変更された推移性と連結的関係行列

橋　本　　　寛

1．はじめに

連結的関係は，関係の理論において最も基本的な二項関係の一つであるばかりでなく[18]，経済学や社会学における選好関係やトーナメントの理論などにおいても重要な関係であり[1][2][4][15]，この連結的関係については，これまでにも多くの性質が調べられている[7][8][10]-[15]。とくに連結的推移関係は理論的にも興味深く，この連結性のもとでの推移性やべき零性，また長さ3のサイクルの存在しないことに関する条件については，非対称的完全有向グラフであるトーナメントの性質に関連して従来から詳細に研究されている[2][3][5][16]。二項関係は一般に行列によって表現でき，その行列は0，1の要素から成るブール行列であって関係行列とよばれる[15][17]。この関係行列の性質は関係の性質と直接的に対応しており，この行列の性質を調べることによって関係の性質を明らかにすることができる。

本論文では関係における推移性の条件を少し変更したいくつかの条件を考え，それらの条件を満たす連結的関係行列の性質を調べている。すなわち，まず推移性の条件を少し一般化したものを考え，次にその一般化したものの特別な場合となる三つの条件について考察している。とくに，この特別な場合として反対称的推移関係，および非反射的推移関係すなわち非対称的推移関係について考察し，それぞれの性質を明らかにしている。これらの関係は様々な分野で現われ重要な役割を演じており，基本的な性質は従来からよく

知られているが，本論文では，さらに，これまでほとんど議論されていない種類の同値条件についても考察をおこなっている。

2. 定　義

本論文では0，1の要素をもつn次ブール行列について考える。すでに述べたように二項関係はこのブール行列によって表現できる。ブール行列R, Sに対して行列の和を$R\vee S$で，要素ごとの積すなわち論理積を$R\wedge S$で，行列積を$R\times S$で表わす。また単項演算$\triangledown R$と$\triangle R$を，$\triangledown R=R\wedge R'$，$\triangle R=R\wedge\overline{R'}$で定義する。ここに$R'$は$R$の転置，$\overline{R'}$は$R'$の否定である。なお特殊な行列として単位行列を$I$で，零行列を$O$で，また全要素が1の行列を$E$で示す。

上のような記法のもとで，連結的関係行列は$R\vee R'\vee I=E$なるRとして与えられる。とくに$R\wedge I=I$なるRは反射的，$R\wedge I=O$なるRは非反射的，また$\triangledown R\leqq I$すなわち$R\wedge R'\leqq I$なるRは反対称的，$\triangledown R=O$なるRは非対称的といわれる。さらに$R^2\leqq R$なるRは推移的といわれ，Rは推移関係を表現する行列となる[15]。一方，連結的関係と密接な関連のあるトーナメントは$R\vee R'\vee I=E$かつ$\triangledown R=O$となる行列Rによって表現される。

3. 結　果

連結性のもとで，いくつかの変更された推移性と同値になる条件について調べる。すでに述べたように推移性は$R^2\leqq R$で表現されるが，ここでは，まず$R^2\leqq R$を一般化した$R^2\leqq R\vee I$について簡単に性質を調べる。次にその特別な場合として$R^2\leqq\triangle R\vee I$，またこれの特別な場合として$R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$と$R^2\leqq\triangle R$の二つの場合について同値条件を明らかにする。

3.1 $R^2 \leqq R \vee I$ となる条件

本節では $R^2 \leqq R \vee I$ なる R の性質，すなわち $R^2 \leqq R \vee I$ となるための条件や連結性のもとで $R^2 \leqq R \vee I$ と同値になる条件について調べている。$R^2 \leqq R \vee I$ は $R^2 \leqq R$ を一般化した形になっており，$R^2 \leqq R$ であれば当然 $R^2 \leqq R \vee I$ となるが，もちろん一般には逆はいえない。なお $R^2 \leqq R \vee I$ なる R の性質については，すでに文献(12)(13)においても明らかにされている。

〔性質 1〕[13]

$R \vee R' \vee I = E$，ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{3l-1} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

$\Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$

〔性質 2〕[13]

$R^2 \leqq R \vee I \Longrightarrow$ すべての $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $R^k \leqq R \vee I$

〔性質 3〕

$R \vee R' \vee I = E$ のとき次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R \vee I$

(2) すべての $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $R^k \leqq R \vee I$

(3) すべての $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{6l-1} \leqq R \vee \overline{R'}$

(4) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{6l-1} \leqq R \vee \overline{R'}$

(5) すべての $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{6l-1} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(6) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{6l-1} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(7) すべての $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{6l-1} \leqq R \vee I$

(8) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{6l-1} \leqq R \vee I$

(9) すべての $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6l-1} \leqq R \vee \overline{R'}$

(10) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6l-1} \leqq R \vee \overline{R'}$

(11) すべての $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6l-1} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(12) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6l-1} \leqq R \vee \overline{R'} \vee I$

