非反射的推移関係に関する同値条件

橋　本　　　寛

1．はじめに

非反射的推移関係の同値条件についてブール行列を用いて考察をおこない，従来知られている同値条件を整理するとともに，多数の様々な同値条件を明らかにしている。非反射的推移関係は狭義の半順序（strict partial order）ともよばれ，種々の応用において重要な関係である[1，2，3，20]。非反射的推移関係については，これまでにも数多くの興味深い基本的性質が知られている［1，3，16，17，22］。

本論文では，まず推移性と非反射性の同値条件を調べ，次にそれらの条件を組み合わせることによって非反射的推移関係に関する若干の同値条件を得ている。次に推移性のもとで非反射的となる種々の条件について考察をおこない，またそれらの各条件の同値条件について調べている。さらに，非反射性のもとで推移的となるための条件について考察をおこない，同様にそれらの各条件の同値条件について調べている。こうして非反射的推移関係に関する多数の同値条件を求めている。

2．定義

ブール行列に関する演算や記法は文献［16］などに従うものとし，主要なものだけについて述べる。以下で扱う行列はすべて0，1の要素からなるn次ブール行列とし，ブール行列R＝［r_{ij}］，S＝［s_{ij}］に対して

R′＝［r_{ji}］（転置）

$$\overline{R} = [\overline{r_{ij}}] = [1 - r_{ij}]$$

$$\triangle R = R \wedge \overline{R'}$$

$$\triangledown R = R \wedge R'$$

$$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}]$$

$$R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}]$$

$$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$$

$$R \diamond S = [(r_{i1} \vee s_{1j}) \wedge (r_{i2} \vee s_{2j}) \wedge \cdots \wedge (r_{in} \vee s_{nj})]$$

$$R^0 = [r_{ij}^{(0)}] = I = [\delta_{ij}] \ (\delta_{ij}\text{はクロネッカーのデルタ})$$

$$R^k = [r_{ij}^{(k)}] = R^{k-1} \times R \ (k = 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$R^+ = R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^n$$

と定める。

特殊な行列として，一般に単位行列をI，零行列をOで示し，また全要素が1の行列をEで示す。ブール行列Rによって表現される関係の非反射性は$R \wedge I = O$で表わされ，推移性は$R^2 \leqq R$で表わされる。さらに，$\triangledown R \leqq I$なるRで表現される関係は反対称的，$\triangledown R = O$なるRで表現される関係は非対称的と呼ばれる。

3．結果

非反射的推移関係を表現するブール行列Rは$R^2 \leqq R$かつ$R \wedge I = O$なるRとして与えられるので，まず$R^2 \leqq R$の同値条件を調べ，次に$R \wedge I = O$と同値な条件について調べる。次に$R^2 \leqq R$のもとで$R \wedge I = O$と同値になる条件を調べ，さらに，それらの条件の同値条件を調べる。また，同様に$R \wedge I = O$のもとで$R^2 \leqq R$と同値になる条件を調べ，次にそれらの条件の同値条件を調べる。

3．1　$R^2 \leqq R$と同値な条件

推移関係を表現する$R^2 \leqq R$なるブール行列Rの同値条件について調べる。

［性質1］［12，15］

次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R$

(3) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R$

(4) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R$

［性質 2］［18, 19, 21, 22, 23］

次の条件は同値である。

(1) $R \times S \leqq T$

(2) $R \leqq T \diamond \overline{S'}$

(3) $S \leqq \overline{R'} \diamond T$

（証明） (1)⇒(2) $t_{ik}=0$, $s_{jk}=1$ とすれば $R \times S \leqq T$ によって，$r_{ij}=0$ となる。したがって $R \leqq T \diamond \overline{S'}$ となる。

(2)⇒(1) $r_{ik}=1$, $s_{kj}=1$ とすれば $R \leqq T \diamond \overline{S'}$ によって $t_{ij}=1$ となる。したがって $R \times S \leqq T$ となる。

(1)⇒(3) $r_{ki}=1$, $t_{kj}=0$ とすれば $R \times S \leqq T$ によって $s_{ij}=0$ となる。したがって $S \leqq \overline{R'} \diamond T$ となる。

(3)⇒(1) $r_{ik}=1$, $s_{kj}=1$ とすれば $S \leqq \overline{R'} \diamond T$ によって $t_{ij}=1$ となる。したがって $R \times S \leqq T$ となる。（証明終）

［性質 3］

次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $R \leqq R \diamond \overline{R'}$

(3) $R \leqq \overline{R'} \diamond R$

(4) $\overline{R'} \times R \leqq \overline{R'}$

(5) $R \times \overline{R'} \leqq \overline{R'}$

(6) $I \leqq R \diamond \overline{R'} \diamond \overline{R'}$

(7) $I \leqq \overline{R'} \diamond R \diamond \overline{R'}$

(8) $I \leqq \overline{R'} \diamond \overline{R'} \diamond R$

(9)　$R^2 \times \overline{R'} \leqq \overline{I}$

(10)　$R \times \overline{R'} \times R \leqq \overline{I}$

(11)　$\overline{R'} \times R^2 \leqq \overline{I}$

(12)　$\overline{R} \leqq \overline{R} \diamond \overline{R}$

（証明）　$R^2 \leqq R$に性質２を適用する。　（証明終）

［性質４］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　$R \wedge \overline{I} \leqq R \diamond (\overline{R'} \vee I)$

(3)　$R \wedge \overline{I} \leqq (\overline{R'} \vee I) \diamond R$

(4)　$\overline{R'} \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{R'} \vee I$

(5)　$(R \wedge \overline{I}) \times \overline{R'} \leqq \overline{R'} \vee I$

(6)　$I \leqq R \diamond (\overline{R'} \vee I) \diamond (\overline{R'} \vee I)$

(7)　$I \leqq (\overline{R'} \vee I) \diamond R \diamond (\overline{R'} \vee I)$

(8)　$I \leqq (\overline{R'} \vee I) \diamond (\overline{R'} \vee I) \diamond R$

(9)　$(R \wedge \overline{I})^2 \times \overline{R'} \leqq \overline{I}$

(10)　$(R \wedge \overline{I}) \times \overline{R'} \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \overline{I}$

