ファジー概念空間における
情報検索の数学的モデル

橋本　寛

1. まえがき

情報検索においては，情報とくに文献，および検索の要求が，概念の組合せによって表現される〔1〕。しかし，この概念の中には，従来考えられている確定的な概念の他に，あいまいな概念，すなわちファジー概念がしばしば現れ，重要な役割を演じる。したがって，これらを含めた情報検索のモデルが必要となる。

たとえば，筆者の試みている，行列論の中で出てくる種々の行列に関する定理およびアルゴリズムの検索〔2〕においては，直交行列とかエルミット行列などの確定的概念の他に，つぎのような概念がしばしば現れる。

(1)　0要素の多い行列（スパース行列）

(2)　スパースな正定値行列

(3)　ほとんど特異な行列（行列式がほとんど0の行列）

(4)　条件数の大きい行列（行列式が小さくても条件数が大きいとはかぎらない）

(5)　非対角要素の絶対値が全体的に低い行列

(6)　帯行列に近い行列

これらは，あいまいな表現であるにもかかわらず，実用上は，とくに数値計算においては重要であり，必須のものである。したがって，このような概念の使用も可能であるような，検索モデルを構成することが必要であるが，従来そのようなモデルは，ほとんど見られない。

本論文では，ファジー概念空間なるものを設定し，その上で，ファジー概念の処理を含めたモデルを構成し，その性質を調べる。モデルの基本演算としては，ファジー論理での含意を採用している。このモデルは，2値的な場合の自然な拡張となっており，今後の研究の出発点として，有用であると考えられる。

これまで，ファジー集合はZadeh以来種々の分野に応用されており〔3,4〕，情報検索に対しても応用されているが〔5,6〕，本論文のような形での応用は，ないように見受けられる。また，ファジー論理の含意は，あいまいな世界での推論とも関係があり，その点からも，このファジー概念に関するモデルは興味深い。

2．演算の定義

モデルの構成において，必要となる演算を以下に定める。閉区間〔0，1〕の値をとる変数x，yに対して

$$x \wedge y \equiv \min\{x, y\}$$
$$x \vee y \equiv \max\{x, y\}$$
$$\bar{x} \equiv 1-x$$
$$x \leftarrow y \equiv \min\{x-y+1,\ 1\}$$

と定義する。

上記の$x \leftarrow y$はファジー論理での含意である。モデルを構成する上での都合により，通常の表記である$y \rightarrow x$の代りに，$x \leftarrow y$を採用する。本論文では，$x \leftarrow y$をモデルの基本演算として用いており，モデルに関して得られる多くの性質は，$x \leftarrow y$の性質と関係している。$x \leftarrow y$は$x \geqq y$のときかつそのときにかぎり1となり，また演算結果は直観的に判定しやすく，都合がよい。

3．モデルの構成

3.1 概念空間

概念を形成する集合，すなわち外延の要素のすべての集合を，概念空間と称することにする。たとえば，行列の定理の検索においては，行列の全体集合を概念空間とすることができる。この全体集合の部分集合として，対称行列，アダマール行列などの概念が定められる。ここでは，一定の定義によって決定される部分集合を概念と考えるが，さらに概念をつぎのように一般化する。

概念空間をTとし，基本となる概念をK_1，K_2，…，K_nとする。このとき，TK_iを

$$TK_i \equiv \{(x, f_i(x)) \mid x \in T\}$$

と定める。$f_i(x)$はメンバーシップ関数であって

$$0 \leqq f_i(x) \leqq 1$$

である。すなわち，TK_iはファジー集合を表現する。このように，外延がファジー集合である概念をファジー概念とよぶことにする。この基本的概念を組み合わせて，さらに複雑な概念が構成されるものと考える。

一般に，ファジー集合Y_1，Y_2を

$$Y_1 \equiv \{(x, f_1(x)) \mid x \in T\}\ ,\quad 0 \leqq f_1(x) \leqq 1$$
$$Y_2 \equiv \{(x, f_2(x)) \mid x \in T\}\ ,\quad 0 \leqq f_2(x) \leqq 1$$

とするとき

$$Y_1 \wedge Y_2 \equiv \{(x, f_1(x) \wedge f_2(x)) \mid x \in T\}$$
$$Y_1 \vee Y_2 \equiv \{(x, f_1(x) \vee f_2(x)) \mid x \in T\}$$
$$\bar{Y}_1 \equiv \{(x, \overline{f_1(x)}) \mid x \in T\}$$
$$Y_1 \leftarrow Y_2 \equiv \inf_{x \in T} (f_1(x) \leftarrow f_2(x))$$

と定義する。

また，関係 $Y_1 = Y_2$ および $Y_1 \geqq Y_2$ をつぎのように定める。

$$Y_1 = Y_2 \iff f_1(x) = f_2(x),\ x \in T$$
$$Y_1 \geqq Y_2 \iff f_1(x) \geqq f_2(x),\ x \in T$$

このとき，つぎの性質が成立することは明らかであろう。

〔性質1〕　$Y_3 = \{(x, f_3(x)) \mid x \in T\}$，$0 \leqq f_3(x) \leqq 1$ とするとき

(1)　$Y_1 \geqq Y_2 \Rightarrow Y_1 \leftharpoondown Y_3 \geqq Y_2 \leftharpoondown Y_3$

(2)　$Y_1 \geqq Y_2 \Rightarrow Y_3 \leftharpoondown Y_2 \geqq Y_3 \leftharpoondown Y_1$

(3)　$Y_1 \geqq Y_2 \iff \bar{Y}_2 \geqq \bar{Y}_1$

(4)　$Y_1 \geqq Y_2 \iff Y_1 \leftharpoondown Y_2 = 1$

3.2　表示関数

概念 K_1，K_2，…，K_n および演算子$\cap$，$\cup$，^{c} を用いて，以下のようにして構成される関数を表示関数とよぶ。

(1)　K_1，K_2，…，K_n は表示関数である。

(2)　e_1，e_2 を表示関数とするとき

$$e_1 \cap e_2,\ e_1 \cup e_2,\ e_1^c.$$

も表示関数である。

(3)　上記(1)(2)によって構成されるものだけが表示関数である。

表示関数は文献の記述および検索要求の構成において用いられる。

概念 K_1，K_2，…，K_n の一部または全部を用いて，上記の規則によって構成される表示関数を

$$e(K_1, K_2, \cdots, K_n;\ \cap, \cup, {}^c)$$

で表わす。この表示関数 e に対して

$$Te(K_1,\ K_2,\ \cdots,\ K_n;\ \cap,\ \cup,\ {}^c)$$
$$\equiv e(TK_1,\ TK_2,\ \cdots,\ TK_n;\ \wedge,\ \vee,\ {}^-)$$