(13) すべての $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6l-1} \leqq R \vee I$

(14) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6l-1} \leqq R \vee I$

（証明）　次の場合を示せば十分であろう。

(1) $\Longrightarrow$ (2)　性質2による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$(R\wedge \overline{I})^{6l-1}\leqq R^{6l-1}\leqq R\vee I\leqq R\vee \overline{R'}\vee I=R\vee \overline{R'}$

(3) $\Longrightarrow$ (6)　明らかである。

(6) $\Longrightarrow$ (1)　$(R\wedge \overline{I})^{6l-1}=(R\wedge \overline{I})^{3(2l)-1}$ だから性質1によって

$R^2\leqq R\vee I$。　（証明終）

上の性質3は，実質的には文献(13)の性質12における条件の特別な場合となっている。たとえば文献(13)の性質12(1) $\Longrightarrow$ (3)によれば，$R\vee R'\vee I=E$ のとき

$R^2\leqq R\vee I \Longrightarrow$ すべての k ($k=0, 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2+3k}\leqq R\vee I$

となるが，いま $k=2l-1$ とおけば

$$2+3k=2+3(2l-1)=6l-1$$

であって，$R\vee R'\vee I=E$ のとき

$R^2\leqq R\vee I \Longrightarrow$ すべての l ($l=1, 2, \cdots$) に対して $R^{6l-1}\leqq R\vee I$

となる。これには上の性質3の(1) $\Longrightarrow$ (13)にほかならない。

3.2　$R^2\leqq\triangle R\vee I$ となる条件

ここでは $R^2\leqq\triangle R\vee I$ なる R の性質，すなわち $R^2\leqq\triangle R\vee I$ となるための条件，また $R^2\leqq\triangle R\vee I$ となるための必要十分条件などを示す。$R^2\leqq\triangle R\vee I$ なる条件は前節の $R^2\leqq R\vee I$ の特別な場合となっているが，もちろん一般には $R^2\leqq\triangle R\vee I$ であっても推移的となるとは限らない。なお以下の3.3節および3.4節では，本節における $R^2\leqq\triangle R\vee I$ の特別な場合である $R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$ と $R^2\leqq\triangle R$ について考察をおこなっている。

〔性質4〕

$R\vee R'\vee I=E$，ある l ($l=1, 2, \cdots$) に対して $(R\wedge \overline{I})^{3l-1}\leqq \overline{R'}$

$\Longrightarrow R^2\leqq\triangle R\vee I$

（証明）　$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i\neq j$ とする。このとき $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=0$ となることはない

ことを示す。なお $S=R\wedge\overline{I}$ とおく。

(1) $r_{ij}=0$ のとき

$R\vee R'\vee I=E$ によって $r_{ji}=1$ となり，したがって $s_{ji}=1$。

(a) $i=k$ のとき

$r_{ii}=r_{ij}=1$ となり，$r_{ij}=0$ と矛盾する。

(b) $k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{jj}=1$ となり，$r_{ij}=0$ と矛盾する。

(c) $i\neq k,\ k\neq j$ のとき

$r_{ik}\wedge r_{kj}=1$ によって $s_{ik}\wedge s_{kj}=1$ となり，したがって $s_{ij}^{(2)}=1$。また $s_{ji}=1$ だから $s_{ii}^{(3)}=1$ 。よって $s_{ij}^{(3l-1)}=s_{ij}^{(3(l-1)+2)}=1$ となり，$r_{ji}=0$ となるが，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。

(2) $r_{ji}=1$ のとき

このとき $s_{ji}=1$。

(a) $i=k$ のとき

$r_{ii}=r_{ij}=1$ だから $s_{ij}=1,\ s_{ii}^{(2)}=1$ となる。

(i) $3l-1=2m(m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$s_{ii}^{(3l-1)}=s_{ii}^{(2m)}=1$。したがって $r_{ii}=0$ となるが，これは $r_{ii}=1$ と矛盾する。

(ii) $3l-1=2m-1(m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$s_{ij}^{(3l-1)}=s_{ij}^{(2m-1)}=s_{ij}^{(2(m-1)+1)}=1$。したがって $r_{ji}=0$ となるが，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。

(b) $k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{jj}=1$ だから $s_{ij}=1,\ s_{jj}^{(2)}=1$ となる。

(i) $3l-1=2m(m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$s_{jj}^{(3l-1)}=s_{jj}^{(2m)}=1$。したがって $r_{jj}=0$ となるが，これは $r_{jj}=1$ と矛盾する。

(ii) $3l-1=2m-1(m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$s_{ij}^{(3l-1)}=s_{ij}^{(2m-1)}=s_{ij}^{(2(m-1)+1)}=1$。したがって $r_{ji}=0$ となるが，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。

(c) $i\neq k,\ k\neq j$ のとき

$s_{ij}^{(2)}=1$, $s_{ii}^{(3)}=1$, $\dot{s}_{ij}^{(3l-1)}=s_{ij}^{(3(l-1)+2)}=1$ となる。