(11)　$\overline{R'} \times (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{I}$

(12)　$\overline{R} \leqq (\overline{R} \vee I) \diamond (\overline{R} \vee I)$

（証明）　性質１(1)(2)によって

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \leqq R$$

であるから$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R$に対して性質２を適用する。　（証明終）

同様に，性質１の(3)，(4)に対しても性質２を適用することができ，類似の結果を得ることができる。

［性質５］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$

(2)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$

(3)　$R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R$, $R\wedge I=O$

(4)　$(R\wedge\bar{I})\times R\leqq R$, $R\wedge I=O$

(証明)　性質１による。　(証明終)

上記の性質５中の$R\wedge I=O$は次の３．２節で示す種々の同値な条件で置き換えることができる。

３．２　$R\wedge I=O$と同値な条件

非反射的関係を表現する$R\wedge I=O$なるブール行列Rの同値条件について調べる。

次の性質はほとんど自明であり，またよく知られている。

［性質６］［22］

次の条件は同値である。

(1)　$R\wedge I=O$

(2)　$R\leqq\bar{I}$

(3)　$R\wedge\bar{I}=R$

(4)　$I\leqq\bar{R}$

(5)　$\bar{R}\wedge I=I$

［性質７］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$, $R\wedge I=O$

(2)　$R^2\leqq R$, $R\leqq\bar{I}$

(3)　$R^2\leqq R$, $R\wedge\bar{I}=R$

(4)　$R^2\leqq R$, $I\leqq\bar{R}$

(5)　$R^2\leqq R$, $\bar{R}\wedge I=I$

(証明)　性質６による。　(証明終)

非反射性を表わす$R\wedge I=O$と同値な条件としては以下に示すような性質も知られており，$R\wedge I=O$をこれらの条件で置き換えることができる。また上の性質中の$R^2\leqq R$を３．１節で示した同値な条件で置き換えることもできる。

［性質8］［13, 16］

次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I = O$

(2)　すべてl(l＝0, 1, 2, …)に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee \overline{I}$

(3)　あるl(l＝0, 1, 2, …)に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee \overline{I}$

(4)　$R \wedge I \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee \overline{I}$

(5)　$R \wedge I \leqq \overline{R} \vee \overline{I}$

(6)　$R \wedge I \leqq \overline{R} \wedge \overline{I}$

(7)　すべてのl(l＝0, 1, 2, …)に対して$R^l \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee \overline{I}$

(8)　あるl(l＝0, 1, 2, …)に対して$R^l \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee \overline{I}$

(9)　$I \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee \overline{I}$

(10)　$R \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee \overline{I}$

(11)　$R \leqq R \wedge \overline{I}$

［性質9］

次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I = O$

(2)　$R \wedge I \leqq \overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge I$

(3)　$R \wedge I \leqq \overline{R} \wedge \overline{R'} \wedge \overline{I}$

(4)　$R \wedge I \leqq \overline{R} \wedge \overline{R'}$

(5)　$R \wedge I \leqq \overline{R'} \wedge \overline{I}$

(6)　$R \wedge I \leqq \overline{R} \wedge I$

(7)　$R \wedge I \leqq \overline{R'} \wedge I$

(8)　$R \wedge I \leqq \overline{R}$

(9)　$R \wedge I \leqq \overline{R'}$

(10)　$R \wedge I \leqq \overline{I}$

(11)　$R \wedge I \leqq (\overline{R} \wedge I) \vee (\overline{R'} \wedge I)$

(12)　$R \wedge I \leqq \overline{R} \vee \overline{R'}$

(13)　$R \wedge I \leqq (\overline{R} \wedge I) \vee \overline{I}$

(14)　$R\wedge I \leqq (\overline{R'}\wedge I)\vee\bar{I}$

(15)　$R\wedge I \leqq \overline{R'}\vee\bar{I}$

(証明)　(1)⇒(2)　$R\wedge I=O$だから明らかに

$$R\wedge I\leqq\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge I$$

(2)⇒(1)　$R\wedge I\leqq\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge I$

$$(R\wedge I)\wedge R\leqq(\overline{R}\wedge\overline{R'}\wedge I)\wedge R=O$$

したがって$R\wedge I=O$となる。

以下同様である。　(証明終)

上の性質に関して，一般に

$$R'\wedge I=R\wedge I,\ \overline{R'}\wedge I=\overline{R}\wedge I$$

となる。このことを用いればいくつかの条件は簡単化され，また同一のものに帰着される。

［性質10］

次の条件は同値である。

(1)　$R\wedge I=O$

(2)　すべてのl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R}$

(3)　あるl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R}$

(4)　すべてのl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R'}$

(5)　あるl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R'}$

(6)　すべてのl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R}\vee\overline{R'}$

(7)　あるl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R}\vee\overline{R'}$

(8)　すべてのl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R}\vee\bar{I}$

(9)　あるl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R}\vee\bar{I}$

(10)　すべてのl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R'}\vee\bar{I}$

(11)　あるl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R'}\vee\bar{I}$

(証明)　(1)⇒(2)　$R\wedge I=O$から$I\leqq\overline{R}$となるので，すべてのl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\wedge I\leqq\overline{R}$となる。

(2)⇒(3)　明らかである。

(3)⇒(1)　$R \wedge I \leqq R^l \wedge I \leqq \overline{R}$であるから

$$R \wedge I \wedge R \leqq \overline{R} \wedge R = O$$

したがって$R \wedge I = O$となる。

(1)⇒(4)　$R \wedge I = O$から$I \leqq \overline{R}$，したがって$I \leqq \overline{R'}$となるので，すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R'}$となる。

(4)⇒(5)　明らかである。

(5)⇒(1)　$R \wedge I \leqq R^l \wedge I \leqq \overline{R'}$であるから

$$R \wedge I \wedge R' \leqq \overline{R'} \wedge R' = O$$

したがって$R \wedge I \wedge R' = O$となり，$R \wedge I \wedge R' = R \wedge I$だから$R \wedge I = O$となる。

以下同様である。　(証明終)

