Luceによるsemiorderのブール行列表現

橋　本　　　寛

1．はじめに

特殊な順序と考えられるsemiorderは選好関係の議論などにおいて本質的な役割を演じるものであり，経済学や数理心理学における効用や測定の理論に関する基本的な概念である[1，2，13，15，18，19，22]。これまで，比較的広い分野でsemiorderに関する様々な研究がおこなわれており，その基本的性質はよく調べられている。このsemiorderについてはいくつかの定義が知られている[1，7，9，14，22，23]。Luceはsemiorderを2つの関係の対として与えたが，Luceによって与えられたsemiorderに関しても条件の一部異なる2つの定義が存在する［6，7，13，14，15]。

本論文においては，このLuceによって与えられたsemiorderに関する2つの定義が等価であることをブール行列を用いて示している。まず，2つのsemiorderの定義がブール行列で与えられているとして，そのブール行列で記述された2つの定義が等価であることを，ある一般化されたブール行列に関する性質の特別な場合として示している。また，semiorderを構成する2つの関係を表現するブール行列の基本的な性質についても若干の考察をおこない，両者の関係や一部条件の冗長性についても議論している。

2．定義

2．1　演算の定義

ブール行列に関する記法や演算の定義は文献［4］などによるものとする

が，一部主要なものを示す。R＝ $[r_{ij}]$，S＝ $[s_{ij}]$ を0，1の要素からなるn次ブール行列とするとき，演算を以下のように定義する。

$$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}] = [\max(r_{ij},\ s_{ij})]$$

$$R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}] = [\min(r_{ij},\ s_{ij})]$$

$$\overline{R} = [\overline{r_{ij}}] = [1 - r_{ij}]$$

$$R' = [r_{ji}]$$

$$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$$

$$R \diamond S = [(r_{i1} \vee s_{1j}) \wedge (r_{i2} \vee s_{2j}) \wedge \cdots \wedge (r_{in} \vee s_{nj})]$$

なお，特別な行列として単位行列を$I = [\delta_{ij}]$（δ_{ij}はクロネッカーのデルタ）で，零行列をOで，また全要素がすべて1の行列をEで示す。

2．2　semiorderの定義

すでに述べたように，Luceによって与えられたsemiorderに関しては2つの定義があり，それらをブール行列によって記述すると次のようになる。

［定義1］［13］

n次ブール行列S，Tが次の条件を満たすならば，(S，T) はsemiorderを表現する行列対である。

(1)　$(S \wedge \overline{S'} \wedge \overline{T}) \vee (\overline{S} \wedge S' \wedge \overline{T}) \vee (\overline{S} \wedge \overline{S'} \wedge T) = E$

(2)　$I \leqq T$

(3)　$S \times T \times S \leqq S$

(4)　$(S \times T) \wedge (S' \times T) \leqq \overline{T}$

［定義2］［14，15］

n次ブール行列S，Tが次の条件を満たすならば，(S，T) はsemiorderを表現する行列対である。

(1)　$(S \wedge \overline{S'} \wedge \overline{T}) \vee (\overline{S} \wedge S' \wedge \overline{T}) \vee (\overline{S} \wedge \overline{S'} \wedge T) = E$

(2)　$I \leqq T$

(3)　$S \times T \times S \leqq S$

(4)　$S \times S \times T' \leqq \overline{T}$

上の2つの定義のうち，定義1はLuceが最初に与えたものであり，定義2はその後若干簡単化された形で出されたものである。本論文では，このブール行列で表現された2つの定義が等価であることを示そうというものである。2つの定義は4番目の条件だけが異なっており，他の3つの条件は共通である。したがって，2つの定義が等価であることを示すには，共通な3つの条件のもとで，残り1つの条件が互いに同値であることを示せばよいことになる。

なお，以下の議論において明らかとなるように，定義1および定義2における第2の条件の$I \leqq T$は第1の条件から導かれ冗長となる。

3．結果

ブール行列で表現されたsemiorderに関する2つの定義が等価であることを示すために，最初にある一般化された性質を示す。次にその性質の特別な場合を次々と導きながら，最終的に2つの定義が等価であることを示す性質を得る。

以下において，0，1の要素からなるn次ブール行列を，一般に$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$，$T=[t_{ij}]$，$U=[u_{ij}]$などで表わすことにする。