と定義する。T は概念空間である。

たとえば

$$T(K_1 \cap K_2) = TK_1 \wedge TK_2$$
$$T(K_1 \cup K_2) = TK_1 \vee TK_2$$
$$TK_1^C = \overline{TK_1}$$
$$T(K_1 \cap (K_2 \cup K_3)^C) = TK_1 \wedge \overline{(TK_2 \vee TK_3)}$$

と定める。

3.3　文献関数

文献のもつ情報は，表示関数によって表わす。たとえば，ある文献が概念 K_1 と K_2 の両方の情報をもつときは，$K_1 \cup K_2$ で示し，また文献が概念 K_1 と K_2 の共通部分の情報をもつときは，$K_1 \cap K_2$ と表示する。さらに，K_1 以外の領域に関する情報をもつ文献は，K_1^C で表示する。

これらを組み合わせて，さらに複雑な関数を構成することができる。たとえば，ある文献を

$$(K_1 \cup K_2) \cap K_3^C$$

と表現したときは，その文献が K_3 以外の K_1 と K_2 の両方の領域の情報をもつことを示している。このように，表示関数を用いて文献の内容を表現すれば，従来のように，概念すなわちキーワードを単に並べて

$$\{K_1, K_2, K_3\}$$

のように表わすよりは，はるかに正確かつ豊富に表現できる。

文献を表示する表示関数を，とくに文献関数とよぶことにし，関数 $e(K_1, K_2, \cdots, K_n)$ のかわりに $D(K_1, K_2, \cdots, K_n)$ または D で示すことにする。

3.4　検索関数

上で定めた表示関数をもとにして，つぎの規則で構成されるものを，検索関数という。

(1)　表示関数は検索関数である。

(2)　Q_1，Q_2 を検索関数とするとき

$$Q_1 \wedge Q_2,\ Q_1 \vee Q_2,\ \bar{Q}_1$$

も検索関数である。

(3)　(1)(2)によって構成されるものだけが，検索関数である。

たとえば，つぎのものは検索関数である。

$$K_1 \cup K_2^c,\ \bar{K}_1 \wedge (K_2 \cup K_3)$$

しかし，つぎのものは検索関数ではない。

$$K_1 \cap \bar{K}_2,\ (K_1 \vee K_2) \cap K_3$$

検索関数は具体的には，つぎのようにして構成する。行列論の定理の検索を，例にとって説明する。K_1，K_2，K_3 をそれぞれ

$$K_1 \equiv \{\text{エルミット行列}\}$$
$$K_2 \equiv \{\text{べき等行列}\}$$
$$K_3 \equiv \{\text{正則行列}\}$$

とするとき，検索関数 $K_1 \wedge K_2$ は，K_1 と K_2 の両方に関連する文献を検索する場合の関数であって，今の例ではエルミット行列とべき等行列の両方に関連の大きい定理をとり出すことになる。これに対して，$K_1 \vee K_2$ は K_1 または K_2 の少なくとも一方に関連の大きい文献をとり出す場合の関数である。また，$\bar{K}_1$ は K_1 と関連の小さい文献をとり出す場合の検索関数である。

また，$K_1 \cap K_2$ は概念空間における K_1 と K_2 の積集合で与えられる合成概念に関連の大きい文献を検索する場合の関数であって，K_1がエルミット行列，K_2 がべき等行列であるから，$K_1 \cap K_2$ はべき等エルミット行列すなわち射影行列である。これに対して，$K_1 \cup K_2$ は K_1 と K_2 の和集合で与えられる合成概念に関連の大きい文献を検索する場合の関数である。また K_3^c は，K_3 が正則行列であるから，全体集合 T を複素正方行列とするとき，特異行列である。

以上のように，$\wedge$，$\vee$，$^{-}$ で与えられる論理演算と，$\cap$，$\cup$，^{c} で与えられる概念算とを区別する。したがって，$K_1 \wedge K_2$ と $K_1 \cap K_2$，$K_1 \vee K_2$ と $K_1 \cup K_2$，$\bar{K}_3$ と K_3^c とは，それぞれ全く別のことを意味している。このう

ち，$K_1 \wedge K_2$ と $K_1 \cup K_2$ が以下で述べるモデルでは等しくなる。しかし，$K_1 \cap K_2$ と $K_1 \vee K_2$ とは一般に等しくならず，一定の不等号の関係が成立する。これらの事実は 4.4 において示される。

論理演算と概念算を区別する点は，ここで採用するモデルの特色の1つである。これにより，検索関数の解釈における混乱は，とりのぞかれ，検索関数の表現も豊富になる。また，概念算の採用は新しい概念の合成の上からも都合がよい。たとえば，先の例で，K_1 をエルミット行列，K_2 をべき等行列，K_4 を射影行列とするとき，検索の要求者にとって，K_4 が未知の概念であり，K_1，K_2 が既知の概念であるときは，K_4 のかわりに K_1 と K_2 を用いて，検索関数を $K_1 \cap K_2$ とすることにより，実質的に K_4 と関連する文献を検索できる。いいかえれば，射影行列なるキーワードを知らなくても，エルミット行列とべき等行列を知っていれば十分であるということになる。このように，概念の合成は検索の前の段階においても重要である。

なお，概念空間を設定することの利点の1つは，概念間の包含関係が検索の過程において考慮されることである。たとえば，行列論においてユニタリ行列に関するある数値計算法を検索しようとしているとき，これに関するものがなくて，正規行列に関するものがあった場合，正規行列はユニタリ行列の上位概念であるから，一般には，この正規行列に関する数値計算法で間に合わせることができるであろう。したがって，検索の過程において概念間の包含関係がわかれば，都合がよいことになる。とくに，定理の検索の場合には，この点はさらに明確であって，正規行列に関して成立する定理はユニタリ行列に関しても成立することから，概念間の包含関係を考慮することは，検索において必須の処理となる。