［性質11］

次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I = O$

(2)　すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R} \wedge I$

(3)　あるl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R} \wedge I$

(4)　すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R'} \wedge I$

(5)　あるl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R'} \wedge I$

(6)　すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq (\overline{R} \wedge I) \vee (\overline{R'} \wedge I)$

(7)　あるl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq (\overline{R} \wedge I) \vee (\overline{R'} \wedge I)$

(8)　すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq (\overline{R} \wedge I) \vee \overline{R'}$

(9)　あるl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq (\overline{R} \wedge I) \vee \overline{R'}$

(10)　すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq (\overline{R'} \wedge I) \vee \overline{R}$

(11)　あるl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq (\overline{R'} \wedge I) \vee \overline{R}$

(証明)　(1)⇒(2)　$R \wedge I = O$から$I \leqq \overline{R}$となるので，すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$R^l \wedge I \leqq \overline{R} \wedge I$となる。

(2)⇒(3)　明らかである。

(3)⇒(1)　$R \wedge I \leqq R^l \wedge I \leqq \overline{R} \wedge I$であるので

$$R \wedge I \wedge R \leqq \overline{R} \wedge I \wedge R = O$$

したがって　$R \wedge I = O$となる。

以下同様である。　(証明終)

[性質12]

次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I = O$

(2)　すべてのl($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R} \vee \overline{I}$

(3)　あるl($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R} \vee \overline{I}$

(4)　すべてのl($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R'} \vee \overline{I}$

(5)　あるl($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R'} \vee \overline{I}$

(証明)　(1)⇒(2)　$R \wedge I = O$によって$\overline{R} \vee \overline{I} = E$となる。したがって，すべての$l$($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R} \vee \overline{I}$となる。

(2)⇒(3)　明らかである。

(3)⇒(1)　$R \wedge I \leqq R^l \wedge I \leqq (\overline{R} \vee \overline{I}) \wedge I = \overline{R} \wedge I$

であるから

$$(R \wedge I) \wedge R \leqq (\overline{R} \wedge I) \wedge R = O$$

よって$R \wedge I = O$となる。

(1)⇒(4)　$R \wedge I = O$から$R' \wedge I = O$となり，$\overline{R'} \vee \overline{I} = E$となる。したがって，すべての$l$($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R'} \vee I$となる。

(4)⇒(5)　明らかである。

(5)⇒(1)　$R \wedge I \leqq R^l \wedge I \leqq (\overline{R'} \vee \overline{I}) \wedge I = \overline{R'} \wedge I = \overline{R} \wedge I$

であるから

$$(R \wedge I) \wedge R \leqq (\overline{R} \wedge I) \wedge R = O$$

よって$R \wedge I = O$となる。　(証明終)

3．3　$R^2 \leqq R$のとき$R \wedge I = O$と同値な条件

与えられたブール行列が，推移性のもとで非反射的となるための必要十分条件を調べ，次にそれらの同値条件を調べる。

[性質13] [1，4，16]

$R^2 \leqq R$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I = O$

(2)　$\nabla R = O$

(3)　すべてのl ($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(4)　あるl ($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(5)　$R^2 \leqq \overline{R'}$

(6)　$R^n = O$

［性質14］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R$, $\nabla R = O$

(3)　$R^2 \leqq R$, すべてのl ($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(4)　$R^2 \leqq R$, あるl ($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(5)　$R^2 \leqq R$, $R^2 \leqq \overline{R'}$

(6)　$R^2 \leqq R$, $R^n = O$

（証明）　性質13による。　（証明終）

以下の性質19で示すように，上記の(3), (4)の$R^l \leqq \overline{R'}$を性質18で示す同値な条件で置き換えることができる。また性質21で示すように，上の性質の(5)の$R^2 \leqq \overline{R'}$についても，性質20で示す同値な条件で置き換えることができる。

さらに，上記の性質中の$R^2 \leqq R$を3．1節で示した同値な条件で置き換えることができる。例えば

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 \leqq R$$

であるので，次の性質が得られる。

［性質15］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$

(2)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R$, $\nabla R = O$

(3)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R$, すべての$l$ ($l = 0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(4)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R$, ある$l$($l$＝0，1，2，…)に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(5)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R$, $R^2\leqq\overline{R'}$

(6)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R$, $R^n=O$

(証明)　性質14および性質1(1)(2)による。　(証明終)

なお，すでに性質5(1)(2)で示しているように

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O\Longleftrightarrow(R\wedge\bar{I})^2\leqq R,\ R\wedge I=O$$

となる。

上の性質15の(3)，(4)における$R^l\leqq\overline{R'}$については，すでに述べたように，以下で示す性質18の同値な条件で，また(5)の$R^2\leqq\overline{R'}$についても性質20における同値な条件で置き換えることができる。

3．3．1　$\triangledown R=O$と同値な条件

[性質16]［4，5，16］

次の条件は同値である。

(1)　$\triangledown R=O$

(2)　$\triangle R=R$

(3)　$R\leqq\overline{R'}$

(4)　$R^2\wedge I=O$

(5)　$R=R\wedge\bar{I}=\triangle R$

(6)　$\triangledown R\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(7)　$\triangledown(R^3)\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(8)　$\triangledown(R^5)\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(9)　すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$\triangledown(R^{2l+1})\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

(10)　あるl(l＝0，1，2，…)に対して$\triangledown(R^{2l+1})\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}$

なお，上の性質の(6)に関しては

$$\triangledown R\leqq\bar{R}\vee\overline{R'}\Longleftrightarrow\triangledown R\leqq\overline{R\wedge R'}=\overline{\triangledown R}$$

$$\Longleftrightarrow\triangledown R\wedge\triangledown R=O$$

$$\Longleftrightarrow \nabla R = O$$

となる。

［性質17］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R$，$\triangle R = R$

(3)　$R^2 \leqq R$，$R \leqq \overline{R'}$

(4)　$R^2 \leqq R$，$R^2 \wedge I = O$

(5)　$R^2 \leqq R$，$R = R \wedge \bar{I} = \triangle R$

(6)　$R^2 \leqq R$，$\nabla R \leqq \overline{R} \vee \overline{R'}$

(7)　$R^2 \leqq R$，$\nabla (R^3) \leqq \overline{R} \vee \overline{R'}$

(8)　$R^2 \leqq R$，$\nabla (R^5) \leqq \overline{R} \vee \overline{R'}$

(9)　$R^2 \leqq R$，すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$\nabla (R^{2l+1}) \leqq \overline{R} \vee \overline{R'}$