［性質1］

$R\times T\times S \leqq R\vee R'$，$R\vee S'\vee T=E$，$R\wedge I \leqq S\wedge T\wedge U$のとき

$(R\times T)\wedge(S'\times(U\wedge T')) \leqq \overline{T} \Longleftrightarrow S\times R\times T \leqq \overline{U\wedge T'}$

(証明)

(1)　$(R\times T)\wedge(S'\times(U\wedge T')) \leqq \overline{T}$のとき

$s_{ik}\wedge r_{kl}\wedge t_{lj}=1$とおく。このとき$u_{ij}=1$，$t_{ji}=1$とすると矛盾の生じることを示す。いま$r_{kl}\wedge t_{lj}=1$，$s_{ik}\wedge(u_{ij}\wedge t_{ji})=1$であるから$t_{kj}=0$となる。したがって$R\vee S'\vee T=E$から$r_{kj}\vee s_{jk}=1$となる。

(a)　$r_{kj}=1$のとき

$r_{kj}\wedge t_{ji}\wedge s_{ik}=1$なので$R\times T\times S \leqq R\vee R'$から$r_{kk}=1$となる。したがってR

$\wedge I \leqq S \wedge T \wedge U$から$s_{kk} = t_{kk} = u_{kk} = 1$となり，$(R \times T) \wedge (S' \times (U \wedge T')) \leqq \overline{T}$から$t_{kk} = 0$となる。しかし，これは矛盾する。

(b)　$s_{jk} = 1$のとき

$r_{kl} \wedge t_{lj} \wedge s_{jk} = 1$なので$R \times T \times S \leqq R \vee R'$から$r_{kk} = 1$となる。したがって$R \wedge I \leqq S \wedge T \wedge U$から$s_{kk} = t_{kk} = u_{kk} = 1$となり，$(R \times T) \wedge (S' \times (U \wedge T')) \leqq \overline{T}$から$t_{kk} = 0$となる。しかし，これは矛盾する。

(2)　$S \times R \times T \leqq \overline{U \wedge T'}$のとき

$$
\begin{aligned}
& S \times R \times T \leqq \overline{U \wedge T'} \\
\Longleftrightarrow\quad & R \times T \leqq \overline{S'} \diamond \overline{U \wedge T'} \\
\Longleftrightarrow\quad & R \times T \leqq \overline{S' \times (U \wedge T')} \\
\Longleftrightarrow\quad & (R \times T) \wedge (S' \times (U \wedge T')) = O \\
\Longrightarrow\quad & (R \times T) \wedge (S' \times (U \wedge T')) \leqq \overline{T}
\end{aligned}
$$

(証明終)

なお，上記の性質1の証明における(2)に関して，一般に

$$R \times S \leqq T \Longleftrightarrow S \leqq \overline{R'} \diamond T$$

となることが知られており[5，8，20，21]，これを証明において使用している。

[性質2]

$R \times T \times S \leqq R \vee R'$，$R \vee S' \vee T = E$，$R \wedge I \leqq S \wedge U$，$U \leqq T'$のとき

$$(R \times T) \wedge (S' \times U) \leqq \overline{T} \Longleftrightarrow S \times R \times T \leqq \overline{U}$$

(証明)

$U \leqq T'$のとき$U \wedge T' = U$であるから

$$R \wedge I \leqq S \wedge U = S \wedge U \wedge T'$$

したがって

$$R \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T' \wedge I = S \wedge U \wedge T \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T$$

よって性質1から

$$(R \times T) \wedge (S' \times U) \leqq \overline{T} \Longleftrightarrow S \times R \times T \leqq \overline{U}$$

(証明終)

上の性質2から性質1を導くこともできる。いま性質2においてUを$U \wedge T'$とおけば，$R \wedge I \leqq S \wedge U$は$R \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T'$となるが，これから

$$R \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T' \wedge I = S \wedge U \wedge T \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T$$

となる。また逆に$R \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T$から

$$R \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T \wedge I = S \wedge U \wedge T' \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T'$$

となる。したがって,

$$R \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T' \Longleftrightarrow R \wedge I \leqq S \wedge U \wedge T$$

であり，さらに一般に$U \wedge T' \leqq T'$であるから性質1が得られる。

[性質3]

