

推移関係行列に関するいくつかの十分条件

橋 本 寛

1. はじめに

ブール行列は二項関係や有向グラフ⁽²⁾を表現する行列であって、古くから多くの分野で応用されている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。本論文では与えられたブール行列が推移的關係行列となるための十分条件について考察をおこなっている。以下では、まず与えられたブール行列が推移的となるためのある一つの比較的一般的な条件を示し、次にこの条件の特別な場合として多数の推移関係に関する性質を導いている。

推移関係は応用上重要な二項関係であり⁽⁵⁾、これまでも推移関係に関する多くの研究がおこなわれているが、本論文で示す推移関係の性質はトーナメント⁽⁸⁾（非対称的な連結的關係）と密接な関連をもっている。すなわち、ここで示す性質の一部はトーナメントに関する性質の一般化と考えることができ、それらの性質の特別な場合としてトーナメントに関するよく知られた性質を導くことができる。また連結性や推移性は選好関係⁽¹⁾⁽³⁾においても重要な性質であり、ここで示す結果は選好関係の議論においても有用であろうと考えられる。

2. 演算および記法の定義

本論文において取り扱うブール行列は0, 1の要素をもつ n 次行列であ

る。まず 0, 1 の値をとる x, y に対して, $x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$, $\bar{x} = 1 - x$ と定める。次に n 次ブール行列 $R = [r_{ij}]$, $S = [s_{ij}]$ に対して, 次のように行列演算を定める。

$$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}],$$

$$R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}],$$

$$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})],$$

$$R^{k+1} = R^k \times R \quad (k = 1, 2, \dots), \quad R^1 = R,$$

$$\bar{R} = [\bar{r}_{ij}],$$

$$R' = [r_{ji}],$$

$$\Delta R = R \wedge \bar{R}',$$

$$\nabla R = R \wedge R',$$

$$R \leq S \iff r_{ij} \leq s_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

なお, 以下において単位行列を $I = [\delta_{ij}]$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ), 零行列を O , 全要素が 1 の行列を E で示す。また, 一般に R^k の (i, j) 要素を $r_{ij}^{(k)}$ で示す。ところで, $R^2 \leq R$ なるブール行列 R は推移的關係を表現する行列であり, $I \leq R$ なる行列 R で表現される關係は反射的, また $R \wedge I = O$ なる行列 R で表現される關係は非反射的といわれる。さらに, $R \vee R' \vee I = E$ なるブール行列 R で表現される關係は連結的といわれ, $R \vee R' = E$ であれば反射的かつ連結的となる。

3. 推移性に関する性質

ここでは, まず 3.1 において本論文の中心となる一つの基本的な性質を示し, 次に以下の議論の展開で必要ないくつかの性質を示している。また 3.2 においては, 3.1 で得られた推移性に関する基本的な結果をもとにして, これから多数の推移性に関する十分条件を導いている。

3.1 基本的性質

まず、本論文の主要な結果である一つの性質を示し、次に一般化された反対称性に関する性質を示している。その推移性に関する基本的な結果の中には反対称性の条件が含まれており、この反対称性に関する性質は以下の議論において有用である。

[性質1] $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$\nabla R \leq I, (\Delta R)^3 \wedge I = 0 \implies R^2 \leq \Delta R \vee (R \wedge I)$$

(証明) $r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とおき、 $(r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}) \vee (r_{ij} \wedge \delta_{ij}) = 1$ となることを示す。

(1) $i = j$ のとき

$$r_{ik} \wedge r_{ki} = 1. \text{ このとき } \nabla R \leq I \text{ から } i = k.$$

よって $r_{ii} = r_{ik} = 1$ 。ゆえに $r_{ij} \wedge \delta_{ij} = r_{ii} \wedge \delta_{ii} = 1$ 。

(2) $i \neq j$ のとき

(a) $i = k$ のとき

$$r_{ij} = r_{kj} = 1. \text{ このとき } \nabla R \leq I \text{ から } r_{ji} = 0.$$

ゆえに $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$ 。

(b) $k = j$ のとき

$$r_{ij} = r_{ik} = 1. \text{ このとき } \nabla R \leq I \text{ から } r_{ji} = 0.$$

ゆえに $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$ 。

(c) $i \neq k, k \neq j$ のとき

このとき $r_{ki} = 0, r_{jk} = 0$ 。もし $r_{ji} = 1$ とすれば、 $r_{ij} = 0$ だから

$$(r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}}) \wedge (r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}}) \wedge (r_{ji} \wedge \overline{r_{ij}}) = 1$$