(10)　$R^2 \leqq R$，あるl(l＝0，1，2，…)に対して$\nabla (R^{2l+1}) \leqq \overline{R} \vee \overline{R'}$

(証明)　性質14(1)(2)によって

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ \nabla R = O$$

であるから，性質16による。　(証明終)

上記の性質中の$R^2 \leqq R$を3．1節で示した同値な条件で置き換えることができる。

3．3．2　$R^l \leqq \overline{R'}$と同値な条件

［性質18］［16］

すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して次の条件は同値である。

(1)　$R^l \leqq \overline{R'}$

(2)　$R^l \wedge R' = O$

(3)　$R^{l+1} \wedge I = O$

［性質19］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R$, すべてのl($l=0$, 1, 2, …)に対して$R^l \wedge R' = O$

(3)　$R^2 \leqq R$, すべてのl($l=0$, 1, 2, …)に対して$R^{l+1} \wedge I = O$

(4)　$R^2 \leqq R$, あるl($l=0$, 1, 2, …)に対して$R^l \wedge R' = O$

(5)　$R^2 \leqq R$, あるl($l=0$, 1, 2, …)に対して$R^{l+1} \wedge I = O$

(証明)　性質14(1)(3)(4)および性質18による。　(証明終)

上の性質19における$R^2 \leqq R$を3．1節で示した同値な条件で置き換えることができる。

3．3．3　$R^2 \leqq \overline{R'}$と同値な条件

[性質20] [9, 16]

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq \overline{R'}$

(2)　$R^2 \wedge R' = O$

(3)　$R^3 \wedge I = O$

(証明)　性質18による。　(証明終)

[性質21]

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R$, $R^2 \wedge R' = O$

(3)　$R^2 \leqq R$, $R^3 \wedge I = O$

(証明)　性質14(1)(5)によって

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R^2 \leqq \overline{R'}$$

であるから，性質20による。　(証明終)

この性質21についても$R^2 \leqq R$を3．1節で示した同値な条件で置き換えることができる。

3．3．4　$R^n = O$と同値な条件

［性質22］［4］

次の条件は同値である。

(1)　$R^n = O$

(2)　$(R^+) \wedge I = O$

(3)　$(R^+)^n = O$

［性質23］

$$R^n = O \Longleftrightarrow I \vee R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1} \leqq \overline{R'}$$

(証明)

$R^n = O \Longleftrightarrow R^+ \wedge I = O$

$\Longleftrightarrow (R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^n) \wedge I = O$

$\Longleftrightarrow l = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して $R^{l+1} \wedge I = O$

$\Longleftrightarrow l = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して $R^l \leqq \overline{R'}$

［性質18(3)(1)による。］

$\Longleftrightarrow I \vee R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1} \leqq \overline{R'}$　(証明終)

一般に，$S \diamond \bar{I} = \bar{I} \diamond S = S$ であって $\overline{R'} = \bar{I} \diamond \overline{R'}$ となるので，上の性質23の $I \vee R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1} \leqq \overline{R'}$ は性質2を適用すれば

$I \vee R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1} \leqq \overline{R'}$

$\Longleftrightarrow I \vee R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1} \leqq \bar{I} \diamond \overline{R'}$

$\Longleftrightarrow (I \vee R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1}) \times R \leqq \bar{I}$

$\Longleftrightarrow R \vee R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^n \leqq \bar{I}$

$\Longleftrightarrow R^+ \leqq \bar{I}$

$\Longleftrightarrow R^+ \wedge I = O$

となる。

［性質24］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R,\ (R^+) \wedge I = O$

(3)　$R^2 \leqq R,\ (R^+)^n = O$

(4)　$R^2 \leqq R$, $I \vee R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1} \leqq \overline{R'}$

(証明)　性質14(1)(6)によって

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ R^n = O$$

であるから，性質22および性質23による。　(証明終)

上記の性質中の$R^2 \leqq R$を3．1節で示した同値な条件で置き換えることができる。

3．4　$R \wedge I = O$のとき$R^2 \leqq R$と同値な条件

非反射性すなわち$R \wedge I = O$のもとで，$R^2 \leqq R$と同値になる条件を調べ，その条件で$R^2 \leqq R$を置き換えることを考える。

［性質25］

$R \wedge I = O$のとき

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$$

(証明)　$R \wedge I = O$のとき$R \wedge \bar{I} = R$であるから明らかである。　(証明終)

［性質26］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$

(2)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$, $R \wedge I = O$

(証明)　性質25による。　(証明終)

上記の性質の(2)の$R \wedge I = O$は，すでに3．2節で示している同値な条件で置き換えることができる。

3．4．1　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$と同値な条件

次の性質27からわかるように，$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$なるブール行列Rで表現される関係は反対称的推移関係であり，ここではこの反対称的推移関係を表現するブール行列Rの同値条件を調べている。

［性質27］［8，11，12］

次の条件は同値である。

(1)　$(R\wedge\bar{I})^2 \leqq R\wedge\bar{I}$

(2)　$R\times(R\wedge\bar{I}) \leqq R\wedge\bar{I}$

(3)　$(R\wedge\bar{I})\times R \leqq R\wedge\bar{I}$

(4)　$R^2 \leqq R$，$\triangledown R \leqq I$

(5)　$R^2 \leqq \triangle R\vee(R\wedge I)$

(6)　$(R\wedge\bar{I})^2 \leqq \triangle R$

(7)　$R\times(R\wedge\bar{I}) \leqq \triangle R$

(8)　$(R\wedge\bar{I})\times R \leqq \triangle R$

(9)　$R^2 \leqq R$，$R^2 \leqq \overline{R'}\vee I$

(10)　$R^2 \leqq R$，$(R\wedge\bar{I})^n = O$

上の性質27の$(R\wedge\bar{I})^2 \leqq R\wedge\bar{I}$すなわち$R^2 \leqq R$，$\triangledown R \leqq I$と同値な条件としては，ここで示したもの以外にもいくつかの条件が知られている［8，12］。

