で証明したクーポン・バイアスの存在を数値例を用いて示したのが表1である。上の表は期間構造が$r(0,t)=0.001\ln t+0.05$に従う右上りの曲線を持つと仮定したものである。このとき額面1円の割引債価格と額面100円の8％利子債の価格，満期利回り[4)]を計算した。下の表は上の表と同じスポット・レートが右下りになっていると仮定した場合の同様な表である。クーポン・バイアス$(r(0,t)-y)$がベーシス・ポイントで右端に示されている。証明されたように，右上りの期間構造ではクーポン・バイアスは正になり，右下りの場合には負になっていて，スポット・レートと満期利回りは一致しない。

スポット・レートと満期利回りが一致せず，利付債が市場の中心的存在であるときに，スポット・レートを市場から知ることができるのだろうか。この目的を達するのに最も容易に用いられるのは，パー債券 (par bond) をさ

4) 債券価格を$(1+y)^{-1}$の高次方程式とみなし，高次方程式の数値計算（ニュートン法）によって求めた。

表１　スポット・レートと満期利回り

スポット・レートが上昇するケース

期間	期間構造（スポット・レート）r(o,t)	割引債価格	利付債価格	満期利回り y	クーポン・バイアス（ベーシス・ポイント）
1	0.0500	0.9524	102.8592	0.0500	0
2	0.0569	0.8952	104.3008	0.0567	2
3	0.0610	0.8372	105.1984	0.0605	5
4	0.0639	0.7805	105.7724	0.0632	7
5	0.0661	0.7261	106.1412	0.0652	9
6	0.0679	0.6742	106.3448	0.0668	11
7	0.0695	0.6248	106.4032	0.0682	13
8	0.0708	0.5785	106.4012	0.0693	15
9	0.0720	0.5349	106.3204	0.0703	17
10	0.0730	0.4943	106.2148	0.0711	19

スポット・レートが下降するケース

期間	期間構造（スポット・レート）r(o,t)	割引債価格	利付債価格	満期利回り y	クーポン・バイアス（ベーシス・ポイント）
1	0.0730	0.9320	100.6560	0.0730	0
2	0.0720	0.8702	101.4376	0.0720	0
3	0.0708	0.8145	102.3836	0.0709	-1
4	0.0695	0.7643	103.4780	0.0697	-2
5	0.0679	0.7200	104.8080	0.0683	-4
6	0.0661	0.6811	106.3668	0.0668	-7
7	0.0639	0.6482	108.2624	0.0649	-10
8	0.0610	0.6227	110.6940	0.0626	-16
9	0.0569	0.6077	114.0556	0.0594	-25
10	0.0500	0.6139	119.5868	0.0541	-41

がすことである。すべてのキャッシュ・フローの現在価値はスポット・レート，すなわち割引債価格のポートフォリオとして表わせるので，これを利用して利付債価格は既出の（2－2）で表わせる。このとき，利付債価格がパーであれば $P=P_0$ であるから，

$$1=\sum_{t=1}^{n} cP_0(1+r(0,t))^{-t}+P_0(1+r(0,n))^{-n} \tag{2-4}$$

である。毎期満期になるパー債券が得られれば，$n=1$ から順次割引債価格 $(1+r(0,t))^{-t}$，期間構造 $r(0,t)$ を得ることができる[5)]。

定義より明らかな通り，各満期期間を持った割引債価格を知ることはスポット・レートを知ることと同じである。次節以下の分析は割引債の価格形成の分析を中心に据えて，期間構造と価格の関係をさぐる。

Ⅲ．不確実な利子率変動

経済変数が確率的 (stochastic) に経路をたどってゆくことを表わすのに様々な確率過程がある。この方法を資産評価に取りれて最も好評を博したのは OPM である。株価がある拡散過程に基づくとき，それの派生物である株式オプションの価格がどう決まるかを分析したものであった。CIR はこの過程をスポット・レートに適用しようとするものである[6)]。

記号を定義する。

r_t：t 時点のスポット・レート

$P(t,T)$：T 時点の1円が t 時点で持つ現在価値（割引債の価格）

$Y(t,T)$：t 時点で観察される $(T-t)$ 期間の満期利回り

5）十分な種類のパー債券が得られない場合は，アド・ホックな関係を仮定して統計的な推定を行わざるを得ない。例えば，McCulloch [1971] 参照。

6）Cox, Ingersoll and Ross [1985] でこの分析が行われているが，ここでは Ingersoll [1987] に基づいて論じられる。

$f(t, T)$：フォーワード・レート，t時点で観察されるTから$T+1$時点にかけての利子率

従って，

$$P(t, T)=\exp[-Y(t, T)(T-t)]=\exp\left[-\int_t^T(t, s)ds\right] \tag{3-1}$$

$$f(t, T)=-\frac{\partial P(t, T)/\partial T}{P(t, T)} \tag{3-2}$$

である。

スポット・レートだけが唯一の重要な変数で，時間軸上での動きは次のような拡散過程に基づくと仮定される。

$$dr=b(r, t)dt+a(r,t)d\tilde{\omega} \tag{3-3}$$

ただし，$d\tilde{\omega}$ はウィナー過程，利子率の変化は期待値 $b(\cdot)dt$，分散 $a^2(\cdot)dt$ を持った正規分布に従うと考える。割引債の価格は次のような過程に従うとする。

$$\frac{dP(r, t, T)}{P(r, t, T)}=\alpha(r, t, T)dt+\delta(r, t, T)d\tilde{\omega} \tag{3-4}$$