となって $(\Delta R)^3 \wedge I = 0$ と矛盾する。よって $r_{ji} = 0$ 。したがって $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ から $r_{ij} = 1$ 。

ゆえに $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$ 。

(証明終)

[性質2] P, Q を n 次ブール行列とする。

$$(1) R \wedge P' \leq S \vee Q' \iff [(R \wedge \overline{S}) \times (P \wedge \overline{Q})] \wedge I = 0$$

$$(2) R \wedge P' \leq S \iff [(R \wedge \overline{S}) \times (P \wedge \overline{S})] \wedge I = 0$$

(3) $R \wedge P' \leq S \vee S' \iff [(R \wedge \bar{S}) \times (P \wedge \bar{S})] \wedge I = 0$

(4) $S' = S$ のとき

$$R \wedge P' \leq S \iff [(R \wedge \bar{S}) \times (P \wedge \bar{S})] \wedge I = 0$$

(5) $\nabla R \leq S \vee S' \iff (R \wedge \bar{S})^2 \wedge I = 0$

(6) $D \leq I$ のとき

$$R \wedge P' \leq D \iff [(R \wedge \bar{D}) \times (P \wedge \bar{D})] \wedge I = 0$$

(7) $S' = S$ のとき

$$\nabla R \leq S \iff (R \wedge \bar{S})^2 \wedge I = 0$$

(8) $R \wedge P' \leq I \iff [(R \wedge \bar{I}) \times (P \wedge \bar{I})] \wedge I = 0$

(9) $D \leq I$ のとき

$$\nabla R \leq D \iff (R \wedge \bar{D})^2 \wedge I = 0$$

(10) $\nabla R \leq I \iff (R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = 0$

(11) $\nabla R = 0 \iff R^2 \wedge I = 0$

(証明) (1) $P = [p_{ij}]$, $Q = [q_{ij}]$, $T = [t_{ij}] = (R \wedge \bar{S}) \times (P \wedge \bar{Q})$ とおく。

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (r_{ik} \wedge \bar{s}_{ik} \wedge p_{kj} \wedge \bar{q}_{kj})$$

(a) $R \wedge P' \leq S \vee Q'$ のとき

$$t_{ii} = \bigvee_{k=1}^n (r_{ik} \wedge \bar{s}_{ik} \wedge p_{ki} \wedge \bar{q}_{ki})$$

$R \wedge P' \leq S \vee Q'$ によって $r_{ik} \wedge \bar{s}_{ik} \wedge p_{ki} \wedge \bar{q}_{ki} = 0$ 。したがって $t_{ii} = 0$ 。

(b) $[(R \wedge \bar{S}) \times (P \wedge \bar{Q})] \wedge I = 0$ のとき

$$t_{ii} = \bigvee_{k=1}^n (r_{ik} \wedge \bar{s}_{ik} \wedge p_{ki} \wedge \bar{q}_{ki}) = 0$$

$$r_{ik} \wedge \bar{s}_{ik} \wedge p_{ki} \wedge \bar{q}_{ki} = 0$$

したがって

$$R \wedge P' \leq S \vee Q'$$

(2)–(11) 省略

(証明終)

[性質3] $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (\Delta R)^3] \wedge I = 0 \implies R^2 \leq \Delta R \vee (R \wedge I)$$

(証明) 性質2(10)によって

$$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = 0 \iff \nabla R \leq I$$

したがって性質1から

$$R^2 \leq \Delta R \vee (R \wedge I)$$

(証明終)

[性質4] $(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = 0 \iff R \wedge \bar{I} = \Delta R$

(証明) (1) $(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = 0$ のとき

$$(R \wedge \bar{I}) \wedge (R \wedge \bar{I})' = 0$$

$$R \wedge \bar{I} \wedge R' \wedge \bar{I} = 0$$

$$R \wedge R' \wedge \bar{I} = 0$$

$$R \wedge \bar{I} \leq \bar{R}'$$

$$R \wedge R \wedge \bar{I} \leq R \wedge \bar{R}'$$

$$R \wedge \bar{I} \leq R \wedge \bar{R}' \leq R \wedge \bar{I}$$

よって

$$R \wedge \bar{I} = R \wedge \bar{R}' = \Delta R$$

(2) $R \wedge \bar{I} = \Delta R$ のとき

$$R \wedge \bar{I} = R \wedge \bar{R}' \leq \bar{R}'$$

$$R \wedge R' \wedge \bar{I} = 0$$

$$R \wedge \bar{I} \wedge R' \wedge \bar{I} = 0$$

$$(R \wedge \bar{I}) \wedge (R \wedge \bar{I})' = 0$$

$$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = 0$$

(証明終)