したがって $r_{ji}=0$ となるが，これは $r_{ji}=1$ と矛盾する。　(証明終)

〔性質5〕

$R\vee R'\vee I=E$, ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{3l-1}\leqq\overline{R'}\vee I$

$\Longrightarrow R^2\leqq\triangle R\vee I$

(証明)　$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i\neq j$ とする。いま $r_{ji}=1$ とすれば，$r_{ij}^{(2)}=1$ であるから $r_{ii}^{(3)}=1$, $r_{ij}^{(3l-1)}=r_{ij}^{(3(l-1)+2)}=1$ となり，$r_{ji}=0$ となる。しかし，これは $r_{ji}=1$ と矛盾するので $r_{ji}=0$ でなければならない。したがって $R\vee R'\vee I=E$ から $r_{ij}=1$ となり $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$ となる。　(証明終)

〔性質6〕

$R\vee R'\vee I=E$, ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{3l-1}\leqq\overline{R'}$

$\Longrightarrow R^2\leqq\triangle R\vee I$

(証明)　性質5による。　(証明終)

なお，この性質6は，すでに示した性質4からも得ることができる。

〔性質7〕

$R\vee R'\vee I=E$ のとき，

$R^2\leqq\overline{R'}\iff R^2\leqq\triangle R\vee I,\ R\wedge I=O$

(証明)　(1)　$R^2\leqq\overline{R'}$ のとき

性質6によって $R^2\leqq\triangle R\vee I$。また $R^2\leqq\overline{R'}$ より $R\wedge I=O$。

(2)　$R^2\leqq\triangle R\vee I$, $R\wedge I=O$ のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおく。$R\wedge I=O$ によって $i\neq k$, $k\neq j$。また $R^2\leqq\triangle R\vee I$ によって $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}=1$。もし $r_{ji}=1$ とすれば，$i=j$ となるから $r_{ii}=1$, $r_{ik}=r_{ki}=1$ となり，$r_{ik}^{(2)}=1$ となる。したがって $r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}\vee\delta_{ik}=1$ となり $i=k$ となるが，これは $i\neq k$ と矛盾する。よって $r_{ji}=0$, すなわち $\overline{r_{ji}}=1$。　(証明終)

〔性質8〕

$R\vee R'\vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq\triangle R\vee I$

(2)　$(R\wedge \bar{I})^2 \leqq \overline{R'}$

(3)　$R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1) $\Longrightarrow$ (2)　$r_{ik}\wedge r_{kj}=1$, $i \neq k$, $k \neq j$ とおく。このとき $r_{ij}^{(2)}=1$ だから $r_{ij}\wedge \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij}=1$。

(a)　$i \neq j$ のとき

$$\overline{r_{ji}}=1$$

(b)　$i=j$ のとき

$r_{ik}\wedge r_{ki}=1$。もし $r_{ii}=1$ とすれば $r_{ik}=1$ によって $r_{ik}^{(2)}=1$。したがって $r_{ik}\wedge \overline{r_{ki}} \vee \delta_{ik}=1$ となり $i=k$。しかし，これは $i \neq k$ と矛盾するので $r_{ii}=0$ すなわち $\overline{r_{ii}}=1$。

(2) $\Longrightarrow$ (1)　性質4による。

(1) $\Longrightarrow$ (3)　$R^2 \leqq \triangle R \vee I \leqq \overline{R'} \vee I$

(3) $\Longrightarrow$ (1)　性質5による。　(証明終)

3.3　$R^2 \leqq \triangle R \vee (R\wedge I)$ となる条件

まず与えられた関係行列が $R^2 \leqq \triangle R \vee (R\wedge I)$ となるための条件を示し，次に $R^2 \leqq \triangle R \vee (R\wedge I)$ と同値な条件，そして最後に連結性のもとで $R^2 \leqq \triangle R \vee (R\wedge I)$ と同値になる条件を示す。$R^2 \leqq \triangle R \vee (R\wedge I)$ なる R の基本的性質については，すでに文献(9)(11)(12)でも示されているが，以下において述べるように $R^2 \leqq \triangle R \vee (R\wedge I)$ なる条件は $R^2 \leqq R$, $\triangledown R \leqq I$ と同値である。したがって $R^2 \leqq \triangle R \vee (R\wedge I)$ なる R は反対称的な推移関係を表現する行列となっている。

〔性質9〕

$R \vee R' \vee I = E$ のとき，ある $l(l=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R\wedge \bar{I})^{6l-1} \leqq \overline{R'} \vee I$ $\Longrightarrow$ $R^2 \leqq \triangle R \vee (R\wedge I)$

(証明)　$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき $r_{ij}\wedge \overline{r_{ji}} \vee r_{ij}\wedge \delta_{ij}=1$ となることを示す。なお $S=R\wedge \bar{I}$ とする。