$R \times T \times S \leqq R \vee R'$, $R \vee S' \vee T = E$, $R \wedge I \leqq S \wedge T$のとき

$$(R \times T) \wedge (S' \times (T \wedge T')) \leqq \overline{T} \Longleftrightarrow S \times R \times T \leqq \overline{T \wedge T'}$$

(証明)

性質1において$U=T$とすれば得られる。　(証明終)

[性質4]

$R \times T \times S \leqq R$, $R \vee S' \vee T = E$, $R \wedge I \leqq S \wedge T$のとき

$$(R \times T) \wedge (S' \times (T \wedge T')) \leqq \overline{T} \Longleftrightarrow S \times R \times T \leqq \overline{T \wedge T'}$$

(証明)

$R \times T \times S \leqq R \leqq R \vee R'$であるから性質3による。　(証明終)

[性質5]

$R \times T \times S \leqq R$, $R \vee S' \vee T = E$, $R \wedge I \leqq S \wedge I \leqq T \wedge I$のとき

$$(R \times T) \wedge (S' \times (T \wedge T')) \leqq \overline{T} \Longleftrightarrow S \times R \times T \leqq \overline{T \wedge T'}$$

(証明)

明らかに

$$R \wedge I \leqq S \wedge I \leqq T \wedge I \Rightarrow R \wedge I \leqq S \wedge T \wedge I \leqq S \wedge T$$

となる。したがって性質4から得られる。　(証明終)

[性質6]

$R \times T \times S \leqq R$, $R \vee S' \vee T = E$, $T' = T$, $I \leqq T$, $R \wedge I \leqq S \wedge I$のとき

$$(R \times T) \wedge (S' \times T) \leqq \overline{T} \Longleftrightarrow S \times R \times T \leqq \overline{T}$$

(証明)

性質5において，$T' = T$, $I \leqq T$とすれば得られる。　(証明終)

［性質7］

$S\times T\times S\leqq S$, $S\vee S'\vee T=E$, $T'=T$, $I\leqq T$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T\leqq\overline{T}$$

(証明)

性質6においてR=Sとおけば得られる。　(証明終)

［性質8］

$S\times T\times S\leqq S$, $S\vee S'\vee T=E$, $T'=T$, $I\leqq T$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(証明)

$T'=T$だから性質7による。　(証明終)

上の性質8は性質7とほとんど同じであるが，以下の性質の証明の都合上示している。

［注意1］　この性質8に関して

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

が成立するためには，4つの条件$S\times T\times S\leqq S$, $S\vee S'\vee T=E$, $T'=T$, $I\leqq T$はいずれも必要である。このことは各条件を1つずつ除いた以下の命題が一般には成立しないことからわかる。

(1)　$S\vee S'\vee T=E$, $T'=T$, $I\leqq T$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(2)　$S\times T\times S\leqq S$, $T'=T$, $I\leqq T$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(3)　$S\times T\times S\leqq S$, $S\vee S'\vee T=E$, $I\leqq T$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(4)　$S\times T\times S\leqq S$, $S\vee S'\vee T=E$, $T'=T$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

これらの命題の成立しないことは次のような反例を考えればわかる。まず命題(1)については

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

とおけば，このとき

$$S\vee S'\vee T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=E$$

$T'=T$，$I\leqq T$

$$S\times T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S'\times T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\leqq\overline{T}$$

であるが，

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S\times S\times T'=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

であって，$S\times S\times T'\leqq\overline{T}$とはなっていない。

次に(2)については

$$S=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

とおけば，このとき

$$S\times T=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S\times T\times S=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\leqq S$$

$T'=T$, $I\leqq T$

$$S'\times T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\leqq\overline{T}$$

であるが,

$$S \times S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S \times S \times T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であって，$S \times S \times T' \leqq \overline{T}$とはなっていない。

命題(3)については

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，このとき

$$S \times T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S \times T \times S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leqq S$$

$$S \vee S' \vee T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=E$$

$I\leqq T$

$$S'\times T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\leqq\overline{T}$$

であるが，

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S\times S\times T'=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

であって，$S\times S\times T'\leqq\overline{T}$とはなっていない。

命題(4)に関しては

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

とおけば，

$$S\times T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S\times T\times S=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\leqq S$$

$$S\vee S'\vee T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=E$$

$T'=T$

$$S'\times T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\leqq\overline{T}$$