［性質28］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$，$R\wedge I = O$

(2)　$R\times(R\wedge\bar{I}) \leqq R\wedge\bar{I}$，$R\wedge I = O$

(3)　$(R\wedge\bar{I})\times R \leqq R\wedge\bar{I}$，$R\wedge I = O$

(4)　$R^2 \leqq R$，$\triangledown R \leqq I$，$R\wedge I = O$

(5)　$R^2 \leqq \triangle R\vee(R\wedge I)$，$R\wedge I = O$

(6)　$(R\wedge\bar{I})^2 \leqq \triangle R$，$R\wedge I = O$

(7)　$R\times(R\wedge\bar{I}) \leqq \triangle R$，$R\wedge I = O$

(8)　$(R\wedge\bar{I})\times R \leqq \triangle R$，$R\wedge I = O$

(9)　$R^2 \leqq R$，$R^2 \leqq \overline{R'}\vee I$，$R\wedge I = O$

(10)　$R^2 \leqq R$，$(R\wedge\bar{I})^n = O$，$R\wedge I = O$

(証明)　性質26によって

$$R^2 \leqq R,\ R\wedge I = O \Longleftrightarrow (R\wedge\bar{I})^2 \leqq R\wedge\bar{I},\ R\wedge I = O$$

であるから，性質27による。　(証明終)

上の性質中の$R\wedge I=O$を３．２節で示した同値な条件で置き換えることができる。同様に(4), (9), (10)の$R^2\leqq R$についても，３．１節で示した同値な条件で置き換えることができる。

なお，(4)の$\nabla R\leqq I$に関しては，以下の性質30から性質33に示すような同値条件が知られており，$\nabla R\leqq I$をこれらの同値条件で置き換えることができる。しかし，この(4)に関しては

$$R^2\leqq R,\ \nabla R\leqq I,\ R\wedge I=O\Longleftrightarrow R^2\leqq R,\ R\wedge I=O$$

であるので，$\nabla R\leqq I$は冗長な条件となっている。

また(5)に関しては，明らかに

$$R^2\leqq \triangle R\vee(R\wedge I),\ R\wedge I=O\Longleftrightarrow R^2\leqq \triangle R,\ R\wedge I=O$$

となるが，一般に

$$R^2\leqq \triangle R\Longleftrightarrow R^2\leqq R,\ R\wedge I=O$$

となることが知られているので［11］,

$$R^2\leqq \triangle R\vee(R\wedge I),\ R\wedge I=O\Longleftrightarrow R^2\leqq \triangle R$$

となる。

さらに，(9)に関しては

$$R^2\leqq R,\ R^2\leqq \overline{R'}\vee I$$
$$\Longleftrightarrow R^2\leqq R\wedge(\overline{R'}\vee I)=(R\wedge\overline{R'})\vee(R\wedge I)=\triangle R\vee(R\wedge I)$$

となるが，これは(5)の条件の前半であり，結局，条件の(5)と(9)は本質的に同一である。

最後の(10)の$(R\wedge\bar{I})^n=O$に関しては，次の性質29で示す同値な条件で置き換えることができる。明らかに，この(10)は$R\wedge I=O$のとき$R\wedge\bar{I}=R$であるから

$$R^2\leqq R,\ (R\wedge\bar{I})^n=O,\ R\wedge I=O$$
$$\Longleftrightarrow R^2\leqq R,\ R^n=O,\ R\wedge I=O$$
$$\Longleftrightarrow R^2\leqq R,\ R^n=O$$
$$\Longleftrightarrow R^2\leqq R,\ R\wedge I=O\quad(\text{性質14})$$

となる。

［性質29］

次の条件は同値である。

(1)　$(R \wedge \bar{I})^n = O$

(2)　$(R \wedge \bar{I})^+ \wedge I = O$

(3)　$((R \wedge \bar{I})^+)^n = O$

(4)　$I \vee (R \wedge \bar{I}) \vee (R \wedge \bar{I})^2 \vee \cdots \vee (R \wedge \bar{I})^{n-1} \leqq \overline{R'} \vee I$

(5)　$I \vee R \vee R^2 \vee \cdots \vee R^{n-1} \leqq \overline{R'} \vee I$

（証明）　(1)$\Longleftrightarrow$(2)$\Longleftrightarrow$(3)　性質22による。

(1)$\Longleftrightarrow$(4)　性質23による。

(4)$\Longrightarrow$(5)　すべてのl($0 \leqq l \leqq n-1$)に対して，

$$r_{ij}^{(l)} \leqq \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij}$$

となること，すなわち，あるl($0 \leqq l \leqq n-1$)に対して$r_{ij}^{(l)} = 1$のとき，$\overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$となることを示す。

$i = j$のときは$\delta_{ij} = 1$となり，明らかであるので，$i \neq j$とする。

(a)　$l = 0$のとき

$r_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$であるから明らかに

$$r_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \leqq \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij}$$

(b)　$l = 1$のとき

$r_{ij}^{(1)} = r_{ij}$で$i \neq j$であるから，$r_{ij}^{(1)} = 1$のとき$R \wedge \bar{I}$の(i, j)要素が1となり，(4)によって$\overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$となる。

(c)　$l \geqq 2$のとき

$r_{ij}^{(l)} = 1$とすれば，適当な$k(1)$, $k(2)$, …, $k(l-1)$に対して

$$r_{ik(1)} \wedge r_{k(1)k(2)} \wedge \cdots \wedge r_{k(l-1)j} = 1$$

となる。この左辺から$r_{kk} = 1$ ($k \in \{i, k(1), k(2), \cdots, k(l-1), j\}$)となるものを除けば$r_{ij} = 1$，または適当な$m$($2 \leqq m \leqq l$)および$p(1)$, $p(2)$, …, $p(m-1)$に対して

$$r_{ip(1)} \wedge r_{p(1)p(2)} \wedge \cdots \wedge r_{p(m-1)j} = 1,$$

$$i \neq p(1),\ p(1) \neq p(2),\ \cdots,\ p_{(m-1)} \neq j$$

となる。したがって$R \wedge \bar{I}$または$(R \wedge \bar{I})^m$の(i, j)要素が1となり，(4)によって

$\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}=1$ となる。

(5)⇒(4)　$I\vee(R\wedge\bar{I})\vee(R\wedge\bar{I})^2\vee\cdots\vee(R\wedge\bar{I})^{n-1}$