(1)　$i=k$ のとき

$r_{ii}=1, \ r_{ij}=1$

(a)　$i=j$ のとき

$r_{ij}\wedge\delta_{ij}=r_{ii}\wedge\delta_{ii}=1$

(b)　$i\neq j$ のとき

$r_{ij}=1$ から $s_{ij}=1$。いま $r_{ji}=1$ とすれば $s_{ji}=1$, $s_{ii}^{(2)}=1$。したがって $s_{ij}^{(6l-1)}=s_{ij}^{(2(3l-1)+1)}=1$ となるから $r_{ji}=0$ となる。しかし，これは $r_{ji}=1$ と矛盾するので $r_{ji}=0$。よって $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(2)　$k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{jj}=1$

(a)　$i=j$ のとき

$r_{ij}\wedge\delta_{ij}=r_{jj}\wedge\delta_{jj}=1$。

(b)　$i\neq j$ のとき

$r_{ij}=1$ から $s_{ij}=1$。いま $r_{ji}=1$ とすれば $s_{ji}=1$, $s_{ii}^{(2)}=1$。したがって $s_{ij}^{(6l-1)}=s_{ij}^{(2(3l-1)+1)}=1$ となり $r_{ji}=0$。しかし，これは矛盾するので $r_{ji}=0$。よって $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(3)　$i\neq k$, $k\neq j$ のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1$ から $s_{ik}=s_{kj}=1$ となり $s_{ij}^{(2)}=1$。

(a)　$i=j$ のとき

$r_{ik}=r_{ki}=1$ だから $s_{ik}=s_{ki}=1$, $s_{ii}^{(2)}=1$。したがって $s_{ik}^{(6l-1)}=s_{ik}^{(2(3l-1)+1)}=1$ となり $r_{ki}=0$。しかし，これは $r_{ki}=1$ と矛盾するので，この場合はありえない。

(b)　$i\neq j$ のとき

もし $r_{ji}=1$ とすれば $s_{ji}=1$, $s_{ii}^{(3)}=1$。したがって $s_{ij}^{(6l-1)}=s_{ij}^{(3(2l-1)+2)}=1$ となり，$r_{ji}=0$ となる。しかし，これは $r_{ji}=1$ と矛盾するので $r_{ji}=0$。ゆえに $R\vee R'\vee I=E$ から $r_{ij}=1$ となり，$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。　(証明終)

〔性質10〕[11]

次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$

(2)　$R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I$

(3)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$

〔性質11〕[11]

次の条件は同値である。

(1)　$\triangledown R \leqq I$

(2)　$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$

(3)　$R \wedge \overline{I} = \triangle R$

(4)　$R \leqq \overline{R'} \vee I$

〔性質12〕

$$\triangledown R \leqq I \iff R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'}$$

(証明)　$\triangledown R \leqq I \iff R \wedge R' \leqq I$

$$\iff R \wedge R' \wedge \overline{I} = O$$

$$\iff R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'}$$　(証明終)

〔性質13〕

$$R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I \iff (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \triangle R$$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I$ のとき

性質10によって $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$。ところで性質11によって $\triangledown R \leqq I$ から $R \wedge \overline{I} = \triangle R$。したがって $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \triangle R$。

(2)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \triangle R$ のとき

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \triangle R \leqq R \wedge \overline{I}$$

性質10によって $R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I$。　(証明終)

〔性質14〕

$$R^2 \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \iff (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \triangle R$$

(証明)　性質10と性質13による。　(証明終)

〔性質15〕[8]

$R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I \implies$ すべての $k\,(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'} \vee I$

〔性質16〕

$R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I \implies$ すべての $k\,(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^k \leqq \overline{R'}$

(証明)　性質10によって$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$であるから$(R\wedge\overline{I})^k\leqq R\wedge\overline{I}$。ところで性質12によって$\nabla R\leqq I$から$R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}$となる。ゆえに$(R\wedge\overline{I})^k\leqq\overline{R'}$。　(証明終)

〔性質17〕[(9)]

$R\vee R'\vee I=E$のとき

$$[(R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3]\wedge I=O \implies R^2\leqq R$$

〔性質18〕[(8)]

すべての$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して，

$$R^{l+1}\wedge I=O \iff R^l\leqq\overline{R'}$$

〔性質19〕

すべての$l(l=1,\ 2,\ \cdots)$に対して，

$$(R\wedge\overline{I})^{l+1}\wedge I=O \iff (R\wedge\overline{I})^l\leqq\overline{R'}\vee I$$

(証明)　性質18によって

$$(R\wedge\overline{I})^{l+1}\wedge I=O \iff (R\wedge\overline{I})^l\leqq\overline{(R\wedge\overline{I})'}=\overline{R'}\vee I$$

(証明終)

〔性質20〕

$$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O \iff R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\vee I$$

(証明)　性質19による。　(証明終)

〔性質21〕[(14)]

$$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \iff (R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$$

(証明)　性質19による。　(証明終)