3.5　文献と検索要求との関連

蓄積されている文献と検索要求との関連の度合を測る尺度としては，いくつかのものが考えられ，その採用する尺度に応じて，それぞれのモデルが構成されるであろう。ここでは，つぎのように定義する。文献関数 D と表示関数 e との関連 $[D,\ T]e$ を，前に定義したファジー集合間の含意 $\leftarrow$ を用いて

$$[D,\ T]e \equiv TD \leftharpoondown Te$$

で定める。また文献関数Dと検索関数 $Q(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_k)$ との関連$[D,\ T]Q$を

$$[D,\ T]Q(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_k)$$
$$\equiv Q([D,\ T]e_1,\ [D,\ T]e_2,\ \cdots,\ [D,\ T]e_k)$$

で定める。たとえば

$$[D,\ T](e_1 \wedge e_2) = [D,\ T]e_1 \wedge [D,\ T]e_2$$
$$[D,\ T](e_1 \vee e_2) = [D,\ T]e_1 \vee [D,\ T]e_2$$
$$[D,\ T]\bar{e}_1 = \overline{[D,\ T]e_1}$$
$$[D,\ T](\bar{K}_1 \wedge (K_2 \cap K_3^C))$$
$$= \overline{[D,\ T]K_1} \wedge [D,\ T](K_2 \cap K_3^C)$$
$$= \overline{TD \leftharpoondown TK_1} \wedge (TD \leftharpoondown (TK_2 \wedge \overline{TK_3}))$$

と定める。

上の定義において，TD，Teはファジー集合であるが，文献と表示関数との関連$[D,\ T]e$および文献と検索関数との関連$[D,\ T]Q$は，演算の定義によって，それぞれ0と1の間の数値をとる。この値が1に近いほど，関連が大きいと考える。

4．モデルの性質

前節において構成したモデル$[D,\ T]Q$に関し，成立する基本的性質を列挙する。以下において，概念空間をTで，文献をDで，表示関数をeで，検索関数をQで示す。

4.1　表示関数について

〔性質2〕

(1)　(a)　$T(e_1 \cap e_2) = T(e_2 \cap e_1)$

　　(b)　$T(e_1 \cup e_2) = T(e_2 \cup e_1)$

(2) (a) $T(e_1 \cap (e_2 \cap e_3)) = T((e_1 \cap e_2) \cap e_3)$

(b) $T(e_1 \cup (e_2 \cup e_3)) = T((e_1 \cup e_2) \cup e_3)$

(3) (a) $T(e_1 \cap (e_2 \cup e_3)) = T((e_1 \cap e_2) \cup (e_1 \cap e_3))$

(b) $T(e_1 \cup (e_2 \cap e_3)) = T((e_1 \cup e_2) \cap (e_1 \cup e_3))$

(4) (a) $T(e_1 \cap (e_1 \cup e_2)) = Te_1$

(b) $T(e_1 \cup (e_1 \cap e_2)) = Te_1$

(5) (a) $T(e_1 \cap e_1) = Te_1$

(b) $T(e_1 \cup e_1) = Te_1$

(6) (a) $T(e_1 \cap e_2)^c = T(e_1^c \cup e_2^c)$

(b) $T(e_1 \cup e_2)^c = T(e_1^c \cap e_2^c)$

(7) $T(e_1^c)^c = Te_1$

(8) (a) $\{(x, 0.5) | x \in T\} \geqq T(e_1 \cap e_1^c)$

$$\geqq \{(x, 0) | x \in T\}$$

(b) $\{(x, 1) | x \in T\} \geqq T(e_1 \cup e_1^c)$

$$\geqq \{(x, 0.5) | x \in T\}$$

(証明)

(1) (a) $T(e_1 \cap e_2) = T(e_1(K_1, K_2, \cdots, K_n ; \cap, \cup, ^c)$

$$\cap\, e_2(K_1, K_2, \cdots, K_n ; \cap, \cup, ^c))$$

$$= e_1(TK_1, TK_2, \cdots, TK_n ; \wedge, \vee, \bar{\ })$$

$$\wedge\, e_2(TK_1, TK_2, \cdots, TK_n ; \wedge, \vee, \bar{\ })$$

$$= Te_1(K_1, K_2, \cdots ; \cap, \cup, ^c)$$

$$\wedge\, Te_2(K_1, K_2, \cdots ; \cap, \cup, ^c)$$

$$= Te_1 \wedge Te_2$$

$$Te_1 = \{(x, f_1(x)) | x \in T\},\quad 0 \leqq f_1(x) \leqq 1$$

$$Te_2 = \{(x, f_2(x)) | x \in T\},\quad 0 \leqq f_2(x) \leqq 1$$

とおく。

$$Te_1 \wedge Te_2 = \{(x, f_1(x) \wedge f_2(x)) | x \in T\}$$

$$Te_2 \wedge Te_1 = \{(x, f_2(x) \wedge f_1(x)) | x \in T\}$$

$$= \{(x, f_1(x) \wedge f_2(x)) | x \in T\}$$

$$\therefore \quad T(e_1 \cap e_2) = T(e_2 \cap e_1)$$

(b)　同様にして

$$T(e_1 \cup e_2) = T(e_2 \cup e_1)$$

(2) — (5)　省略

(6)　(a)　$T(e_1 \cap e_2)^{C} = \overline{Te_1 \wedge Te_2}$

ここで

$$Te_1 = \{(x,\ f_1(x)) | x \in T\},\quad 0 \leqq f_1(x) \leqq 1$$

$$Te_2 = \{(x,\ f_2(x)) | x \in T\},\quad 0 \leqq f_2(x) \leqq 1$$

とおく。

$$Te_1 \wedge Te_2 = \{(x,\ f_1(x) \wedge f_2(x)) | x \in T\}$$

$$\begin{aligned}\overline{Te_1 \wedge Te_2} &= \{(x,\ \overline{f_1(x) \wedge f_2(x)}) | x \in T\} \\ &= \{(x,\ \overline{f_1(x)}) | x \in T\} \vee \{(x,\ \overline{f_2(x)}) | x \in T\} \\ &= \overline{Te_1} \vee \overline{Te_2} \\ &= T(e_1^{C} \cup e_2^{C})\end{aligned}$$