$\leqq I\vee R\vee R^2\vee\cdots\vee R^{n-1}\leqq\overline{R'}\vee I$　(証明終)

上の性質の(4)(5)から

すべての l $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ に対して $(R\wedge\bar{I})^l\leqq\overline{R'}\vee I$

$\Longleftrightarrow$ すべての l $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ に対して $R^l\leqq\overline{R'}\vee I$

となる。しかし，一般には，すべての l $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ に対して，

$$(R\wedge\bar{I})^l\leqq\overline{R'}\vee I\Longleftrightarrow R^l\leqq\overline{R'}\vee I$$

とはならない。いま $l=2$，

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

とおけば，$(R\wedge\bar{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$ であるけれども $R^2\leqq\overline{R'}\vee I$ とはならない。

なお，上の性質29の(1)と(2)の同値性は文献［8］でも述べられており，また，この文献［8］には，上記以外の $(R\wedge\bar{I})^n=O$ と同値な条件も示されている。

［性質30］［5，6，8，10，11，17，22］

次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R\leqq I$

(2)　$R\leqq\overline{R'}\vee I$

(3)　$(R\wedge\bar{I})^2\wedge I=O$

(4)　$\nabla(R\wedge\bar{I})=O$

(5)　$\triangle R=R\wedge\bar{I}$

(6)　$R\vee I\leqq\overline{R'}\vee I$

(7)　$R=\triangle R\vee(R\wedge I)$

(8)　$R\wedge\bar{I}\leqq\overline{R'}$

(9)　$R\wedge\bar{I}\leqq\overline{R'}\vee I$

(10)　$\nabla R=R\wedge I$

(11)　$R\leqq\overline{R'}\vee(R\wedge I)$

［性質31］

次の条件は同値である。

(1)　$\triangledown R \leqq I$

(2)　$\triangle(R \wedge \bar{I}) = R \wedge \bar{I}$

(3)　$\triangledown(R \wedge \bar{I}) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(4)　$\triangledown((R \wedge \bar{I})^3) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(5)　$\triangledown((R \wedge \bar{I})^5) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(6)　すべてのl($l=0$, 1, 2, …)に対して$\triangledown((R \wedge \bar{I})^{2l+1}) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(7)　あるl($l=0$, 1, 2, …)に対して$\triangledown((R \wedge \bar{I})^{2l+1}) \leqq \bar{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(証明)　性質30(1)(4)によって

$$\triangledown R \leqq I \Longleftrightarrow \triangledown(R \wedge \bar{I}) = O$$

であるから，性質16(2), (6), (7), (8), (9), (10)のRを$R \wedge \bar{I}$で置き換えればよい。

(証明終)

なお，(2)の$\triangle(R \wedge \bar{I})$については，以下の性質32の証明(4)⇒(5)において示すように

$$\triangle(R \wedge \bar{I}) = \triangle R$$

となる。

次の性質はほとんど明らかであり，また一部のものはよく知られている［7, 8, 10, 14, 22］。

［性質32］

次の条件は同値である。

(1)　$\triangledown R \leqq I$

(2)　$R \wedge R' \wedge \bar{I} = O$

(3)　$\bar{I} \leqq \bar{R} \vee \overline{R'}$

(4)　$R \wedge \bar{I} \leqq \triangle R$

(5)　$R \wedge \bar{I} \leqq \triangle(R \wedge \bar{I})$

(6)　$R \wedge \bar{I} \leqq \overline{R'} \wedge \bar{I}$

(7)　$\triangledown R \leqq R \wedge I$

(8)　$R \leqq \triangle R \vee (R \wedge I)$

(9)　$R \leqq \triangle R \vee I$

(10)　$R' = \triangle(\overline{R}) \vee (R \wedge I)$

(11)　$R' \leqq \triangle(\overline{R}) \vee (R \wedge I)$

(12)　$R' \leqq \triangle(\overline{R}) \vee I$

(13)　$R' \leqq \overline{R} \vee (R \wedge I)$

(14)　$R' \leqq \overline{R} \vee I$

(15)　$R' \vee I = \triangle(\overline{R}) \vee I$

(16)　$R' \vee I \leqq \triangle(\overline{R}) \vee I$

(17)　$R' \vee I \leqq \overline{R} \vee I$

(18)　$R' \vee \overline{R} = \overline{R} \vee I$

(19)　$R' \vee \overline{R} \leqq \overline{R} \vee I$

(証明)　(1)$\Longleftrightarrow$(2)

$$\triangledown R \leqq I \Longleftrightarrow R \wedge R' \leqq I \Longleftrightarrow R \wedge R' \wedge \overline{I} = O$$

(2)$\Longleftrightarrow$(3)

$$R \wedge R' \wedge \overline{I} = O \Longleftrightarrow R \wedge R' \wedge \overline{I} \leqq O \Longleftrightarrow \overline{I} \leqq \overline{R} \vee \overline{R'}$$

(3)$\Rightarrow$(4)　$\overline{I} \leqq \overline{R} \vee \overline{R'}$

$$R \wedge \overline{I} \leqq R \wedge (\overline{R} \vee \overline{R'}) = R \wedge \overline{R'} = \triangle R$$

(4)$\Rightarrow$(5)

$$\begin{aligned} \triangle(R \wedge \overline{I}) &= R \wedge \overline{I} \wedge \overline{(R \wedge \overline{I})'} \\ &= R \wedge \overline{I} \wedge (\overline{R'} \vee I) \\ &= R \wedge \overline{I} \wedge \overline{R'} \\ &= R \wedge \overline{R'} = \triangle R \end{aligned}$$

であるから,

$$R \wedge \overline{I} \leqq \triangle R = \triangle(R \wedge \overline{I})$$

(5)$\Rightarrow$(6)

$$R \wedge \overline{I} \leqq \triangle(R \wedge \overline{I}) = R \wedge \overline{I} \wedge \overline{R'} \leqq \overline{R'} \wedge \overline{I}$$