〔性質22〕

$$(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \iff (R\wedge\overline{I})^5\leqq\overline{R'}\vee I$$

(証明)　性質19による。　(証明終)

〔性質23〕

次の条件は同値である。

(1)　$[(R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3]\wedge I=O$

(2)　$R\vee R^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(3)　$(R\vee I)^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(4) $R\vee(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(5) $(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(6) $(R\wedge\overline{I})\times(R\vee I)\leqq\overline{R'}\vee I$

(7) $(R\vee I)\times(R\wedge\overline{I})\leqq\overline{R'}\vee I$

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2) 性質11によって $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ から $R\leqq\overline{R'}\vee I$。次に $R^2\leqq\overline{R'}\vee I$ となること，すなわち $r_{ik}=r_{kj}=1$ のとき $\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i\neq j$ とする。

(a) $i=k$ のとき

$r_{ij}=r_{kj}=1$。したがって $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ から $r_{ji}=0$ すなわち $\overline{r_{ji}}=1$。

(b) $k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=1$。したがって $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ から $r_{ji}=0$ すなわち $\overline{r_{ji}}=1$。

(c) $i\neq k,\ k\neq j$ のとき

$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$ だから $r_{ji}=0$ すなわち $\overline{r_{ji}}=1$。

(2) $\Longrightarrow$ (3) $R\vee R^2\leqq\overline{R'}\vee I$ から

$$I\vee R\vee R^2\leqq\overline{R'}\vee I\vee I=\overline{R'}\vee I$$

$$(R\vee I)^2\leqq\overline{R'}\vee I$$

(3) $\Longrightarrow$ (4)

$$R\vee(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee R^2\leqq I\vee R\vee R^2=(R\vee I)^2\leqq\overline{R'}\vee I$$

(4) $\Longrightarrow$ (5) 明らかである。

(5) $\Longrightarrow$ (1) 性質20および性質21によって

$R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\vee I$ から $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$ から $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$

よって $[(R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3]\wedge I=O$。

(5) $\Longrightarrow$ (6)

$$\begin{aligned}(R\wedge\overline{I})\vee(R\wedge\overline{I})^2&=(R\wedge\overline{I})\times[I\vee(R\wedge\overline{I})]\\&=(R\wedge\overline{I})\times(I\vee R)\\&=(R\wedge\overline{I})\times(R\vee I)\end{aligned}$$

よって $(R\wedge\overline{I})\times(R\vee I)\leqq\overline{R'}\vee I$。

(6) $\Longrightarrow$ (7)　$(R\wedge \bar{I})\times(R\vee I)$

$$=(R\wedge \bar{I})\vee(R\wedge \bar{I})^2$$
$$=[I\vee(R\wedge \bar{I})]\times(R\wedge \bar{I})$$
$$=(I\vee R)\times(R\wedge \bar{I})$$
$$=(R\vee I)\times(R\wedge \bar{I})$$

よって $(R\vee I)\times(R\wedge \bar{I})\leqq\overline{R'}\vee I$。

(7) $\Longrightarrow$ (5)　$(R\vee I)\times(R\wedge \bar{I})$

$$=[I\vee(R\wedge \bar{I})]\times(R\wedge \bar{I})$$
$$=(R\wedge \bar{I})\vee(R\wedge \bar{I})^2$$

よって $(R\wedge \bar{I})\vee(R\wedge \bar{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$。　　(証明終)

〔性質24〕

$R\vee R'\vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$

(2)　$R^2\leqq R$, $\triangledown R\leqq I$

(3)　$(R\wedge \bar{I})^5\leqq\overline{R'}\vee I$

(4)　ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R\wedge \bar{I})^{6l-1}\leqq\overline{R'}\vee I$

(5)　すべての $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $(R\wedge \bar{I})^k\leqq\overline{R'}$

(6)　$(R\wedge \bar{I})^5\leqq\overline{R'}$

(7)　ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $(R\wedge \bar{I})^{6l-1}\leqq\overline{R'}$

(8)　すべての $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $R^k\vee I\leqq\overline{R'}\vee I$

(9)　$R^5\vee I\leqq\overline{R'}\vee I$

(10)　ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6l-1}\vee I\leqq\overline{R'}\vee I$

(11)　すべての $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $(R\wedge \bar{I})^k\wedge I=O$

(12)　$[(R\wedge \bar{I})^2\vee(R\wedge \bar{I})^3]\wedge I=O$

(13)　$R\vee R^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(14)　$(R\vee I)^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(15)　$R\vee(R\wedge \bar{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(16)　$(R\wedge \bar{I})\vee(R\wedge \bar{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$

(17) $(R\wedge \overline{I})\times(R\vee I)\leqq\overline{R'}\vee I$

(18) $(R\vee I)\times(R\wedge \overline{I})\leqq\overline{R'}\vee I$

(19) $(R\wedge \overline{I})^2\leqq\triangle R$

(20) $(R\wedge \overline{I})^6\wedge I=O$

(証明) (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 性質10による。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 性質15によって $R^5\leqq\overline{R'}\vee I$。$(R\wedge \overline{I})^5\leqq R^5$ だから $(R\wedge \overline{I})^5\leqq R^5\leqq\overline{R'}\vee I$。