$\alpha(\cdot)$ は瞬間期待収益率，$\delta^2(\cdot)$ は収益率の瞬間分散である。債券価格はスポット・レートの関数であるから，確率変数を説明変数に持つときの微分値を得る際に用いられる伊藤の補助定理を用いれば，割引債価格は次のように表わせる。

$$dP=P_r dr+\left[P_t+\frac{1}{2}a^2(\cdot)P_{rr}\right]dt+a(\cdot)P_r d\tilde{\omega} \tag{3-5}$$

ただし，$P_r=\dfrac{\partial P}{\partial r}$，$P_t=\dfrac{\partial P}{\partial t}$，$P_{rr}=\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2}$ である。(3−3)を(3−5)に代入し，(3−4)と比較すれば，

$$\alpha(r, t, T)P=\frac{1}{2}a^2(r, t)P_{rr}+b(r, t)P_r+P_t \tag{3-6a}$$

$$\delta(r,t,T)P=a(r,t)P_r \tag{3-6b}$$

である。すべての債券の価格変化は完全相関するので，リスクプレミアム$(\alpha-r)$は収益率の標準偏差$a(r,t)\frac{P_r}{P}$に比例しなければならない[7]。その比率を$\lambda(r,t)$とすれば$\alpha(r,t,T)=r+\lambda(r,t)\frac{P_r}{P}$であり，(3−6a)に代入すれば次式を得る。

$$\frac{1}{2}a^2(r,t)P_{rr}+[b(r,t)-\lambda(r,t)]P_r+P_t-rP=0 \tag{3-7}$$

(3−6a)を解くためにはαが外生的に与えられなければならない。通常は他の資産と裁定ポートフォリオを作成し，無危険利子率との均衡条件式を導出することによりαが与えられる。ここではリスクの価格λを導入することで，$\alpha(r,t,T)$を決定する問題を$\lambda(r,t)$を決定する問題に変換することができた。(3−7)と境界条件$\alpha(r,T,T)=1$より債券価格を求めることができる。次に上式に基づいて割引債の価格を求めてみよう。

---

7) Pの収益率$\frac{dP}{P}$の不確実な部分は，次式で示される。

$$\frac{dP}{P}-\alpha dt=\delta d\tilde{\omega}=a\frac{Pr}{P}d\tilde{\omega}$$

満期だけが異なる債券が別に存在し，その収益率$\frac{dP'(r,t,T')}{P'(r,t,T')}$は次のように表わされるとする。

$$\frac{dP'}{P'}=\alpha' dt+\delta' d\tilde{\omega}$$

P'の収益率の不確実部分は同様に$\alpha\frac{P'_r}{P'}d\tilde{\omega}$になる。

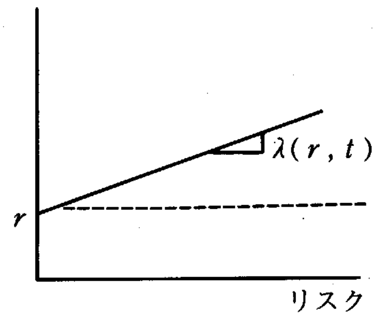
同じ変数rに対してP，P'が価格づけられるので収益率は相関していなければならず，両債券間に裁定が存在してはならないので，リスクに対するリスクプレミアムはすべての資産で同じになる必要がある。

$$\frac{\alpha-r}{a\frac{P_r}{P}}=\frac{\alpha'-r}{a\frac{P'_r}{P'}}$$

このリスクの価格を$\lambda(r,t)$と置けば，

$$\frac{\alpha-r}{\frac{P_r}{P}}=\frac{\alpha'-r}{\frac{P'_r}{P'}}=\lambda(r,t)$$

となり，リスクの価格は個々の債券の属性とは独立である。



A．ランダムウォーク・モデル

最も簡単な利子率の動きはランダムウォークを想定することである。すなわち，

$$dr=\mu dt+\sigma d\tilde{\omega}$$

利子率の変動の期待値や分散が時間とともに変化しないことを意味する。さらに，リスクの価格 $\lambda(r,t)=0$ で債券収益率は危険中立的であることを仮定する。この二つの仮定のもとで，(3−7)は次のようになる。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr}+\mu P_r+P_t-rP=0 \tag{3−8}$$

上式の解を得るために，$\tau=T-t$, $P(r,t,T)=\exp[-r\tau+F(\tau)]$ とすれば，$P_r=-\tau P$, $P_{rr}=\tau^2 P$, $P_t=[r-F'(\tau)]P$ より(3−8)に代入して次式を得る。

$$\left[\frac{1}{2}\sigma^2\tau^2-\tau\mu-F'(\tau)\right]P=0 \tag{3−9}$$

価格はゼロになり得ないので，〔　〕内がゼロに等しくなる。従って，

$$P(r,t,T)=\exp\left[-r\tau+\frac{1}{6}\sigma^2\tau^3-\frac{1}{2}\mu\tau^2\right] \tag{3−10}$$

となる。この時の満期利回りとフォーワード・レートは定義(3−1)，(3−2)より，

$$Y(r,t,T)=r+\frac{1}{2}\mu\tau-\frac{1}{6}\sigma^2\tau^2 \tag{3−11}$$

$$f(r,t,T)=r+\mu\tau-\frac{1}{2}\sigma^2\tau^2 \tag{3−12}$$

と表わせる。

$\mu\leqq 0$ のとき利子率は減少していく。利回り曲線もフォーワード・レートも満期まで単調減少である。$\mu>0$ のとき両曲線は最初は増加するが不確実の項が優勢になるにつれて減少し，極限では $T\to\infty$ に対して $Y(r,t,T)$

$\to -\infty$, $f(r, t, T) \to -\infty$ となる[8)]。短い満期期間に対しては T とともに債券価格は減少するが，$\tau=(\mu+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r})/\sigma^2$ を越えると増加する[9)]。極限では，$\lim_{T\to\infty} P(r, t, T)=\infty$。このように単純なランダムウォーク・モデルでは利子率の分散が際限なく大きくなり，常識を越えた高利子率やマイナスの利子率をもたらす可能性が含まれている。