(b)　$T(e_1 \cup e_2)^{C} = \overline{Te_1 \vee Te_2}$

$$\begin{aligned}&= \{(x,\ \overline{f_1(x) \vee f_2(x)}) | x \in T\} \\ &= \{(x,\ \overline{f_1(x)}) | x \in T\} \wedge \{(x,\ \overline{f_2(x)}) | x \in T\} \\ &= \overline{Te_1} \wedge \overline{Te_2} \\ &= T(e_1^{C} \cap e_2^{C})\end{aligned}$$

(7) — (8)　省略

〔性質3〕

(1)　$Te_1 \geqq Te_2 \iff T(e_1 \cap e_2) = Te_2$

(2)　$Te_1 \geqq Te_2 \iff T(e_1 \cup e_2) = Te_1$

(3)　$Te_1 \geqq Te_2 \iff Te_2^{C} \geqq Te_1^{C}$

(4)　$T(e_1 \cup e_2) \geqq Te_1 \geqq T(e_1 \cap e_2)$

(5)　$Te_1 \geqq Te_2,\ Te_3 \geqq Te_4 \Longrightarrow$

(a)　$T(e_1 \cap e_3) \geqq T(e_2 \cap e_4)$

(b)　$T(e_1 \cup e_3) \geqq T(e_2 \cup e_4)$

(証明)

$Te_i = \{(x,\ f_i(x)) | x \in T\}$,　$0 \leqq f_i(x) \leqq 1$

$(i = 1, 2, 3, 4)$

とおく。

(1)　$Te_1 \geqq Te_2$のとき

$$T(e_1 \cap e_2) = Te_1 \wedge Te_2$$
$$= \{(x,\ f_1(x) \wedge f_2(x)) | x \in T\}$$

$f_1(x) \geqq f_2(x)$ によって

$$f_1(x) \wedge f_2(x) = f_2(x)$$
$$\{(x,\ f_1(x) \wedge f_2(x)) | x \in T\} = \{(x, f_2(x)) | x \in T\}$$
$$= Te_2$$
$$\therefore\quad T(e_1 \cap e_2) = Te_2$$

逆に $T(e_1 \cap e_2) = Te_2$ のとき

$$T(e_1 \cap e_2) = \{(x,\ f_1(x) \wedge f_2(x)) | x \in T\}$$
$$Te_2 = \{(x,\ f_2(x)) | x \in T\}$$

$T(e_1 \cap e_2) = Te_2$ であるから

$$f_1(x) \wedge f_2(x) = f_2(x)$$

ここで，ある $x \in T$ に対して $f_1(x) < f_2(x)$ と仮定すれば，その x に対して

$$f_1(x) \wedge f_2(x) = f_1(x)$$

これは矛盾する。したがって，すべての x に対して

$$f_1(x) \geqq f_2(x)$$
$$\therefore\quad Te_1 \geqq Te_2$$

(2)　省略

(3)　性質1(3)参照。

(4)　$T(e_1 \cup e_2) = Te_1 \vee Te_2$

$$= \{(x,\ f_1(x) \vee f_2(x)) | x \in T\}$$

$$Te_1 = \{(x,\ f_1(x)) | x \in T\}$$

$$T(e_1 \cap e_2) = \{(x,\ f_1(x) \wedge f_2(x)) | x \in T\}$$

$$f_1(x) \vee f_2(x) \geqq f_1(x) \geqq f_1(x) \wedge f_2(x)$$

$$\therefore\quad T(e_1 \cup e_2) \geqq Te_1 \geqq T(e_1 \cap e_2)$$

(5)　省略

4.2　文献関数について

〔性質4〕

(1)　$TD_1 = TD_2 \Longrightarrow [D_1,\ T]Q = [D_2,\ T]Q$

(2)　$TD_1 \geqq TD_2 \Longrightarrow [D_1,\ T]e \geqq [D_2,\ T]e$

(3)　$TD_1 \geqq TD_2 \Longrightarrow [D_1,\ T]e^{c} \geqq [D_2,\ T]e^{c}$

(4)　$TD_1 \geqq TD_2 \Longrightarrow [D_1,\ T]\bar{e} \leqq [D_2,\ T]\bar{e}$

(証明)

(1)　$Q = Q(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_k)$ とおく。

$$\begin{aligned}[D_1,\ T]Q &= [D_1,\ T]Q(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_k)\\ &= Q([D_1,\ T]e_1,\ [D_1,\ T]e_2,\ \cdots,\ [D_1,\ T]e_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[D_1,\ T]e_i &= TD_1 \leftharpoondown Te_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)\\ &= TD_2 \leftharpoondown Te_i\\ &= [D_2,\ T]e_i\end{aligned}$$

$$\therefore\quad [D_1,\ T]Q = [D_2,\ T]Q$$

(2)　$[D_1,\ T]e = TD_1 \leftharpoondown Te$

$[D_2,\ T]e = TD_2 \leftharpoondown Te$

$TD_1 \geqq TD_2$ のとき

$TD_1 \leftharpoondown Te \geqq TD_2 \leftharpoondown Te$　〔性質1(1)〕

$\therefore\quad [D_1,\ T]e \geqq [D_2,\ T]e$

(3)　これは(2)の場合に含まれる。

(4)　$[D_1,\ T]\bar{e} = \overline{[D_1,\ T]}e = 1 - [D_1,\ T]e$

$[D_2,\ T]\bar{e} = \overline{[D_2,\ T]}e = 1 - [D_2,\ T]e$

$TD_1 \geqq TD_2$ のとき $[D_1,\ T]e \geqq [D_2,\ T]e$

$$\therefore\ [D_1, T]\bar{e} \leqq [D_2, T]\bar{e}$$

〔性質 5〕

(1) $TD_1 \geqq TD_2 \Longrightarrow [D_1 \cap D_2, T]e = [D_2, T]e$

(2) $TD_1 \geqq TD_2 \Longrightarrow [D_1 \cup D_2, T]e = [D_1, T]e$

(3) $TD_1 \geqq TD_2 \Longrightarrow [D_1^c, T]e \leqq [D_2^c, T]e$

(4) $[D_1 \cap D_2, T]e \leqq [D_1, T]e \leqq [D_1 \cup D_2, T]e$

(5) $TD_1 \geqq TD_2\ ,\quad TD_3 \geqq TD_4 \Longrightarrow$

(a) $[D_1 \cap D_3,\ T]e \geqq [D_2 \cap D_4,\ T]e$

(b) $[D_1 \cup D_3,\ T]e \geqq [D_2 \cup D_4,\ T]e$

(証明)