(3) $\Longrightarrow$ (4) 明らかである。

(4) $\Longrightarrow$ (1) 性質9による。

(2) $\Longrightarrow$ (5) 性質16による。

(5) $\Longrightarrow$ (6) 明らかである。

(6) $\Longrightarrow$ (7) 明らかである。

(7) $\Longrightarrow$ (4) 明らかである。

(2) $\Longrightarrow$ (8) 性質15によって $R^k\leqq\overline{R'}\vee I$ となるから

$R^k\vee I\leqq\overline{R'}\vee I\vee I=\overline{R'}\vee I$

(8) $\Longrightarrow$ (9) 明らかである。

(9) $\Longrightarrow$ (10) 明らかである。

(10) $\Longrightarrow$ (4) $(R\wedge \overline{I})^{6l-1}\leqq R^{6l-1}\leqq R^{6l-1}\vee I\leqq\overline{R'}\vee I$

(2) $\Longrightarrow$ (11) 性質10によって $(R\wedge \overline{I})^2\leqq R\wedge \overline{I}$ となり，また $(R\wedge \overline{I})\wedge I=O$ であるから，任意の $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $(R\wedge \overline{I})^k\wedge I=O$。

(11) $\Longrightarrow$ (12) 明らかである。

(12) $\Longrightarrow$ (2) 性質17によって $R^2\leqq R$。また性質11によって

$(R\wedge \overline{I})^2\wedge I=O$ から $\triangledown R\leqq I$。

(12) $\Longleftrightarrow$ (13) $\Longleftrightarrow$ (14) $\Longleftrightarrow$ (15) $\Longleftrightarrow$ (16) $\Longleftrightarrow$ (17) $\Longleftrightarrow$ (18) 性質23による。

(2) $\Longrightarrow$ (19) 性質13による。

(19) $\Longrightarrow$ (20) $(R\wedge \overline{I})^2\leqq\triangle R\leqq R\wedge \overline{I}$ となり，また $(R\wedge \overline{I})\wedge I=O$ であるから $(R\wedge \overline{I})^6\wedge I=O$。

(20) $\Longrightarrow$ (12)　$(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O$ によって $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$, また $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$。ゆえに

$$[(R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3]\wedge I=O$$ (証明終)

なお $R\vee R'\vee I=E$ の条件のもとで $R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$ すなわち $R^2\leqq R$, $\triangledown R\leqq I$ と同値になる条件として次の性質も知られている。

〔性質25〕[11][12]

$R\vee R'\vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$, $\triangledown R\leqq I$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^n=O$

(3)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$, $\triangledown R\leqq I$

(4)　$(\triangle R)^3\wedge I=O$, $\triangledown R\leqq I$

(5)　$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$, $\triangledown R\leqq I$

(6)　すべての $k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k\leqq\overline{R'}\vee I$

(7)　ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{6l+5}\leqq\overline{R'}\vee I$

(8)　$R^5\leqq\overline{R'}\vee I$

3.4　$R^2\leqq\triangle R$ となる条件

本節では $R^2\leqq\triangle R$ となる R の性質，すなわち $R^2\leqq\triangle R$ となるための条件および連結性のもとで $R^2\leqq\triangle R$ と同値になる条件について調べている。以下で明らかになるように $R^2\leqq\triangle R$ なる条件は一般に $R^2\leqq R$, $R\wedge I=O$ と同値である。したがって $R^2\leqq\triangle R$ なる R は非反射的な推移関係を表現する行列となる。この非反射的な推移関係については興味ある数多くの性質がすでに知られているが[6][7]，ここでは，とくに連結性のもとで非反射的推移関係となるための種々の必要十分条件を明らかにしている。

〔性質26〕

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2\leqq\triangle R$$

(証明)　(1)　$R^2\leqq R$, $R\wedge I=O$ のとき

$r_{ij}^{(2)}=1$ とすれば $r_{ij}=1$。もし $r_{ji}=1$ とすれば $r_{ii}=1$ となって $R\wedge I=O$ と

矛盾するので $r_{ji}=0$。よって $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$, すなわち $R^2\leqq\triangle R$。

(2)　$R^2\leqq\triangle R$ のとき

$R^2\leqq\triangle R\leqq R$, いま $r_{ii}=1$ とすれば $r_{ii}^{(2)}=1$ となるが, $\triangle R$ の対角要素は 0 なので $R^2\leqq\triangle R$ と矛盾する。よって $r_{ii}=0$, すなわち $R\wedge I=O$。

(証明終)

〔性質27〕(7)(8)