(6)$\Rightarrow$(7)　$R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'} \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'}$

$$R \wedge \overline{I} \leqq \overline{R'}$$

$$R \leqq \overline{R'} \vee I$$

$$R \wedge R' \leqq (\overline{R'} \vee I) \wedge R' = R' \wedge I = R \wedge I$$

$$\nabla R \leqq R \wedge I$$

(7)⇒(8)　$\nabla R \leqq R \wedge I$

$$R \wedge R' \leqq R \wedge I$$

$$R \leqq \overline{R'} \vee (R \wedge I)$$

$$R \wedge R \leqq R \wedge (\overline{R'} \vee (R \wedge I))$$

$$R \leqq (R \wedge \overline{R'}) \vee (R \wedge I) = \triangle R \vee (R \wedge I)$$

(8)⇒(9)　$R \leqq \triangle R \vee (R \wedge I) \leqq \triangle R \vee I$

(9)⇒(10)　$R \leqq \triangle R \vee I$

$$R \leqq (R \wedge \overline{R'}) \vee I$$

$$R' \leqq (R' \wedge \overline{R}) \vee I$$

$$R' = R' \wedge ((R' \wedge \overline{R}) \vee I) = (R' \wedge \overline{R}) \vee (R' \wedge I)$$

$$R' = (R' \wedge \overline{R}) \vee (R' \wedge I)$$

$$R' = \triangle(\overline{R}) \vee (R \wedge I)$$

(10)⇒(11)　明らかである。

(11)⇒(12)　$R' \leqq \triangle(\overline{R}) \vee (R \wedge I) \leqq \triangle(\overline{R}) \vee I$

(12)⇒(13)　$R' \leqq \triangle(\overline{R}) \vee I$

$$R' \leqq (\overline{R} \wedge R') \vee I$$

$$R' \wedge R' \leqq R' \wedge ((\overline{R} \wedge R') \vee I) = (\overline{R} \wedge R') \vee (R' \wedge I)$$

$$R' \leqq \overline{R} \vee (R \wedge I)$$

(13)⇒(14)　$R' \leqq \overline{R} \vee (R \wedge I) \leqq \overline{R} \vee I$

(14)⇒(15)　$R' \leqq \overline{R} \vee I$

$$R' = (\overline{R} \vee I) \wedge R' = (\overline{R} \wedge R') \vee (I \wedge R') = \triangle(\overline{R}) \vee (I \wedge R')$$

$$R' = \triangle(\overline{R}) \vee (I \wedge R')$$

$$R' \vee I = (\triangle(\overline{R}) \vee (I \wedge R')) \vee I = \triangle(\overline{R}) \vee I$$

(15)⇒(16)　明らかである。

(16)⇒(17)　$R' \vee I \leqq \triangle(\overline{R}) \vee I \leqq \overline{R} \vee I$

(17)⇒(18)　$R' \vee I \leqq \overline{R} \vee I$

$(R' \vee I) \vee \overline{R} \leqq (\overline{R} \vee I) \vee \overline{R}$

$R' \vee I \vee \overline{R} \leqq \overline{R} \vee I$

ところで，明らかに

$R' \vee I \vee \overline{R} \geqq \overline{R} \vee I$

であるから

$R' \vee I \vee \overline{R} = \overline{R} \vee I$

また，一般に　$I \leqq R' \vee \overline{R}$であるから

$R' \vee \overline{R} = \overline{R} \vee I$

(18)⇒(19)　明らかである。

(19)⇒(1)　$R' \vee \overline{R} \leqq \overline{R} \vee I$

$(R' \vee \overline{R}) \wedge R \leqq (\overline{R} \vee I) \wedge R$

$R' \wedge R \leqq I \wedge R \leqq I$

$\nabla R \leqq I$　(証明終)

［性質33］

次の条件は同値である。

(1)　$\nabla R \leqq I$

(2)　$\overline{R} \vee \overline{R'} \vee I = E$

(3)　すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して$\nabla (R^{2l+1}) \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(4)　$\nabla R \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(5)　$\nabla (R^3) \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(6)　$\nabla (R^5) \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(7)　あるl(l＝0，1，2，…)に対して$\nabla (R^{2l+1}) \leqq \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1)⟺(2)　明らかに

$\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow R \wedge R' \wedge \overline{I} = O \Longleftrightarrow \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I = E$

(2)⇒(3)　すべてのl(l＝0，1，2，…)に対して

$\nabla (R^{2l+1}) \leqq E = \overline{R} \vee \overline{R'} \vee I$

(3)⇒(4)⇒(7)　明らかである。

(3)⇒(5)⇒(7) 明らかである。

(3)⇒(6)⇒(7) 明らかである。

(7)⇒(1) $r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$とする。このとき$\delta_{ij} = 0$とする。$r_{ij} = 1$，$r_{ji} = 1$だから$\overline{r_{ij}} \vee \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 0$となる。また$r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$から$r_{ii}^{(2)} = 1$となり，すべての$l$($l=0, 1, 2, \cdots$)に対して$r_{ij}^{(2l+1)} = 1$，$r_{ji}^{(2l+1)} = 1$となる。したがって$r_{ij}^{(2l+1)} \wedge r_{ji}^{(2l+1)} = 1$となり，$\overline{r_{ij}} \vee \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$となる。しかし，これは矛盾する。ゆえに$r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$のとき$\delta_{ij} = 1$となる。 (証明終)

［性質34］［5，10，12］

$\bigtriangledown R \leqq I$のとき，次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$

(2) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(3) $R^2 \leqq R \vee I$

(4) $(R \vee I)^2 \leqq R \vee I$

(5) $(\triangle R)^2 \leqq R$

(6) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee I$

(7) $(\triangle R)^2 \leqq R \vee I$

［性質35］

次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$

(2) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$，$\bigtriangledown R \leqq I$，$R \wedge I = O$

(3) $R^2 \leqq R \vee I$，$\bigtriangledown R \leqq I$，$R \wedge I = O$

(4) $(R \vee I)^2 \leqq R \vee I$，$\bigtriangledown R \leqq I$，$R \wedge I = O$

(5) $(\triangle R)^2 \leqq R$，$\bigtriangledown R \leqq I$，$R \wedge I = O$

(6) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee I$，$\bigtriangledown R \leqq I$，$R \wedge I = O$