(1) 省略

(2) $TD_1 \vee TD_2 = TD_1$

$$\begin{aligned}[D_1 \cup D_2,\ T]e &= T(D_1 \cup D_2) \leftharpoondown Te\\ &= (TD_1 \vee TD_2) \leftharpoondown Te\\ &= TD_1 \leftharpoondown Te\\ &= [D_1,\ T]e\end{aligned}$$

(注) $[D_1 \cup D_2,\ T]e = [D_1,\ T]e$ のとき

$$(TD_1 \vee TD_2) \leftharpoondown Te = TD_1 \leftharpoondown Te$$

ここで $Te = \{(x, 0) | x \in T\}$ とすれば

$$(TD_1 \vee TD_2) \leftharpoondown Te = 1$$

$$TD_1 \leftharpoondown Te = 1$$

となる。また

$$TD_1 = \{(x, 0) | x \in T\}$$

$$TD_2 = \{(x, 1) | x \in T\}$$

とすれば, $TD_1 \geqq TD_2$ とはならない。したがって, 逆は必ずしも真ではない。

(3) $TD_1 \geqq TD_2$ のとき, 性質 1 (3)によって

$$TD_1^c \leqq TD_2^c$$

したがって性質1(1)によって

$$TD_1^c \leftharpoondown Te \leqq TD_2^c \leftharpoondown Te$$

$$[D_1^c,\ T]e \leqq [D_2^c,\ T]e$$

(4)　$[D_1 \cap D_2,\ T]e = T(D_1 \cap D_2) \leftharpoondown Te$

$$= (TD_1 \wedge TD_2) \leftharpoondown Te$$

$$= (TD_1 \leftharpoondown Te) \wedge (TD_2 \leftharpoondown Te)$$

〔付録(3)(d)〕

$$[D_1,\ T]e = TD_1 \leftharpoondown Te$$

$$(TD_1 \leftharpoondown Te) \wedge (TD_2 \leftharpoondown Te) \leqq TD_1 \leftharpoondown Te$$

$$\therefore\ [D_1 \cap D_2,\ T]e \leqq [D_1,\ T]e$$

$$[D_1 \cup D_2,\ T]e = T(D_1 \cup D_2) \leftharpoondown Te$$

$$= (TD_1 \vee TD_2) \leftharpoondown Te$$

$$\geqq (TD_1 \leftharpoondown Te) \vee (TD_2 \leftharpoondown Te)$$

〔付録(3)(e)〕

$$(TD_1 \leftharpoondown Te) \vee (TD_2 \leftharpoondown Te) \geqq TD_1 \leftharpoondown Te$$

$$\therefore\ [D_1 \cup D_2,\ T]e \geqq [D_1,\ T]e$$

(5)　(a)　$[D_1 \cap D_3,\ T]e = T(D_1 \cap D_3) \leftharpoondown Te$

$$= (TD_1 \wedge TD_3) \leftharpoondown Te$$

$$= (TD_1 \leftharpoondown Te) \wedge (TD_3 \leftharpoondown Te)$$

〔付録(3)(d)〕

$$= [D_1,\ T]e \wedge [D_3,\ T]e$$

$TD_1 \geqq TD_2,\ TD_3 \geqq TD_4$ によって

$$[D_1,\ T]e \geqq [D_2,\ T]e,\ [D_3,\ T]e \geqq [D_4,\ T]e$$

$$[D_1,\ T]e \wedge [D_3,\ T]e \geqq [D_2,\ T]e \wedge [D_4,\ T]e$$

ところで

$$[D_2 \cap D_4,\ T]e = T(D_2 \cap D_4) \leftharpoondown Te$$

$$= (TD_2 \wedge TD_4) \leftharpoondown Te$$

$$= (TD_2 \leftarrow Te) \wedge (TD_4 \leftarrow Te)$$

〔付録(3) (d)〕

$$= [D_2,\ T]e \wedge [D_4,\ T]e$$

$$\therefore\ [D_1 \cap D_3,\ T]e \geqq [D_2 \cap D_4,\ T]e$$

(b)　省略

〔性質 6〕

(1)　$TD \geqq Te \Longleftrightarrow [D,\ T]e = 1$

(2)　$TD = Te \Longleftrightarrow [D,\ T]e = [e,\ T]D = 1$

(3)　$[D,\ T]e = [e^{c},\ T]D^{c}$

(証明)

(1)　$[D,\ T]e = TD \leftarrow Te$

$TD \geqq Te \Longleftrightarrow TD \leftarrow Te = 1$　〔性質 1(4)〕

$\therefore\ TD \geqq Te \Longleftrightarrow [D,\ T]e = 1$

(2)　(1)によって

$TD \geqq Te \Longleftrightarrow [D,\ T]e = 1$

$Te \geqq TD \Longleftrightarrow [e,\ T]D = 1$

$\therefore\ TD = Te \Longleftrightarrow [D,\ T]e = [e,\ T]D = 1$

(3)　$[D,\ T]e = TD \leftarrow Te$

$$[e^{c},\ T]D^{c} = Te^{c} \leftarrow TD^{c}$$

$$= \overline{Te} \leftarrow \overline{TD}$$

付録(3)(c)によって

$TD \leftarrow Te = \overline{Te} \leftarrow \overline{TD}$

$\therefore\ [D,\ T]e = [e^{c},\ T]D^{c}$

〔性質 7〕

(1)　$[D \cap e_1,\ T](e_1 \cap e_2) = [D,\ T](e_1 \cap e_2)$

(2)　$[D \cap e_1,\ T](D \cap e_2) = [e_1,\ T](D \cap e_2)$

(3)　$[D \cup e_1,\ T](e_1 \cup e_2) = [D \cup e_1,\ T]e_2$

(4)　$[D \cup e_1,\ T](D \cup e_2) = [D \cup e_1,\ T]e_2$

（証明）

(1)　$[D \cap e_1,\ T](e_1 \cap e_2)$

$= T(D \cap e_1) \leftharpoonup T(e_1 \cap e_2)$

$= (TD \wedge Te_1) \leftharpoonup (Te_1 \wedge Te_2)$

$= (TD \leftharpoonup (Te_1 \wedge Te_2)) \wedge (Te_1 \leftharpoonup (Te_1 \wedge Te_2))$