であるが,

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$S\times S\times T'=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

であって, $S\times S\times T'\leqq\overline{T}$とはなっていない。

なお, 性質8の$S\times T\times S\leqq S$を$S\times S\leqq S$で置き換えることはできない。これは次の命題が一般には成立しないことからわかる。

$S\times S\leqq S$, $S\vee S'\vee T=E$, $T'=T$, $I\leqq T$のとき

$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$

この命題に関しては，いま

$$S=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

とおけば，このとき

$$S\times S=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\leqq S$$

$$S\vee S'\vee T=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=E$$

$T'=T$，$I\leqq T$

$$S\times T=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S'\times T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}=\begin{pmatrix} 0&1&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)=\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$
$$\leqq\overline{T}$$

であるが，

$$S\times S\times T'=\begin{pmatrix} 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

であって，$S\times S\times T'\leqq\overline{T}$とはなっていない。

［性質 9］

$S\times T\times S\leqq S$，$S\vee S'\vee T=E$，$T'=T$，$S\wedge I=O$

のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(証明)

$S\wedge I=O$のとき$S\vee S'\vee T=E$から$I\leqq T$となる。したがって性質 8 によって

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

となる。 (証明終)

［注意 2］ 上の性質に関して

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

となるための 4 つの条件$S\times T\times S\leqq S$，$S\vee S'\vee T=E$，$T'=T$，$S\wedge I=O$はいずれも必要である。このことは，性質 8 の場合と同様であって，次の命題が一般には成立しないことからわかる。反例としては注意 1 における同一番号

の命題のものを考えればよい。なお，命題(4)は注意1の命題(4)と同一となっている。

(1)　$S\vee S'\vee T=E$，$T'=T$，$S\wedge I=O$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(2)　$S\times T\times S\leqq S$，$T'=T$，$S\wedge I=O$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(3)　$S\times T\times S\leqq S$，$S\vee S'\vee T=E$，$S\wedge I=O$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(4)　$S\times T\times S\leqq S$，$S\vee S'\vee T=E$，$T'=T$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

[性質10]

$S\times T\times S\leqq S$，$S\vee S'\vee T=E$，$(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O$

のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(証明)

$S\vee S'\vee T=E$から$\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T}=O$となり，$\overline{S}\wedge\overline{S'}\leqq T$が得られる。また$(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O$から$(S\vee S')\wedge T=O$となり，これから$T\leqq\overline{S}\wedge\overline{S'}$が得られる。したがって$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$が成立し，これから$T'=\overline{S'}\wedge\overline{S}=T$となる。一方$S\wedge S'=O$から$S\wedge I=O$となる。ゆえに性質9によって

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

となる。　　(証明終)

[注意3]　性質10に関して，

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

が成立するための3つの条件$S\times T\times S\leqq T$，$S\vee S'\vee T=E$，$(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O$はいずれも必要である。このことは次の命題が一般には成立しないことからわかる。

(1)　$S\vee S'\vee T=E$，$(S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Rightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(2)　$S \times T \times S \leqq S$，$(S \wedge S') \vee (S \wedge T) \vee (S' \wedge T) = O$のとき

$(S \times T) \wedge (S' \times T) \leqq \overline{T} \Rightarrow S \times S \times T' \leqq \overline{T}$

(3)　$S \times T \times S \leqq S$，$S \vee S' \vee T = E$のとき

$(S \times T) \wedge (S' \times T) \leqq \overline{T} \Rightarrow S \times S \times T' \leqq \overline{T}$

上の命題(1)の反例としては

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

をあげることができる。これは注意１における命題(1)の反例と同じである。

次に命題(2)の反例としては

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

がある。これも注意１における命題(2)の反例と同じである。

また，命題(3)の反例としては

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

がある。これも注意１における命題(3)の反例と同じである。

［性質11］

$S \times T \times S \leqq S$，$S \vee S' \vee T = E$のとき

$S \wedge I = O \Longleftrightarrow S \wedge S' = O$

(証明)

(1)　$S \wedge I = O$のとき

$S \vee S' \vee T = E$と$S \wedge I = O$から$I \leqq T$となる。

したがって，

$$S \times S = S \times I \times S \leqq S \times T \times S \leqq S$$

となる。よって$S \times S \leqq S$となり，$S \wedge I = O$だから$S \wedge S' = O$となる。

(2)　$S \wedge S' = O$のとき

明らかに$S \wedge I = O$となる。　(証明終)