なお、すでに性質2(10)で示しているように

$$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = 0 \iff \nabla R \leq I$$

が成立する。

[性質5] $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = 0 \implies R^2 \leq \Delta R \vee (R \wedge I)$$

(証明) 性質3と性質4による。

(証明終)

[性質6] $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$\nabla R \leq I, (\Delta R)^3 \wedge I = 0 \implies R^2 \leq R$$

(証明) $\Delta R \vee (R \wedge I) \leq R$ だから, 性質1によって $R^2 \leq R$ 。

(証明終)

[性質7] $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$\nabla R = 0, (\Delta R)^3 \wedge I = 0 \implies R^2 \leq R$$

(証明) 性質6による。

(証明終)

なお, よく知られているように, $\nabla R = 0$ のとき $\Delta R = R$ となる。

[性質8] $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (\Delta R)^3] \wedge I = 0 \implies R^2 \leq R$$

(証明) 性質2(10)によって

$$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = 0 \iff \nabla R \leq I$$

であるから, 性質6によって $R^2 \leq R$ 。

(証明終)

3.2 基本的性質から導かれる性質

すでに示した性質8から, その特別な場合としてきわめて多数の性質が導かれ, それらの中にはこれまでよく知られているトーナメントに関する性質なども含まれている。その導出の手順は次のとおりである。性質8における条件 $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ に関して, $\Delta R \leq P$ なる P および $Q \leq R \vee R' \vee I$ なる Q を考えて, $P^2 \leq Q$ で $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ を置き換える。 P としては, $R \wedge \bar{I}$, $\bar{R}' \wedge \bar{I}$, R , $R \vee R'$ などがあり, また Q としては $R \vee R'$, $R' \vee I$ などがある。したがって, これらの組合せによりきわめて多数の性質が得られることになる。これらの性質のうち, 自明なものや容易に他の場合に帰着されるもの, また条件の中に矛盾が生じるものなどを除き, 主要な性質を以下に列挙する。

[性質9] $(\Delta R)^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$(1) (a) [(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = 0 \implies R^2 \leq R$$

$$(b) (R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = 0 \implies R^2 \leq R$$

- (c) $(R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$
- (2) (a) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (b) $R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (c) $R^n = O \implies R^2 \leq R$

上の性質 9 (2)(a) の中の $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O$ は $R^2 \wedge I = O$, $R^3 \wedge I = O$ と同値であるが, 性質 2 (11) で示したように, $R^2 \wedge I = O$ は $\nabla R = O$ と同値であるので, $R^2 \wedge I = O$ を $\nabla R = O$ で置き換えることができる。なお, $\nabla R = O$ なる行列 R は非対称 (asymmetric) といわれ, また $\nabla R = O$ と同値ないくつかの条件については文献⁽⁶⁾ においても示されている。

[性質10] $(\Delta R)^2 \leq R \vee R'$ のとき

- (1) (a) $[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (b) $(R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (c) $(R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$
- (2) (a) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (b) $R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (c) $R^n = O \implies R^2 \leq R$

[性質11] $(R \wedge \bar{I})^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

- (a) $[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (b) $(R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (c) $(R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$

[性質12] $(\bar{R} \wedge \bar{I})^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

- (1) (a) $[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (b) $(R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (c) $(R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$
- (2) (a) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (b) $R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$
- (c) $R^n = O \implies R^2 \leq R$

[性質13] $(\bar{R} \wedge \bar{I})^2 \leq R \vee R'$ のとき

$$(1) (a) [(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(b) (R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(c) (R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$$

$$(2) (a) (R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(b) R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(c) R^n = O \implies R^2 \leq R$$

[性質14] $[(R \vee R') \wedge \bar{I}]^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$(a) [(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(b) (R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(c) (R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$$

[性質15] $[(R \vee \bar{R}') \wedge \bar{I}]^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$(1) (a) [(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(b) (R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(c) (R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$$

$$(2) (a) (R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(b) R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(c) R^n = O \implies R^2 \leq R$$

[性質16] $R^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$(1) (a) [(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(b) (R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(c) (R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$$

$$(2) (a) (R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(b) R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(c) R^n = O \implies R^2 \leq R$$

[性質17] $(\bar{R})^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

$$(1) (a) [(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(b) (R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$$

$$(c) (R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$$

(2) (a) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(b) $R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(c) $R^n = O \implies R^2 \leq R$

[性質18] $(\overline{R})^2 \leq R \vee R'$ のとき

(a) $[(R \wedge \overline{I})^2 \vee (R \wedge \overline{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(b) $(R \wedge \overline{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(c) $(R \wedge \overline{I})^n = O \implies R^2 \leq R$