B．平均逆転過程 (mean reverting process)

上に述べた不都合を回避するためにCIRは平均値が逆転する過程を持つ利子率の確率過程を考えだした。$a^2(r, t)=\sigma^2 r$, $b(r, t)=K(\mu-r)$ とすれば，一定の値 μ を基準として，基準を上回るか下回るかによって期待値が異るという過程になっている。次のような過程である。

$$dr=K(\mu-r)dt+\sigma\sqrt{r}\,d\tilde{\omega} \tag{3-13}$$

$r<\mu$ のとき期待値は負になるので減少傾向を示し始め，$r<\mu$ のとき期待値は正になるため増加傾向を示す。また $r=0$ のとき期待値を正，分散は 0 であるから，マイナスの利子率が発生することはない。

$P=P(r, t, T)$ とすれば前の場合と同様に，債券価格式が次式で得られる。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 rP_{rr}+K(\mu-r)P_r+P_t-rP=0 \tag{3-14}$$

この解を求めるため $\tau=T-t$ とし，$P(\cdot)=\exp[A(\tau)+B(\tau)r]$ を想定することにより変数分離を行う。

$P_r=B(\tau)P(\cdot)$, $P_{rr}=B^2(\tau)P(\cdot)$, $P_t=-(A'(\tau)B'(\tau)r)P(\cdot)$ であることを (3−14) に代入して次式を得る。

8) $\dfrac{\partial Y}{\partial\tau}=\dfrac{1}{2}\mu-\dfrac{1}{3}\sigma^2\tau$, $\dfrac{\partial f}{\partial\tau}=\mu-\sigma^2\tau$ より結論づけられる。

9) $\dfrac{\partial P}{\partial\tau}=\left[-r+\dfrac{1}{2}\sigma^3\tau^2-\mu\tau\right]P=0$ を満す τ より得られる。

$$\left[\frac{1}{2}\sigma^2 r B^2(\tau)+K(\mu-r)B(\tau)-r-A'(\tau)-B'(\tau)r\right]P(\cdot)=0 \qquad (3-15)$$

すべての r について上式が成立するためには,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 B^2(\tau)-KB(\tau)-1-B'(\tau)=0 \qquad (3-16a)$$

$$K\mu B(\tau)-A'(\tau)=0 \qquad (3-16b)$$

でなければならない。ただし, $P(r,T,T)=1$, $A(0)=B(0)=0$ である。

まず (3−16a) を解く, (3−16a) は常微分方程式に還元されているので,

$$\frac{1}{\gamma}\ln\left[\frac{B(\tau)-\left(\frac{K+\gamma}{\sigma^2}\right)}{B(\tau)-\left(\frac{K-\gamma}{\sigma^2}\right)}\right]=\tau+C \qquad (3-17)$$

である。ただし, $\gamma=\sqrt{K^2+\sigma^2}$, C は任意の定数。ここで初期条件 $B(0)=0$ を考慮し, $B(\tau)$ について解けば次式を得る。

$$B(\tau)=\frac{-2(1-e^{-\gamma\tau})}{2\gamma+(K-\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})} \qquad (3-18)$$

ただし, $\gamma=\sqrt{K^2+2\sigma^2}$。

(3−16b) を解く。そのため, $g(\tau)=2\gamma+(K-\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})$, $g'(\tau)=(K-\gamma)\gamma e^{\gamma\tau}$, $(\gamma-K)(\gamma+K)=2\sigma^2$ とおけば $B(\tau)$ は次のようになる。

$$B(\tau)=-\frac{\gamma-K}{\sigma^2}\left\{\frac{(\gamma+K)(1-e^{-\gamma\tau})}{g(\tau)}\right\}$$

$$=-\frac{\gamma-K}{\sigma^2}\left[1-\frac{2g'(\tau)/(K-\gamma)}{g(\tau)}\right] \qquad (3-19)$$

上式を (3−16b) に代入すれば $A(\tau)$ について解を得ることができる。

$$A(\tau)=-\frac{K\mu(\gamma-K)}{\sigma^2}\int_0^\tau\left[1-\frac{2}{(K-\gamma)}\cdot\frac{g'(s)}{g(s)}\right]ds$$

$$=-\frac{K\mu(\gamma-K)}{\sigma^2}\left[\tau-\frac{2}{(K-\gamma)}\ln(g(\tau))+\frac{2}{(K-\gamma)}\ln(2\gamma)\right]$$

$$= \frac{2K\mu}{\sigma^2}\ln\left[\frac{2\gamma e^{(K-\gamma)\tau/2}}{g(\tau)}\right] \tag{3-20}$$

従って，$P(\cdot)=\exp[A(\cdot)+B(\cdot)r]$ より

$$P(r,t,T)=\left[\frac{2\gamma e^{(K-\gamma)\tau/2}}{g(\tau)}\right]^{\frac{2K\mu}{\sigma^2}}\exp[B(\cdot)r] \tag{3-21}$$