次の条件は同値である。

(1)　$\triangledown R=O$

(2)　$\triangle R=R$

(3)　$R^2\wedge I=O$

(4)　$R\leqq\overline{R'}$

〔性質28〕

$R\vee R'\vee I=E$ のとき

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O \iff (\triangle R)^3\wedge I=O,\ \triangledown R=O$$

(証明)　(1)　$R^2\leqq R$, $R\wedge I=O$ のとき

$R\wedge R'=O$ となるから $\triangledown R=O$ となり, 性質27によって $\triangle R=R$。また $R^3\wedge I\leqq R\wedge I=O$ であるから $(\triangle R)^3\wedge I=O$。

(2)　$(\triangle R)^3\wedge I=O$, $\triangledown R=O$ のとき

$\triangledown R=O$ のとき明らかに $R\wedge I=O$ であり, また性質27によって $\triangle R=R$。したがって $R^3\wedge I=O$。ここで $r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき $r_{ij}=1$ となることを示す。まず $\triangledown R=O$ によって $i\neq j$ である。いま $r_{ij}=0$ とすれば $R\vee R'\vee I=E$ によって $r_{ji}=1$ となり, これから $r_{ii}^{(3)}=1$ となって $R^3\wedge I=O$ と矛盾するので $r_{ij}=1$ となる。したがって $R^2\leqq R$ となる。　(証明終)

〔性質29〕(12)

$$R^3\wedge I=O \iff R^2\leqq\overline{R'}$$

(証明)　性質18による。　(証明終)

〔性質30〕

$$R^6\wedge I=O \iff R^5\leqq\overline{R'}$$

(証明)　性質18による。　(証明終)

〔性質31〕

$(\triangle R)^3 \wedge I=O,\ \triangledown R=O \Longleftrightarrow R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$

(証明)　(1)　$(\triangle R)^3 \wedge I=O,\ \triangledown R=O$ のとき

$\triangledown R=O$ から性質27によって $\triangle R=R$。したがって $(\triangle R)^3 \wedge I=O$ から $R^3 \wedge I=O$，すなわち性質29によって $R^2 \leqq \overline{R'}$。また $\triangledown R=O$ から $R \wedge R'=O$ であるから $R \leqq \overline{R'}$。こうして $R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$。

(2)　$R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$ のとき

$R \leqq \overline{R'}$ によって $R \wedge R'=O$ すなわち $\triangledown R=O$。したがって性質27によって $\triangle R=R$。また性質29によって $R^2 \leqq \overline{R'}$ から $R^3 \wedge I=O$。よって $(\triangle R)^3 \wedge I=O$。　(証明終)

〔性質32〕

$R \vee R' \vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq \triangle R$

(2)　$R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O$

(3)　$(\triangle R)^3 \wedge I=O,\ \triangledown R=O$

(4)　$R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$

(証明)　性質26，性質28，性質31による。　(証明終)

なお，$R^2 \leqq R$ のもとで $R \wedge I=O$ と同値になる条件が文献(7)に示されている。

〔性質33〕

$R \vee R' \vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq \triangle R$

(2)　$R^2 \leqq R,\ R \wedge I=O$

(3)　$(\triangle R)^3 \wedge I=O,\ \triangledown R=O$

(4)　$R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$

(5)　$R \times (R \vee I) \leqq \overline{R'}$

(6)　$(R \vee I) \times R \leqq \overline{R'}$

(7) $I \vee R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$

(8) $(R \vee I)^2 \leqq \overline{R'}$

(9) すべての $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $R^k \vee I \leqq \overline{R'}$

(10) $R^5 \vee I \leqq \overline{R'}$

(11) ある $l(l=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6l-1} \vee I \leqq \overline{R'}$

(12) すべての $k(k=1, 2, \cdots)$ に対して $R^k \wedge I = O$

(証明) (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 性質32による。

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) 性質32による。

(3) $\Longleftrightarrow$ (4) 性質32による。

(4) $\Longrightarrow$ (5) $R \vee R^2 = R \times (I \vee R) = R \times (R \vee I)$。よって $R \times (R \vee I) \leqq \overline{R'}$。

(5) $\Longrightarrow$ (6) $R \times (R \vee I) = R^2 \vee R = (R \vee I) \times R$。よって $(R \vee I) \times R \leqq \overline{R'}$。

(6) $\Longrightarrow$ (7) $R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$ によって $I \vee R \vee R^2 \leqq I \vee \overline{R'}$。ところで $R \leqq \overline{R'}$ だから $R \wedge I = O$。したがって $I \leqq \overline{R'}$ となり，$I \vee R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$。

(7) $\Longrightarrow$ (8) $I \vee R \vee R \vee R^2 \leqq \overline{R'}$
よって $(I \vee R)^2 \leqq \overline{R'}$。

(8) $\Longrightarrow$ (4) $R \vee R^2 \leqq (R \vee I)^2 \leqq \overline{R'}$

(2) $\Longrightarrow$ (9) $R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$ のとき $R \wedge R' = O$ であるから $R \leqq \overline{R'}$。したがって $R \vee I \leqq \overline{R'} \vee I = \overline{R'}$ となり，また $R^2 \leqq R$ によって $R^k \leqq R$ であるから $R^k \vee I \leqq \overline{R'}$。