なお，一般には次の命題は成立しない。

$$S \times T \times S \leqq S,\ S \vee S' \vee T = E,\ S \wedge I = O,\ (S \times T) \wedge (S' \times T) = O \Rightarrow S \wedge T = O$$

このことは，いま

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$S \times T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S \times T \times S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leqq S$$

$$S \vee S' \vee T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$S \wedge I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$S' \times T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(S \times T) \wedge (S' \times T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

となる。しかし

$$S \wedge T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

であって，$S \wedge T = O$とはなっていない。

この反例から明らかなように次の命題も一般には成立しない。

$$S\times T\times S\leqq S, S\vee S'\vee T=E, S\wedge S'=O, (S\times T)\wedge(S'\times T)=O\Rightarrow S\wedge T=O$$

[性質12]

$S\times T\times S\leqq S$, $(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{S})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(証明)

$$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$$
$$\Longleftrightarrow\quad(\overline{S}\vee S'\vee T)\wedge(S\vee\overline{S'}\vee T)\wedge(S\vee S'\vee\overline{T})=O$$
$$\Longleftrightarrow\quad((\overline{S}\wedge\overline{S'})\vee(S'\wedge S)\vee T)\wedge(S\vee S'\vee\overline{T})=O$$
$$\Longleftrightarrow\quad(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(S'\wedge S)\vee(T\wedge S)\vee(T\wedge S')=O$$
$$\Longleftrightarrow\quad\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T}=O,\ (S'\wedge S)\vee(T\wedge S)\vee(T\wedge S')=O$$
$$\Longleftrightarrow\quad S\vee S'\vee T=E,\ (S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O$$

よって性質10から

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

となる。　(証明終)

[性質13]

$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$, $I\leqq T$, $S\times T\times S\leqq S$のとき

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

(証明)

性質12による。　(証明終)

この性質13によってsemiorderに関する定義1と定義2は等価となることがわかる。なお，上の性質中の$I\leqq T$は，性質12から明らかなように，

$$(S\times T)\wedge(S'\times T)\leqq\overline{T}\Longleftrightarrow S\times S\times T'\leqq\overline{T}$$

が成立するための条件としては冗長である。

また，性質12の証明で示したように，条件

$$(S\wedge\overline{S'}\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge S'\wedge\overline{T})\vee(\overline{S}\wedge\overline{S'}\wedge T)=E$$

は，

$$S\vee S'\vee T=E,\ (S\wedge S')\vee(S\wedge T)\vee(S'\wedge T)=O$$

と同値であり，これから明らかに$S \wedge S' = O$であるので，$S \wedge I = O$となる。したがって，性質9の証明でも述べたように，この$S \wedge I = O$と$S \vee S' \vee T = E$から$I \leqq T$となる。それゆえ，定義1および定義2における$I \leqq T$はそれぞれの定義の第1の条件から得られるので本来は不要である。

すでに性質10の証明で示したように定義1および定義2におけるTは$T' = T$となるので対称であり，さらにSは

$$S \times S = S \times I \times S \leqq S \times T \times S \leqq S$$

となるから$S \times S \leqq S$，すなわちSに対応する関係は推移的となる。こうして，よく知られているように[15]，定義1および定義2におけるSは，非反射的でかつ推移的な関係を，したがって非対称的でかつ推移的な関係を表現する行列となり，Tは反射的でかつ対称的な関係を表現する行列となる。非反射的で推移的な関係は狭義の半順序（strict partial order）とも呼ばれ，興味深い性質を有している［3，4，5，16，20］。また反射的で対称的な関係はcompatibility relationとかtolerance relationとよばれる［10，11，12，17，24］。反射的で対称的な関係がさらに推移的であれば同値関係となる。

ここで注目すべきことは，性質10の証明において示したように$T = \overline{S} \wedge \overline{S'}$となるので，定義1および定義2から$T$を消去することができ，semiorderを$S$だけで表現できることである。このことは，Scott and Suppesによる単一のSだけで表現されたsemiorderの定義［22，23］につながっていく。