である。ただし，

$$B(\tau)=\frac{-2(1-e^{-\gamma\tau})}{2\gamma+(K-\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})}$$

$$g(\tau)=2\gamma+(K-\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})$$

$$\gamma=\sqrt{K^2+2\sigma^2}$$

である。この利子率過程に対する利回り曲線とフォーワード・レートはそれぞれの定義より，次のように表わせる。

$$Y(r,t,T)=\frac{-rB(\tau)+A(\tau)}{\tau} \tag{3-22}$$

$$f(r,t,T)=-rB'(\tau)-A'(\tau)$$

$$=r+KB(\tau)(r-\mu)-\frac{1}{2}\sigma^2B^2(\tau) \tag{3-13}$$

(3−21) がスポット・レートが平均逆転過程と名づけられた過程に基づく場合の割引債価格である。すべてのキャッシュフローはこの割引債のポートフォリオより形成されると見なすことよりキャッシュフローが評価される。当然ではあるが，利子率が決定されるに当って多くの要因，たとえば，個人の選好，基本財産，他の投資機会，将来の状態に対する確信度などが影響を及ぼすと考えられる。この観点から見れば，このモデルの仮定は現在の r が将来のすべてを決定してしまい，単純ではないのかという評価もある。しかし，ある過程を仮定して偏微分方程式を求めるステップまでの操作は容易に行われるが，得られた偏微分方程式のクローズドフォームの解を求めること

は容易ではないことに思いを及ぼすべきである[10)]。

C．二変数モデル (two-factor model)

上のアプローチを拡張した代表例は Brennan and Schwartz〔1979〕, Richard〔1978〕に見られる。両者とも利子率に影響を及ぼすもう一つの変数を導入した。Brennan and Schwartz は長期利子率を，Richard は期待インフレを二つ目の変数とした。両者の展開はほとんど同じである。Brennan and Schwartz はスポット・レート r と長期利子率 ℓ の2つの状態変数が債券価格に影響すると考え，各々の変数は次のような拡散過程に基づくと仮定した。

$$dr=b_1(r,\ell,t)dt+a_1(r,\ell,t)d\widetilde{\omega}_1 \tag{3-24}$$

$$d\ell=b_2(r,\ell,t)dt+a_2(r,\ell,t)d\widetilde{\omega}_2 \tag{3-25}$$

ただし，$d\widetilde{\omega}_1$, $d\widetilde{\omega}_2$ はウィナー過程。

満期日に1円支払われる割引債の価格は，r，ℓ と満期までの時間 τ の関数 $P(r,\ell,\tau)$ とする。伊藤の補助定理を用いれば，

$$dP(r,\ell,\tau)=\left(P_1b_1+P_2b_2+\frac{1}{2}P_{11}a_1{}^2+\frac{1}{2}P_{22}a_2{}^2+P_{12}\rho a_1a_2-P_3\right)dt+ \\ +P_1a_1d\widetilde{\omega}_1+P_2a_2d\widetilde{\omega}_2 \tag{3-26}$$

となる。ただし，$P_1=\dfrac{\partial P}{\partial r}$, $P_2=\dfrac{\partial P}{\partial \ell}$, $P_3=\dfrac{\partial P}{\partial \tau}$, $P_{11}=\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2}$, $P_{22}=\dfrac{\partial^2 P}{\partial \ell^2}$, $P_{12}=\dfrac{\partial^2 P}{\partial r\partial \ell}$, ρ は r と ℓ の相関係数。

また，この割引債の収益率は次式に従うとする。

$$\frac{dP}{P}=\mu(r,\ell,\tau)dt+s_1(r,\ell,\tau)d\widetilde{\omega}_1+s_2(r,\ell,\tau)d\widetilde{\omega}_2 \tag{3-27}$$

---

10) CIR のモデルはある程度の現実性を利子率にもたせて，closed-form の解を得た数少ない先駆的業績である。

ここで，

$$\mu(r, \ell, \tau) = \left(P_1 b_1 + P_2 b_2 + \frac{1}{2} P_{11} a_1{}^2 + \frac{1}{2} P_{22} a_2{}^2 + P_{12} \rho a_1 a_2 - P_3\right) \Big/ P \tag{3-28}$$

$$s_1(r, \ell, \tau) = P_1 a_1 / P \tag{3-29}$$

$$s_2(r, \ell, \tau) = P_2 a_2 / P \tag{3-30}$$

である。

この債券でOPMと同様に危険中立的なポートフォリオを作成することができるなら，収益率はnon-stochasticになる。今，満期のみが異る（それぞれτ_1, τ_2, τ_3）債券に，x_1, x_2, x_3の割合だけ投資するポートフォリオHをつくってみる。Hの収益率は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dH}{H} &= [x_1 \mu(\tau_1) + x_2 \mu(\tau_2) + x_3 \mu(\tau_3)]\,dt \\ &+ [x_1 s_1(\tau_1) + x_2 s_2(\tau_2) + x_3 s_3(\tau_3)]\,d\tilde{\omega}_1 \\ &+ [x_1 s_1(\tau_1) + x_2 s_2(\tau_2) + x_3 s_3(\tau_3)]\,d\tilde{\omega}_2 \end{aligned}$$

ポートフォリオが危険中立的になるよう瞬時に連続的に投資比率を変えることができるとすれば，投資比率は次の条件を満す。

$$x_1 s_1(\tau_1) + x_2 s_2(\tau_2) + x_3 s_3(\tau_3) = 0 \tag{3-31a}$$

$$x_1 s_2(\tau_1) + x_2 s_2(\tau_2) + x_3 s_2(\tau_3) = 0 \tag{3-31b}$$

危険中立的であるため，裁定を生じさせない条件は，

$$x_1(\mu(\tau_1) - r) + x_2(\mu(\tau_2) - r) + x_3(\mu(\tau_3) - r) = 0 \tag{3-31c}$$

である。

x_1, x_2, x_3の連立方程式(3−31)が自明でない解を持つとき，ポートフォリオが危険中立的になる。自明でない解を持つのは次の条件を持つときである[11)]。

11) 自明でない解を持つ条件は，例えば矢野・田代〔1979〕pp. 44-49などを参照されたし。

$$\mu(\tau)-r=\lambda_1(r,\ell,\tau)s_1(\tau)+\lambda_2(r,\ell,\tau)s_2(\tau) \qquad (3-32)$$