上の性質18(a)に関して、 $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ が必要な例、すなわち $(\overline{R})^2 \leq R \vee R'$ かつ $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$ であっても $R^2 \leq R$ とならない例としては次の行列がある。

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

この行列 R に対して $(\overline{R})^2$, $R \vee R'$, $(R \wedge \overline{I})^3$ を計算してみると次のようになる。

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R \vee R' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R \wedge \overline{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{R})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(R \wedge \overline{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(R \wedge \overline{I})^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = R \wedge \overline{I}$$

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

こうして $(\bar{R})^2 \leq R \vee R'$, $(R \wedge \bar{I})^3 \wedge I = O$ となるが, $R^2 \leq R$ とはなっていない。

また $(R \wedge \bar{I})^3 \wedge I = O$ が必要な例としては次の行列がある。

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これに対して $(\bar{R})^2$, $R \vee R'$, $(R \wedge \bar{I})^2$ を計算してみると次のようになる。

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R \vee R' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R \wedge \bar{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{R})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R \wedge \bar{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

こうして $(\bar{R})^2 \leq R \vee R'$, $(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O$ となるが, $R^2 \leq R$ とはなっていない。

(性質19) $(R \vee R')^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

(1) (a) $\{(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3\} \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(b) $(R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(c) $(R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$

(2) (a) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(b) $R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(c) $R^n = O \implies R^2 \leq R$

〔性質20〕 $(R \vee R' \vee I)^2 \leq R \vee R' \vee I$ のとき

(1) (a) $[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(b) $(R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(c) $(R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$

(2) (a) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(b) $R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(c) $R^n = O \implies R^2 \leq R$

上記の性質20における条件 $(R \vee R' \vee I)^2 \leq R \vee R' \vee I$ は $I \leq R \vee R' \vee I$ であるから $(R \vee R' \vee I)^2 = R \vee R' \vee I$ で置き換えてもよい。

〔性質21〕 $R \vee R' \vee I = E$ のとき

(1) (a) $[(R \wedge \bar{I})^2 \vee (R \wedge \bar{I})^3] \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(b) $(R \wedge \bar{I})^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(c) $(R \wedge \bar{I})^n = O \implies R^2 \leq R$

(2) (a) $(R^2 \vee R^3) \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(b) $R^6 \wedge I = O \implies R^2 \leq R$

(c) $R^n = O \implies R^2 \leq R$

上記の(2)(a)および(2)(c)はトーナメントの性質としてすでによく知られているものである⁽²⁾⁽⁸⁾。また $R \vee R' \vee I = E$ のもとで $R^n = O$ と同値な条件については文献⁽⁶⁾で述べられている。

4. むすび

本論文においては、推移性に関するある一般的な性質を示し、その特別な場合として多数の性質を導いた。その導いた性質のうち主要なものについて

では示しているが、すでに述べたように、自明なものや容易に他の場合に帰着されるものなどは除いており、またその性質を満たすブール行列がきわめて特殊なものに限定されるものについても除外している。特殊なブール行列に限定されるもののうち興味深いブール行列、例えば vacuously transitive 関係行列⁽⁴⁾⁽⁹⁾などに関する性質については別の機会に考察をおこなう予定である。

この研究はトーナメントを表現するブール行列の研究に端を発したものであり、ここで与えた性質の一部はトーナメントに関する性質の一般化となっている。トーナメントを表現するブール行列については、これまでも多くの研究があり、興味ある性質が知られているが、トーナメントについてはさらに考察する余地が残されているように感じられる。またトーナメントの議論において欠くことのできないべき零のブール行列はブール行列の理論の中で重要な位置を占めており、これについてさらに考察をおこなうことも今後の課題である。

文 献

- [1] Arrow, K. J.; "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).
- [2] Behzad, M., Chartrand, G., and Lesniak-Foster, L.; "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).
- [3] Fararo, T. J.; "Mathematical Sociology," Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).
- [4] Golumbic, M. C.; "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs," Academic Press, New York (1980).
- [5] Hashimoto, H.; "Transitive reduction of a rectangular boolean matrix," Discrete Applied Mathematics 8, pp.153-161 (1984).
- [6] 橋本寛; "連結的推移関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第34巻第3・4号, pp.89-107 (昭和60年6月)
- [7] Kim, K. H.; "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).
- [8] Roberts, F. S.; "Discrete Mathematical Models," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
- [9] Sharp, H., Jr.; "Enumeration of vacuously transitive relations," Discrete Mathematics 4, pp.185-196 (1973).
- [10] 寺野寿郎; "システム工学入門", 共立出版 (1985年3月)