〔付録(3)(d)〕

$= TD \leftharpoonup (Te_1 \wedge Te_2)$

$= TD \leftharpoonup T(e_1 \cap e_2)$

$= [D,\ T](e_1 \cap e_2)$

(2)　(1)においてDと e_1をとりかえればよい。

(3) — (4)　省略

4.3　検索関数について

〔性質 8〕

(1)　$Te_1 = Te_2 \Longrightarrow [D,\ T]e_1 = [D,\ T]e_2$

(2)　$Te_1 \geqq Te_2 \Longrightarrow [D,\ T]e_1 \leqq [D,\ T]e_2$

(3)　$Te_1 \geqq Te_2 \Longrightarrow [D,\ T]e_1^c \geqq [D,\ T]e_2^c$

(4)　$Te_1 \geqq Te_2 \Longrightarrow [D,\ T]\bar{e}_1 \geqq [D,\ T]\bar{e}_2$

（証明）

$[D,\ T]e_1 = TD \leftharpoonup Te_1$

$[D,\ T]e_2 = TD \leftharpoonup Te_2$

(1)　$Te_1 = Te_2 \Longrightarrow TD \leftharpoonup Te_1 = TD \leftharpoonup Te_2$

$\therefore\ [D,\ T]e_1 = [D,\ T]e_2$

(2)　$Te_1 \geqq Te_2 \Longrightarrow TD \leftharpoonup Te_1 \leqq TD \leftharpoonup Te_2$

〔性質 1(2)〕

$\therefore\ [D,\ T]e_1 \leqq [D,\ T]e_2$

(3)　$Te_1^c = \overline{Te_1}$, $Te_2^c = \overline{Te_2}$ したがって $Te_1 \geqq Te_2$ のとき $Te_1^c \leqq Te_2^c$。(2)によって

$[D,\ T]e_1^c \geqq [D,\ T]e_2^c$

(4) $[D, T]\bar{e}_1 = \overline{[D, T]e_1} = 1-[D, T]e_1$

$[D, T]\bar{e}_2 = \overline{[D, T]e_2} = 1-[D, T]e_2$

$[D, T]e_1 \leqq [D, T]e_2$ であるから

$$[D, T]\bar{e}_1 \geqq [D, T]\bar{e}_2$$

次にかかげる性質はファジー論理の性質とほとんど同一であって自明のものばかりである。

〔性質 9〕

(1) (a) $[D, T](Q_1 \wedge Q_2) = [D, T](Q_2 \wedge Q_1)$

(b) $[D, T](Q_1 \vee Q_2) = [D, T](Q_2 \vee Q_1)$

(2) (a) $[D, T](Q_1 \wedge (Q_2 \wedge Q_3)) = [D, T]((Q_1 \wedge Q_2) \wedge Q_3)$

(b) $[D, T](Q_1 \vee (Q_2 \vee Q_3)) = [D, T]((Q_1 \vee Q_2) \vee Q_3)$

(3) (a) $[D, T](Q_1 \wedge (Q_2 \vee Q_3)) = [D, T]((Q_1 \wedge Q_2) \vee (Q_1 \wedge Q_3))$

(b) $[D, T](Q_1 \vee (Q_2 \wedge Q_3)) = [D, T]((Q_1 \vee Q_2) \wedge (Q_1 \vee Q_3))$

(4) (a) $[D, T](Q_1 \wedge (Q_1 \vee Q_2)) = [D, T]Q_1$

(b) $[D, T](Q_1 \vee (Q_1 \wedge Q_2)) = [D, T]Q_1$

(5) (a) $[D, T](Q_1 \wedge Q_1) = [D, T]Q_1$

(b) $[D, T](Q_1 \vee Q_1) = [D, T]Q_1$

(6) (a) $[D, T](\overline{Q_1 \wedge Q_2}) = [D, T](\bar{Q}_1 \vee \bar{Q}_2)$

(b) $[D, T](\overline{Q_1 \vee Q_2}) = [D, T](\bar{Q}_1 \wedge \bar{Q}_2)$

(7) $[D, T]\bar{\bar{Q}}_1 = [D, T]Q_1$

(8) (a) $0.5 \geqq [D, T](Q_1 \wedge \bar{Q}_1) \geqq 0$

(b) $1 \geqq [D, T](Q_1 \vee \bar{Q}_1) \geqq 0.5$

(証明)

$$Q_1 = Q_1(e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1k(1)})$$

$$Q_2 = Q_2(e_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2k(2)})$$

とおく。

(1) (a) $[D, T](Q_1 \wedge Q_2)$

$$= Q_1([D,\ T]e_{11},\ [D,\ T]e_{12},\ \cdots,\ [D,\ T]e_{1k(1)})$$
$$\wedge\ Q_2([D,\ T]e_{21},\ [D,\ T]e_{22},\ \cdots,\ [D,\ T]e_{2k(2)})$$
$$= [D,\ T]Q_1 \wedge [D,\ T]Q_2$$
$$[D,\ T](Q_2 \wedge Q_1)$$
$$= [D,\ T]Q_2 \wedge [D,\ T]Q_1$$
$$= [D,\ T]Q_1 \wedge [D,\ T]Q_2$$
$$= [D,\ T](Q_1 \wedge Q_2)$$