ただし，$\lambda_1(\cdot)$，$\lambda_2(\cdot)$ は τ と独立な任意の定数。条件(3−32)に(3−28)，(3−29)，(3−30)を代入すれば，価格の方程式

$$\frac{1}{2}P_{11}a_1{}^2+\frac{1}{2}P_{22}a_2{}^2+P_{12}\rho a_1a_2+P_1(b_1-\lambda_1a_1)+P_2(b_2-\lambda_2a_2)-P_3-rP=0 \qquad (3-33)$$

が得られる。

二変数にするとリスクの価格も二つ (λ_1, λ_2) 必要になってくる。長期利子率については，特定の債券の利子率を仮定することによって消去可能である。Brennan and Schwartz は長期債をコンソル債とみなすことにより処理している。コンソル債価格 $V(r,t)$ は，$V(r,t)=\ell^{-1}$ で表わせる。このコンソル債の期待収益も(3−32)を満さなければならないので，リスク価格に関する次の条件を得る[12)]。

$$\lambda_2(r,\ell,\tau)=-\frac{a_2}{\ell}+\frac{b_2-\ell^2+r\ell}{a_2} \qquad (3-34)$$

これを(3−33)に代入すれば，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}P_{11}a_1{}^2+\frac{1}{2}P_{22}a_2{}^2+P_{12}\rho a_1a_2+P_1(b_1-\lambda_1a_1)\\&\qquad+P_2(a_2{}^2/\ell^2+\ell^2-r\ell)-P_3-rP=0\end{aligned} \qquad (3-35)$$

を得る。

一般化された偏微分方程式（3—33）について Richard〔1978〕は解を得ているが，その解が意味を持つには含まれているリスクの価格 λ_1, λ_2 を知ることが可能となければならない。この定数を消去するために特定の債券を想定したが，なお λ_1 が残った。これを処理するには，リスクと効用についての新たな仮定を置くしかない。

12) 詳細は Brennan and Schwartz [1979] の付録を見よ。

Ⅳ．不確実な期間構造の変動

前節で検討したのは利子率が確率的に変動すると仮定したとき，期間構造の全体——割引債の価格——を知るというアプローチであった。もう一つの接近方法は期間構造全体が確率的に変動すると仮定したときに，割引債の価格を知るというものである。この斬新なアイデアは Ho and Lee によって展開され，ARモデル (arbitrage-free rate model) と名づけられた。離散時間で展開されている点が前節と趣きを異にするが，期間構造の動学化問題に対するもう一つの基礎理論になっている。以下でその特徴を検討してみよう。

市場は各離散時点で債券価格を決定し，この市場に各満期 $n(n=0,1,2\cdots)$ を持った満期時点でのみ1円支払う割引債が存在する。満期 T の割引債の，経済状態が i であるときの均衡価格を $P_i^{(n)}(T)$ で表わす。i がとる状態によって割引債価格と満期期間 T とを関係づける関数 $P_i^{(n)}(T)$ の形状が異なる。$P_i^{(n)}(T)$ は割引債価格なので割引債関数とも呼ばれる。

割引債価格はいくつかの条件を満さなければならない。

$$\text{すべての } i,\ n \text{ に対して } P_i^{(n)}(0)=1 \text{ である。} \tag{4−1}$$

$$\text{すべての } i,\ n \text{ に対して } \lim_{T\to\infty} P_i^{(n)}(T)=0 \text{ である。} \tag{4−2}$$

次に期間構造の展開を図式化する。債券価格は次の時点で二つの状態——upstate か downstate —— のいずれか一方を採りながら時間を経過してゆく二項過程に従うと仮定する。最初を状態0とすれば，最初の価格は次のように示される。

$$P(\cdot)=P_0^{(0)}(\cdot) \tag{4−3}$$

次の時点1での価格は状態が次のステップに移った upstate, $P_1^{(1)}(\cdot)$ か次のステップに移らない downstate, $P_0^{(1)}(\cdot)$ で表わせる。一般に時点 n から $n+$

1に移るときの価格と満期期間との関係は次のように表わせる[13]。

$$P_i^{(n)}(\cdot) \begin{cases} \nearrow \; P_{i+1}^{(n+1)}(\cdot) & \text{upstate} \\ \searrow \; P_i^{(n+1)}(\cdot) & \text{downstate} \end{cases}$$

このように二つの可能性をもって確率的に価格が変化するとき注意する必要があることは，時間が経過すれば満期が短くなっていくことである。例えば，$P(T)$ で表わされた価格は，一期間が過ぎると $P_1^{(1)}(T-1)$ ないし $P_0^{(1)}(T-1)$ をとる。期間構造の動きは，図1のようになると思い描いてもらえばよいだろう。