4．まとめ

Luceによって与えられたsemiorderに関する2つの定義が等価であることをブール行列を用いて示した。ブール行列を用いることにより，semiorderの定義およびそれのもつ性質やそれらの証明が明確となる。たとえば，本文中で述べたように，semiorder（S，T）に関する定義の第2の条件，すなわちTで表現される関係が反射的であることを示す$I \leqq T$が冗長であることも明らかとなる。

また，Sで表現される関係が非反射的でかつ推移的であることや，Tが対称でかつ$T=\overline{S}\wedge\overline{S'}$と表わされることも容易に示すことができる。したがって，semiorderの定義からTを消去することができ，Sだけの条件としてsemiorderを定義できることになる。単一のSだけで表現されているsemiorderの定義として，Scott and Suppesによる定義が知られている[1，22，23]。このScott and Suppesの定義とLuceの定義との関連については別の機会に報告したい。

謝辞　本研究の一部は山口大学経済学部学術振興基金の研究助成によるものである。与えられたご援助に対し深謝する。

文　献

[1] Doignon, J. -P., Monjardet, B., Roubens, M., and Vincke, Ph.: “Biorder families, valued relations, and preference modelling,” Journal of Mathematical Psychology, 30, pp. 435-480 (1986).

[2] Fishburn, P.C.: “Intransitive indifference in preference theory: A survey,” Operations Research, 18, pp. 207-228 (1970).

[3] Fishburn, P.C.: “The Theory of Social Choice,” Princeton University Press, New Jersey (1973).

[4] 橋本　寛：“非反射的推移関係”，山口経済学雑誌，第46巻，第4号，pp. 479-498 (平成10年7月).

[5] 橋本　寛：“非反射的推移関係に関する同値条件”，第48巻，第2号，pp. 257-285 (平成12年3月)

[6] Jacquet-Lagrèze, E.: “How we can use the notion of semi-orders to build outranking relations in multi-criteria decision making” in Utility, Probability, and Human Decision Making (Wendt, D. and Vlek, C. eds.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1975), pp. 87-112.

[7] Jamison, D.T. and Lau, L.J.: “Semiorders and the theory of choice,” Econometrica, Vol. 41, No. 5, pp. 901-912 (1973).

[8] 柏木芳美：“関係代数的証明”，山口経済学雑誌，第46巻，第3号，pp. 259-269 (平成10年5月).

[9] Kim, K.H.: “Boolean Matrix Theory and Applications,” Marcel Dek-

ker, New York (1982).
[10] Kim, K.H. and Roush, F.W.: "Introduction to Mathematical Consensus Theory," Marcel Dekker, New York (1980).
[11] Klir, G.J. and Folger, T.A.: "Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information," Prentice Hall, Englewood Cliffs (1988).
[12] Levy, L.S.: "Discrete Structures of Computer Science," John Wiley & Sons, New York (1980).
[13] Luce, R.D.: "Semiorders and a theory of utility discrimination," Econometrica, 24, pp. 178-191 (1956).
[14] Luce, R.D.: "Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis," John Wiley & Sons, New York (1959).
[15] Luce, R.D. and Galanter, E.: "Discrimination" in Handbook of Mathematical Psychology, Vol. I (Luce, R.D., Bush, R.R. and Galanter, E., eds.), John Wiley & Sons, New York (1963), pp. 191-243.
[16] 小野寛晰："情報代数"，共立出版 (1994).
[17] Prather, R.E.: "Discrete Mathematical Structures for Computer Science," Houghton Mifflin Co., Boston (1976).
[18] Roberts, F.S.: "Measurement Theory, with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences," Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1979).
[19] Roubens, M. and Vincke, Ph.: "Preference Modelling," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag, Berlin (1985).
[20] Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).
[21] Schröder, E.: "Algebra der Logik. Vol. III," Teubner, Leipzig (1895) (Chelsea Publ. Co., New York, 1966).
[22] Scott, D. and Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement," The Journal of Symbolic Logic, 23, pp. 113-128 (1958).
[23] Suppes, P. and Zinnes, J.L.: "Basic measurement theory" in Handbook of Mathematical Psychology, Vol. I (Luce, R.D., Bush, R.R. and Galanter,E., eds.) John Wiley & Sons, New York (1963), pp. 1-76.
[24] Tremblay, J.P. and Manohar, R.: "Discrete Mathematical Structures

with Applications to Computer Science," McGraw-Hill, New York (1975).