(b)　同様にして

$$[D,\ T](Q_1 \vee Q_2) = [D,\ T](Q_2 \vee Q_1)$$

(2) — (8)　省略

〔性質10〕

(1)　$[D,\ T]Q_1 \geqq [D,\ T]Q_2 \iff [D,\ T](Q_1 \wedge Q_2) = [D,\ T]Q_2$

(2)　$[D,\ T]Q_1 \geqq [D,\ T]Q_2 \iff [D,\ T](Q_1 \vee Q_2) = [D,\ T]Q_1$

(3)　$[D,\ T]Q_1 \geqq [D,\ T]Q_2 \iff [D,\ T]\bar{Q}_1 \leqq [D,\ T]\bar{Q}_2$

(4)　$[D,\ T](Q_1 \wedge Q_2) \leqq [D,\ T]Q_1 \leqq [D,\ T](Q_1 \vee Q_2)$

(5)　$[D,\ T]Q_1 \geqq [D,\ T]Q_2,\ [D,\ T]Q_3 \geqq [D,\ T]Q_4 \Longrightarrow$

(a)　$[D,\ T](Q_1 \wedge Q_3) \geqq [D,\ T](Q_2 \wedge Q_4)$

(b)　$[D,\ T](Q_1 \vee Q_3) \geqq [D,\ T](Q_2 \vee Q_4)$

(証明)

(1)　もし $[D,\ T]Q_1 \geqq [D,\ T]Q_2$ ならば

$$[D,\ T](Q_1 \wedge Q_2) = [D,\ T]Q_1 \wedge [D,\ T]Q_2$$
$$= [D,\ T]Q_2$$

逆にもし $[D,\ T](Q_1 \wedge Q_2) = [D,\ T]Q_2$ ならば

$$[D,\ T]Q_1 \wedge [D,\ T]Q_2 = [D,\ T]Q_2$$

ここで $[D,\ T]Q_1 < [D,\ T]Q_2$ と仮定すれば

$$[D,\ T]Q_1 \wedge [D,\ T]Q_2 = [D,\ T]Q_1$$

これは矛盾する。したがって

$$[D, T]Q_1 \geqq [D, T]Q_2$$

(2)　省略

(3)　もし$[D, T]Q_1 \geqq [D, T]Q_2$ ならば

$$[D, T]\bar{Q}_1 = \overline{[D, T]Q_1} = 1-[D, T]Q_1$$

$$[D, T]\bar{Q}_2 = \overline{[D, T]Q_2} = 1-[D, T]Q_2$$

したがって

$$[D, T]\bar{Q}_1 \leqq [D, T]\bar{Q}_2$$

逆にもし$[D, T]\bar{Q}_1 \leqq [D, T]\bar{Q}_2$ ならば

$$1-[D, T]Q_1 \leqq 1-[D, T]Q_2$$

したがって

$$[D, T]Q_1 \geqq [D, T]Q_2$$

(4) — (5)　省略

4.4　概念算と論理演算の関係

すでに述べたように，本論文のモデルでは概念算と論理演算とを区別する。以下に検索関数の構成における概念算と論理演算の相違および両者の間に成立する関係を述べる。

〔性質11〕

(1)　(a)　$[D, T](e_1 \cap e_2) \geqq [D, T](e_1 \vee e_2)$

　　(b)　$[D, T](e_1 \cap e_2 \cap e_3) \geqq [D, T](e_1 \vee e_2 \vee e_3)$

(2)　(a)　$[D, T](e_1 \cup e_2) = [D, T](e_1 \wedge e_2)$

　　(b)　$[D, T](e_1 \cup e_2 \cup e_3) = [D, T](e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$

(証明)

(1)　(a)　
$$\begin{aligned}[D, T](e_1 \cap e_2) &= TD \leftharpoondown T(e_1 \cap e_2) \\ &= TD \leftharpoondown (Te_1 \wedge Te_2) \\ &\geqq (TD \leftharpoondown Te_1) \vee (TD \leftharpoondown Te_2) \\ &\qquad \text{〔付録(3)(a)〕} \\ &= [D, T]e_1 \vee [D, T]e_2\end{aligned}$$

$$= [D,\ T](e_1 \vee e_2)$$

(b) $$[D,\ T](e_1 \cap e_2 \cap e_3) = [D,\ T]((e_1 \cap e_2) \cap e_3)$$
$$\geqq [D,\ T]((e_1 \cap e_2) \vee e_3)$$
$$= [D,\ T](e_1 \cap e_2) \vee [D,\ T]e_3$$
$$\geqq [D,\ T](e_1 \vee e_2) \vee [D,\ T]e_3$$
$$= [D,\ T](e_1 \vee e_2 \vee e_3)$$

(2) (a) $$[D,\ T](e_1 \cup e_2) = TD \leftharpoondown T(e_1 \cup e_2)$$
$$= TD \leftharpoondown (Te_1 \vee Te_2)$$
$$= (TD \leftharpoondown Te_1) \wedge (TD \leftharpoondown Te_2)$$
$$= [D,\ T]e_1 \wedge [D,\ T]e_2$$
$$= [D,\ T](e_1 \wedge e_2)$$

(b) $$[D,\ T](e_1 \cup e_2 \cup e_3) = [D,\ T]((e_1 \cup e_2) \cup e_3)$$
$$= [D,\ T](e_1 \cup e_2) \wedge [D,\ T]e_3$$
$$= [D,\ T](e_1 \wedge e_2) \wedge [D,\ T]e_3$$
$$= [D,\ T](e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$$

〔性質12〕

(1) (a) $[D_1 \cap D_2,\ T]e = [D_1,\ T]e \wedge [D_2,\ T]e$

(b) $[D_1 \cap D_2 \cap D_3,\ T]e = [D_1,\ T]e \wedge [D_2,\ T]e \wedge [D_3,\ T]e$

(2) (a) $[D_1 \cup D_2,\ T]e \geqq [D_1,\ T]e \vee [D_2,\ T]e$

(b) $[D_1 \cup D_2 \cup D_3,\ T]e \geqq [D_1,\ T]e \vee [D_2,\ T]e \vee [D_3,\ T]e$

(証明)

(1) (a) $$[D_1 \cap D_2,\ T]e = T(D_1 \cap D_2) \leftharpoondown Te$$
$$= (TD_1 \wedge TD_2) \leftharpoondown Te$$
$$= (TD_1 \leftharpoondown Te) \wedge (TD_2 \leftharpoondown Te)$$