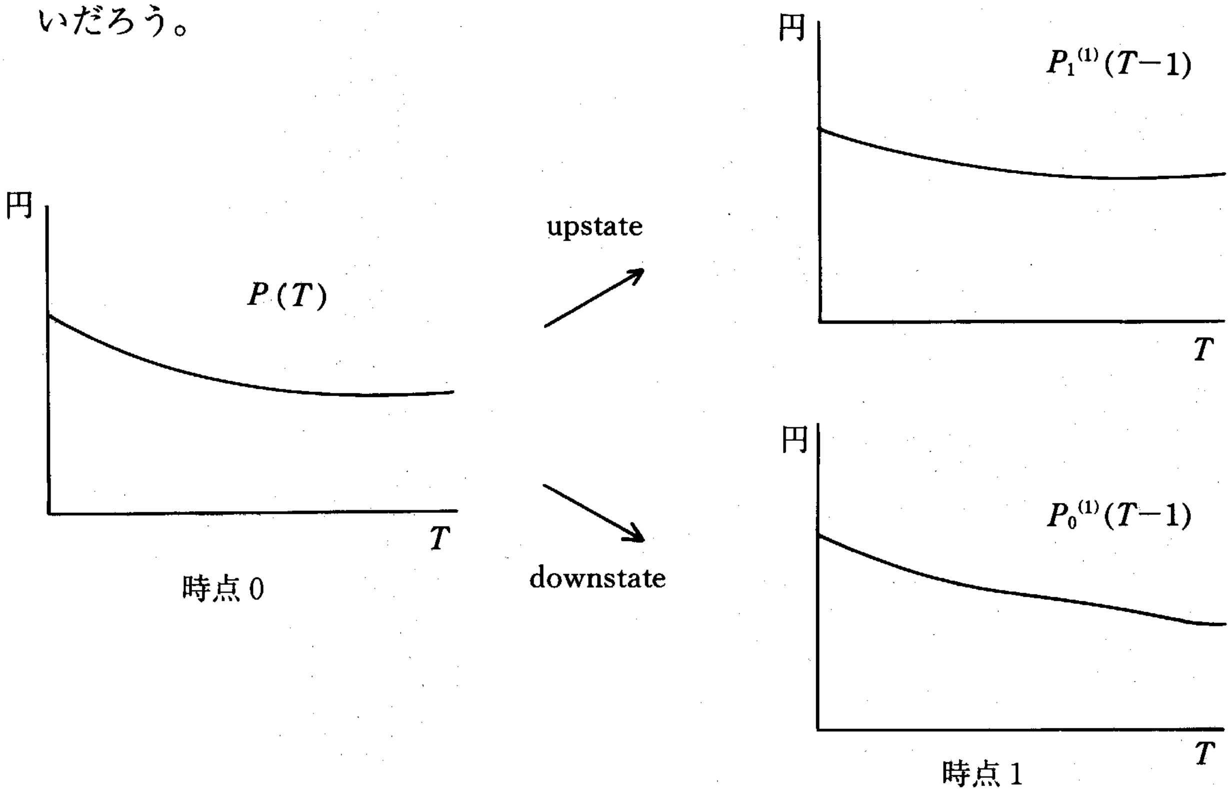
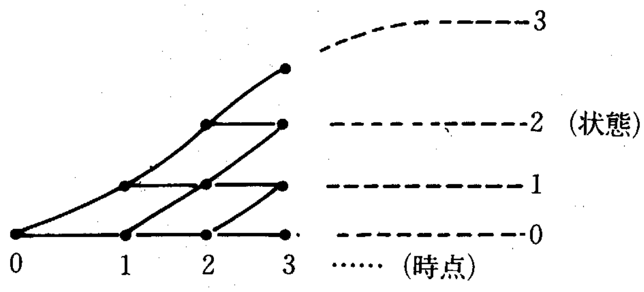


図1　期間構造の動き

13) 各時点で生じうる状態は，下図のように概念化される。
異なった状態 i に対して異った期間構造 $P_i^{(n)}(\cdot)$ が対応している。



さて，以上のような準備をしたのち債券価格の関数 $P_i^{(n)}(T)$ が時間の経過とともにとるべき過程を特定化する。$P_i^{(n)}(T)$ を n 期に i 状態であるときの債券価格とするとき，だれも $n+1$ 時点で利子率リスクを被らないとすれば $n+1$ 時点の upstate の期間構造は downstate の期間構造に等しくなければならない。そしてスポット。レートとフォーワード・レートの関係[14]より次式が成立するはずである。

$$P_i^{(n+1)}(T)=P_{i+1}^{(n+1)}(T)=\frac{P_i^{(n)}(T+1)}{P_i^{(n)}(1)} \tag{4-4}$$

状態が不確実に生起する現実の世界では上式のような関係は成立しない。今期に予想される次期の価格と次期に実際に生じた価格とは異なる。この乖離を示すために不安定化関数 $h(T)$，$h^*(T)$ を導入する。これを用いれば upstate が生じた場合と downstate が生じた場合が次のように示される。

$$\text{upstate}\quad P_{i+1}^{(n+1)}(T)=\frac{P_i^{(n)}(T+1)}{P_i^{(n)}(1)}h(T) \tag{4-5a}$$

$$\text{downstate}\quad P_i^{(n+1)}(T)=\frac{P_i^{(n)}(T+1)}{P_i^{(n)}(1)}h^*(T) \tag{4-5b}$$

$h(T)>1$ であれば次期に債券価格が上昇したことを意味し，$h^*(T)<1$ であることは価格が下落したことを意味する。不安定化関数は満期が大きいところでの変動は大きくなる可能性があるが満期直前のところではほとんど変動しないと考えられる。極限では $h(0)=h^*(0)=1$ でなければならない。

不安定化関数に課される制約条件

時間が経過するとき割引債価格が変化するわけであるが，前時点で予想される価格と無制限に乖離してよいわけではない。H—L では二つの条件のもとで価格が2項過程をたどると考えている。その一つはこの期間構造に従う

14) 満期期間 $m+1$ の割引債価格を $P(m+1)$，満期期間 1，m の割引債価格を $P(1)$，$P(m)$ とすれば，$P(m+1)=P(1)P(m)$ が成り立つ。