(9) $\Longrightarrow$ (10) 明らかである。

(10) $\Longrightarrow$ (11) 明らかである。

(11) $\Longrightarrow$ (2) 性質24(10)(2)によって $R^2 \leqq R$。また $I \leqq \overline{R'}$ であるから $R \wedge I = O$。

(2) $\Longrightarrow$ (12) $R^k \wedge I \leqq R \wedge I = O$

(12) $\Longrightarrow$ (3) 性質27によって，$R^2 \wedge I = O$ から $\triangledown R = O$, $\triangle R = R$。また $R^3 \wedge I = O$ から $(\triangle R)^3 \wedge I = O$。 (証明終)

$R \vee R' \vee I = E$ なる条件のもとで $R^2 \leqq \triangle R$ すなわち $R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$ と同値になる条件に関しては次の性質も知られている。

〔性質34〕[7][12]

$R \vee R' \vee I = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R,\ \triangledown R = O$

(3)　$R^n = O$

(4)　$R^3 \wedge I = O,\ \triangledown R = O$

(5)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R},\ \triangledown R = O$

(6)　すべての $k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^k \leqq \overline{R'}$

(7)　ある $l(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して $R^{6l+5} \leqq \overline{R'}$

(8)　$R^5 \leqq \overline{R'}$

(9)　$(R^2 \vee R^3) \wedge I = O$

(10)　$R^6 \wedge I = O$

なお上の性質34の(8)(10)に関しては，すでに性質30において示したように，一般に

$$R^5 \leqq \overline{R'} \iff R^6 \wedge I = O$$

が成立する。

4．まとめ

関係における通常の推移性を少し一般化した条件と，その一般化した条件の特別な場合について考察し，主に連結性のもとでそれらの条件と同値になる多数の条件を明らかにした。とくに特別な場合として反対称的推移関係と非反射的推移関係について考察し，与えられた関係がこれらの関係となるための多数の必要十分条件を示した。この二つの関係は応用上しばしば現われるものであるが，これまで知られている性質に加えて，多くの興味ある同値条件を与えることができた。本論文で示したこれらの条件の一部は，これまでほとんど注目されていない条件とおもわれ，応用によっては有用であろう

と考えられる。

本論文と同様の考察は，関係の強い連結性すなわち反射的な連結性のもとでも可能であり，興味ある類似の性質が多数成立するものと予想される。この反射的な連結的関係も関係の理論および多くの応用において重要な関係であり，すでに基本的な性質はよく知られているが，これらについて，さらに考察し，これまで知られていない性質を明らかにすることは次の課題である。

文　献

(1) Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

(2) Behzad, M., G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster: "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).

(3) Deo, N.: "Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

(4) Fararo, T. J.: "Mathematical Sociology," Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).

(5) Harary, F. and L. Moser: "The theory of round robin tournaments," American Math. Monthly, Vol. 73, pp. 231-246 (1966).

(6) 橋本　寛：〝非反射的推移関係を表わすブール行列の性質〟，電子通信学会研究会資料 CAS79-155（1980年1月)。

(7) 橋本　寛：〝連結的推移関係行列の性質〟，山口経済学雑誌，第34巻第3・4号，pp.387-405（昭和60年6月)。

(8) 橋本　寛：〝連結的推移関係行列の性質Ⅱ〟，山口経済学雑誌，第35巻3・4号，pp.281-293（昭和61年1月)。

(9) 橋本　寛：〝推移関係行列に関するいくつかの十分条件〟，山口経済学雑誌，第35巻第5・6号，pp.425-436（昭和61年5月)

(10) 橋本　寛：〝Negatively Transitive 関係の性質〟，山口経済学雑誌，第36巻第1・2号，pp.41-58（昭和61年9月)。

(11) 橋本　寛：〝連結的関係に関する若干の性質〟，山口経済学雑誌，第36巻第5・6号，pp.245-261（昭和62年5月)。

(12) 橋本　寛：〝連結性のもとでの関係行列の性質〟，山口経済学雑誌，第37巻第1・2号，pp.75-88（昭和62年9月)。

(13) 橋本　寛：〝連結的関係行列の初等的性質〟，山口経済学雑誌，第38巻第3・4号，pp.557-576（平成元年7月)。

(14) 橋本　寛：〝関係の連結性に関するある種の十分条件について〟，山口経済学雑誌，第38巻第5・6号，pp.783-797（平成元年11月)。

(15) Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).

(16) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to social, biological, and environmental problems," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

(17) Rosenblatt, D.: "On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean relation matrices and stochastic matrices," Naval Res. Logistics Quart., Vol. 4, No. 2, pp.151-167 (1957).

(18) Tarski, A.: "Introduction to Logic," Oxford University Press, New York (1965).