〔付録(3)(d)〕

$$= [D_1,\ T]e \wedge [D_2,\ T]e$$

(注) 性質6(3)および性質11(2)によって

$$[D,\ T]e = [e^c,\ T]D^c$$

$$[D,\ T](e_1 \cup e_2) = [D,\ T](e_1 \wedge e_2)$$
$$[D,\ T](e_1 \wedge e_2) = [D,\ T]e_1 \wedge [D,\ T]e_2$$
$$[D,\ T]e_1 = [e_1^c,\ T]D^c$$
$$[D,\ T]e_2 = [e_2^c,\ T]D^c$$
$$\begin{aligned}[D,\ T](e_1 \cup e_2) &= [(e_1 \cup e_2)^c,\ T]D^c \\ &= [e_1^c \cap e_2^c,\ T]D^c\end{aligned}$$

したがって

$$[e_1^c \cap e_2^c,\ T]D^c = [e_1^c,\ T]D^c \wedge [e_2^c,\ T]D^c$$

ここで，e_1^c，e_2^c，D^c を D_1，D_2，e とおきかえれば

$$[D_1 \cap D_2,\ T]e = [D_1,\ T]e \wedge [D_2,\ T]e$$

(b) $$\begin{aligned}[D_1 \cap D_2 \cap D_3,\ T]e &= [D_1 \cap D_2,\ T]e \wedge [D_3,\ T]e \\ &= [D_1,\ T]e \wedge [D_2,\ T]e \wedge [D_3,\ T]e\end{aligned}$$

(2) (a) $$\begin{aligned}[D_1 \cup D_2,\ T]e &= T(D_1 \cup D_2) \leftharpoondown Te \\ &= (TD_1 \vee TD_2) \leftharpoondown Te \\ &\geqq (TD_1 \leftharpoondown Te) \vee (TD_2 \leftharpoondown Te)\end{aligned}$$

〔付録(3)(e)〕

$$= [D_1,\ T]e \vee [D_2,\ T]e$$

(b) $$\begin{aligned}[D_1 \cup D_2 \cup D_3,\ T]e &\geqq [D_1 \cup D_2,\ T]e \vee [D_3,\ T]e \\ &\geqq [D_1,\ T]e \vee [D_2,\ T]e \vee [D_3,\ T]e\end{aligned}$$

5．むすび

ファジー概念空間における情報検索のモデルを構成し，その性質を調べ，若干の結果を得た。このモデルでは，通常の確定的な概念だけでなく，ファジー概念の処理も可能であるので，さらに高度の情報検索システムの実現の基礎として有用であろう。そのモデルから得られる結果の多くは，従来の2値的な場合の自然な拡張となっており，また人間の直観と大体合致しており都合がよい。

このモデルをもとにして，検索システムを構成するには，まだ数多くの議論すべき点がある。たとえば，実用上の観点からは，ファジー概念空間の分割または量子化が必要となるであろう。この量子化によって，ファジー概念空間のベクトルまたは行列表示が可能となる。量子化のアルゴリズムについては，今後の問題としたい。また，量子化の問題と関係して，ファジー概念のメンバーシップ関数の決定の問題がある。さらに，2つのファジー概念間のマッチングの度合として，今はファジー論理での含意を基礎にして測っているが，当然他の尺度の採用も考えられる。これらの点については，今後さらに考察すべきである。

文　献

1) G. Salton : *"Automatic Information Organization and Retrieval,"* McGraw-Hill(1968).
2) 橋本，福村："二項関係による概念の分割"，信学会オートマトンと言語研究会資料 AL 72-135 (1973).
3) L. A. Zadeh : : "Fuzzy Sets", *Information and Control,* Vol. 8, 338-353 (1965).
4) 水本，豊田，田中："Fuzzy 代数"，数理解析研究所講究録，No. 81 (1970).
5) C. V. Negoita : "On the Search Strategies in Automatic Information Systems", *Proc. Congr. Intern. Cybernetique 6th Namur,* 495-503 (1971).
6) 橋本，福村，阿部："キーフレーズ間の関連を考慮した情報検索の一手法"，信学会オートマトン研究会資料A 71-110 (1972).

付　録

(1) x_1，x_2，$x_3 \in [0, 1]$ に対して

(a) $x_1 \leftarrow (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \leftarrow x_2) \vee (x_1 \leftarrow x_3)$

(b) $x_1 \leftarrow (x_2 \vee x_3) = (x_1 \leftarrow x_2) \wedge (x_1 \leftarrow x_3)$

(c) $x_1 \leftarrow x_2 = \bar{x}_2 \leftarrow \bar{x}_1$

(d) $(x_1 \wedge x_2) \leftarrow x_3 = (x_1 \leftarrow x_3) \wedge (x_2 \leftarrow x_3)$

(e) $(x_1 \vee x_2) \leftarrow x_3 = (x_1 \leftarrow x_3) \vee (x_2 \leftarrow x_3)$

(2) $0 \leqq f_1(x) \leqq 1$，$0 \leqq f_2(x) \leqq 1$ に対して

(a) $\inf_{x \in T} (f_1(x) \wedge f_2(x)) = \inf_{x \in T} f_1(x) \wedge \inf_{x \in T} f_2(x)$

(b) $\inf_{x \in T} (f_1(x) \vee f_2(x)) \geqq \inf_{x \in T} f_1(x) \vee \inf_{x \in T} f_2(x)$

(3) Y_1，Y_2，Y_3 をファジー集合とするとき

(a) $Y_1 \leftarrow (Y_2 \wedge Y_3) \geqq (Y_1 \leftarrow Y_2) \vee (Y_1 \leftarrow Y_3)$

(b) $Y_1 \leftarrow (Y_2 \vee Y_3) = (Y_1 \leftarrow Y_2) \wedge (Y_1 \leftarrow Y_3)$

(c) $Y_1 \leftarrow Y_2 = \bar{Y}_2 \leftarrow \bar{Y}_1$

(d)　$(Y_1 \wedge Y_2) \leftharpoondown Y_3 = (Y_1 \leftharpoondown Y_3) \wedge (Y_2 \leftharpoondown Y_3)$

(e)　$(Y_1 \vee Y_2) \leftharpoondown Y_3 \geqq (Y_1 \leftharpoondown Y_3) \vee (Y_2 \leftharpoondown Y_3)$