債券間で裁定は存在しないことである。今，満期だけが異なる二つの債券のポートフォリオをつくる。満期 T の債券一個と満期 t の債券 ξ 個のポートフォリオの価値は，$V(T)=P(T)+\xi P(t)$ となる[15)]。次の時点で状態が生じうる可能性が2つある。upstate の時のポートフォリオ価値を V_u，downstate の時の価値を V_d とすれば，裁定が生じないためには $V_u=V_d$ でなければならない。V_u，V_d は次式で示される。

$$V_u=\frac{P(T)}{P(1)}h(T-1)+\xi\frac{P(t)}{P(1)}h(t-1) \tag{4-6a}$$

$$V_d=\frac{P(T)}{P(1)}h^*(T-1)+\xi\frac{P(t)}{P(1)}h^*(t-1) \tag{4-6b}$$

債券間で裁定が生じないポートフォリオはまた無危険利子率とも裁定が生じないものでなければならない。すなわち，

$$\frac{V_d}{V}=\frac{1}{P(1)} \tag{4-7}$$

である。$V_u=V_d$，(4−7)の条件と(4−6)より，すべての T，t に対して，

$$\frac{1-h^*(T-1)}{h(T-1)-h^*(T-1)}=\frac{1-h^*(t-1)}{h(t-1)-h^*(t-1)} \tag{4-8}$$

が成立する。T と t とは独立な定数 π，すなわち，

$$\frac{1-h^*(T)}{h(T)-h^*(T)}=\pi \tag{4-9}$$

が存在するときにのみ(4−8)が成立する。(4−9)がこの期間構造で裁定が生じないための条件である。

もう一つの条件は経過独立性 (path-independence) である。このモデルはすでに気付いていると思われるが，どの状態になるかということは，upstate の回数にのみ依存している。価格を決めるのは今どの状態にあるかということであって，時点と状態で示された格子のどの点を経てきたかではな

15) 添字 n，i は省略する。

い。経路独立を保証することによって不安定化関数が受ける制約条件をみてみよう。

最初の期間に upstate をとり，次期に downstateをとる場合（Ⓐ）と最初にdownstate をとり，次期に upstate をとる場合（Ⓑ）の二つを考える[16]。Ⓐの場合の最初のステップは，

$$P_{i+1}^{(n+1)}(T+1)=\frac{P_i^{(n)}(T+2)}{P_i^{(n)}(1)}h(T+1) \tag{4-10}$$

で表わされ，次のステップは，

$$P_{i+1}^{(n+2)}(T)=\frac{P_{i+1}^{(n+1)}(T+1)}{P_{i+1}^{(n+1)}(1)}h^*(T) \tag{4-11}$$

で表わせる。

(4−10)，(4−11) より[17] $n+2$ 時点の価格は次のようになる。

$$P_{i+1}^{(n+2)}(T)=\frac{P_i^{(n)}(T+2)}{P_i^{(n)}(2)}\frac{h(T+1)h^*(T)}{h(1)} \tag{4-12}$$

同様にⒷの場合は次の通りである。

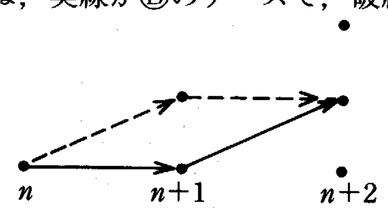
$$P_{i+1}^{(i+2)}(T)=\frac{P_i^{(n)}(T+2)}{P_i^{(n)}(2)}\frac{h^*(T+1)h(T)}{h^*(1)} \tag{4-13}$$

従って，経路独立であるためには両方の変動が同じでなければならない。(4−12)，(4−13) より，

$$\frac{h(T+1)h^*(T)}{h(1)}=\frac{h^*(T+1)h(T)}{h^*(1)} \tag{4-14}$$

である。

16) 図示すれば，実線がⒷのケースで，破線がⒶのケースである。



17) $P_{i+1}^{(n+1)}(1)=\dfrac{P_i^{(n)}(2)}{P_i^{(n)}(1)}h(1)$ を利用する。

裁定条件(4−9)を用いて上の条件を書き直せば次のようになる。

$$\frac{1}{h(T+1)}=\frac{\delta}{h(T)}+\gamma \tag{4−15}$$

ただし，$h(1)=(\pi+(1-\pi)\delta)^{-1}$，$\gamma=\dfrac{\pi(h(1)-1)}{(1-\pi)h(1)}$ である。h に関する差分方程式(4−15)を解けば，

$$h(T)=\frac{1}{\pi+(1-\pi)\delta^T} \tag{4−16a}$$

$$h^*(T)=\frac{\delta^T}{\pi+(1-\pi)\delta^T} \tag{4−16b}$$

を得る。(4−16)が期間構造の変動，すなわち不安定化関数が従わなければならない制約条件である。

AR モデル

裁定が生じない条件（4−9）と経路独立を保証する条件（4−16)の制約下で不安定化関数が変動するとき，短期利子率の確率過程が定まり債券価格が決定される。

ところでこの二つの条件を見れば理解できるように，不安定化関数は定数 π と δ に依存して決まる。そのため価格を知るためには π と δ を推定して外生的に与えてやらねばならないことに注意しよう。ではこの定数は何を示すものなのか。（4−9）に（4−5）を代入することによって，次式を得る。

$$\frac{P_i^{(n)}(T)}{P_i^{(n)}(1)}=\pi P_{i+1}^{(n+1)}(T-1)+(1-\pi)P_i^{(n+1)}(T-1)$$

これは n 時点に予想される価格は，次期に生ずる価格の期待値に全く等しいことを示す。従って，予想されない利子率の変動は起らず，価格変動リスクがない。π は危険中立的な状態が生起する確率であると解釈される。

δ は定義式と（4−9）を用いれば，upstate と downstate とのスプレッドであると解釈される。

$$\delta=\frac{1-\pi h(1)}{(1-\pi)h(1)}=\frac{h^*(1)}{h(1)}$$

上で解釈した意味を持つ π，δ が与えられると，短期利子率に対し割引債価格がどう決まるかという問題に対してCIRと同様に解答を与えることができる。時点 n，状態 i での割引債価格は(4－5)を帰納的に用いれば次式で得られる。

$$P_i^{(n)}(T)=\frac{P(T+n)}{P(n)}$$

$$\times\frac{h^*(T+\mathrm{n}-1)h^*(T+\mathrm{n}-2)\ldots h^*(T+i)h(T+i-1)\ldots h(T)}{h^*(n-1)h^*(n-2)\ldots h^*(i)h(i-1)\ldots h(1)}$$

さらに(4－16b)を用いれば，

$$P_i^{(n)}(T)=\frac{P(T+n)h(T+n-1)h(T+n-2)\ldots h(T)\delta^{T(n-i)}}{P(n)h(n-1)h(n-2)\ldots h(1)} \tag{4-17}$$

である。

(4－17)の特殊ケースとして，満期期間1の債券($T=1$)の価格は，

$$P_i^{(n)}(1)=\frac{P(n+1)\delta^{n-i}}{P(n)(\pi+(1-\pi)\delta^n)}$$

で示され，この時の利子率 $r_i^{(n)}(1)$[18]は，

$$r_i^{(n)}(1)=\ln\left[\frac{P(n)}{P(n+1)}\right]+\ln(\pi\delta^{-n}+(1-\pi))+i\ln\delta \tag{4-18}$$

である。

(4－18)は一期間のものであるが，ARモデルの特徴を明確に示している。ARモデルは最初の時点での期間構造の情報に依存しており，期間構造の全情報を用いてスポット・レートが決められる。それに対してCIRモデルは現実的に意味のある均衡期間構造をもたらすようなスポット・レートの動的過程を決めようとした。時間のとり方に違いがあるが，アイデアとしては正反対からのアプローチであることが認識できる。

---

18) 割引債の定義 $P(T)=e^{-rT}$ より $r=-\ln P(T)/T$ である。

V．むすび

本稿では現在注目されている債券価格形成モデルを紹介・検討した。まず，なぜ割引債の価格を知ることが議論の中心になるのかを知る必要があった。スポット・レートは理論的は整合性を保持しており，その定義より割引債価格と同じことを意味する[19]。価格形成に対する一つの方法はCIRモデルであり，もう一方はARモデルである。CIRは利子率の動きを特定化して均衡期間構造を求めるアプローチをとっているのに対し，ARは期間構造を特定して利子率の動きを求めるものである。CIRはきわめて洗練されたモデルであり，新たな変数を加えて複雑化するのはなかなか困難である。勿論，モデルの細部に対する批判はいくらでもできるが動的過程を考慮するときの基本的要件は満している。ARモデルについても拡張は考えられる。例えば，二項過程では単純すぎ状態が三つ発生する三項過程で価格が求められないのか，あるいは，期間構造全体のシフトのみでなくその資産独自の要因によって価格変化することを組み込むことが考えられるが，いずれも拡張であって今後，新たな展開が加えられていくだろう[20]。いずれにせよ不確実な世界で動学的に問題を処理していこうとすれば，現在のところこの二つのアプローチが基本となる。

この二つのモデルが実証的にどの程度耐えられるかの検証も始められたばかりで，Brown and Dybving [1986], Bliss and Ronn [1989] などにパイロット・テストを見ることができる。また，これらのアプローチは数々ある利子率の条件付請求権（例えば債券オプションなど）の評価に適用される可能性を持っている。H—LはARモデルのほうがCIRのアプローチよりも現

19) 我が国では「スポット・レート革命」という言葉が見うけられるほど，実務でスポット・レートが用いられるのはまれである。依然，直接利回りによる債券管理が主流である。
20) Bliss and Ronn [1989]. Kishimoto [1989] などを参照。

実的適用性があると主張しているが，スポット・レートが十分観察できるほど割引債が流通していればの話である。その条件が満たされていなければ，アド・ホックに期間構造を推定するのと確率過程のパラメーターを推定するのとでは簡単に優劣はつけられない。今後の研究・議論の積み重ねによってのみ評価されるものである。両アプローチの展開に注目してゆきたい。

〈参考文献〉

Bierwag, G. O. [1987], *Duration Analysis*, Ballinger.

Bliss, R. R. Jr. and E. I. Ronn [1989], "Arbitrage-Based Estimation of Nonstationary Shifts in the Term Structure of Interest Rates", *J. of Finance* 44., pp. 591-610.

Brennan, M. J. and E. S. Schwartz [1979], "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *J. of Banking and Finance* 3, pp. 133-155.

Brown, S. J. and P. H. Dybving [1986], "The Emprical Impricatiоns of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates" *J. of Finance* 41, pp. 617-630.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr. and S. A. Ross [1981], "A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates", *J. of Finance* 36, pp. 769-799.

———— [1985], "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica* 53, pp. 385-407.

Ho, T. S. and S. Lee [1988], "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *J. of Finance* 41, pp. 1011-1029.

Ingersoll, J. E. Jr [1987], *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield.

Kishimoto, N [1989], "Pricing Contingent Claims under Interest Rate and Asset Price Risk", *J. of Finance* 44, pp. 571-589.

Longstaff, F. A. [1989], "A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates", *J. of Financial Economics* 23, pp. 195-224.

McCulloch, J. H. [1971], "Measuring the Term Structure of Interest Rates", *J. of Business* 44, pp. 19-31.

Richard, S. F. [1978], "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates", *J. of Financial Economics* 6, pp. 33-57.

Schaefer S. M. and E. S. Schwartz [1987], "Time-Dependent Variance and the Pricing of Bond Options", *J. of Finane* 42, pp. 1113-1128.

青山　護編〔1989〕『現代証券投資技法の新展開』，日本経済新聞社。

黒田晁生〔1982〕，『日本の金利構造』，東洋経済新報社。

矢野健太郎・田代嘉宏〔1979〕，『社会科学者のための基礎数学』，裳華房。