(7) $(\triangle R)^2 \leqq R \vee I$，$\bigtriangledown R \leqq I$，$R \wedge I = O$

(証明) 性質28(1)(4)によって

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 \leqq R,\ \bigtriangledown R \leqq I,\ R \wedge I = O$$

であるから，性質34による。 (証明終)

上の性質中の(2)に関しては性質27によって

$$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I},\ \ \triangledown R\leqq I,\ \ R\wedge I=O$$
$$\Longleftrightarrow(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I},\ \ R\wedge I=O$$

となり，$\triangledown R\leqq I$は冗長な条件となる。しかし，他の(3)−(7)に関しては，$\triangledown R\leqq I$は冗長ではなくて必要である。これは，Rとして

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えてみれば明らかである。

また，この性質35中の$R\wedge I=O$は，すでに示している3．2節における同値な条件で置き換えることができる。同じく，$\triangledown R\leqq I$は性質30から性質33で示した同値な条件で置き換えることができる。

［性質36］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R,\ \ R\wedge I=O$

(2)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I},\ \ \triangledown R=O$

(3)　$R^2\leqq R\vee I,\ \ \triangledown R=O$

(4)　$(R\vee I)^2\leqq R\vee I,\ \ \triangledown R=O$

(5)　$(\triangle R)^2\leqq R,\ \ \triangledown R=O$

(6)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\vee I,\ \ \triangledown R=O$

(7)　$(\triangle R)^2\leqq R\vee I,\ \ \triangledown R=O$

（証明）　$\triangledown R\leqq I,\ \ R\wedge I=O\Longleftrightarrow\triangledown R=O$

であるから性質35による。　（証明終）

なお，上の性質中の$\triangledown R=O$を性質16で示した同値な条件で置き換えることができる。

3．4．2　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$のとき$R\wedge I=O$と同値な条件

すでに示しているように，性質26によって

$$R^2\leqq R,\ \ R\wedge I=O\Longleftrightarrow(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I},\ \ R\wedge I=O$$

となるので，ここで$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$のもとで，$R\wedge I=O$と同値になる条件について調べる。

［性質37］

$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R\wedge I=O$

(2)　$\bigtriangledown R=O$

(3)　すべてのl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(4)　あるl($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(5)　$R^2\leqq\overline{R'}$

(6)　$R^n=O$

(証明)　性質27(1)(4)によって，$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$のとき，$R^2\leqq R$となるから性質13による。　(証明終)

［性質38］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R$，$R\wedge I=O$

(2)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$，すべての$l$($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(3)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$，ある$l$($l=0$，1，2，…)に対して$R^l\leqq\overline{R'}$

(4)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$，$R^2\leqq\overline{R'}$

(5)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$，$R^n=O$

(証明)　性質26によって

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O\Longleftrightarrow(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I},\ R\wedge I=O$$

であるから，性質37による。　(証明終)

なお，すでに性質36(1)(2)で示しているように

$$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O\Longleftrightarrow(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I},\ \bigtriangledown R=O$$

となる。

上記の性質38の(2)，(3)における$R^l\leqq\overline{R'}$については性質18で示した同値な条件で，同じく(4)については$R^2\leqq\overline{R'}$を性質20で示した同値な条件で置き換えることができる。また，性質36(2)および上の性質38の$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}$を性質27に

示した同値な条件で置き換えることができる。例えば

$$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I} \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 \leqq \triangle R$$

であるから，次の性質が得られる。

［性質39］

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$

(2)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \triangle R$, $\triangledown R = O$

(3)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \triangle R$, すべての$l$ (l＝0，1，2，…)に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(4)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \triangle R$, ある$l$ (l＝0，1，2，…)に対して$R^l \leqq \overline{R'}$

(5)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \triangle R$, $R^2 \leqq \overline{R'}$

(6)　$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \triangle R$, $R^n = O$

（証明）　性質36(1)(2)および性質38に対して性質27(1)(6)を適用すればよい。

（証明終）

なお，すでに性質28(1)(6)で示しているように

$$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 \leqq \triangle R,\ R \wedge I = O$$

となる。

上の性質39の(2)に関しては$\triangledown R = O$を性質16で示した同値な条件で置き換えることができる。さらに，(3), (4)に関しては$R^l \leqq \overline{R'}$を性質18で示した同値な条件で，(5)に関しては$R^2 \leqq \overline{R'}$を性質20で示した同値な条件で置き換えることができる。また，(6)に関しても$R^n = O$を性質22および性質23の同値な条件で置き換えることができる。

4．まとめ

与えられた関係が非反射的推移関係となるための多数の必要十分条件を示した。大部分はほとんど自明であって，すでに知られているとおもわれるものも含まれているが，いくつかのものはこれまで一般には知られていないのではないかとおもわれ，非反射的推移関係の議論において有用であると考え

られる。また，本論文で示した各条件を組み合わせることにより，さらに多数の非反射的推移関係の同値条件を得ることができる。

非反射的推移係の同値条件に関してはここで示したもの以外にも，まだ多数の同値条件が存在している。とくに，非対称性のもとでの推移性について考察することにより，種々の同値条件が得られる[14]。これらの同値条件については次の機会に報告したい。

文　献

[1] Carnap, R.: "Introduction to Symbolic Logic and its Applications," Dover Publications, New York (1958).

[2] Chankong, V. and Haimes, Y. Y.: "Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology," North-Holland, New York (1983).

[3] Fishburn, P. C.: "The Theory of Social Choice," Princeton University Press, New Jersey (1973).

[4] 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第34巻，第3・4号，pp.387-405（昭和60年6月）。

[5] 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質II"，山口経済学雑誌，第35巻，第3・4号，pp.281-293（昭和61年1月）。

[6] 橋本　寛："推移関係行列に関するいくつかの十分条件"，山口経済学雑誌，第35巻，第5・6号，pp.425-436（昭和61年5月）。

[7] 橋本　寛："Negatively Transitive関係の性質"，山口経済学雑誌，第36巻，第1・2号，pp.41-58（昭和61年9月）。

[8] 橋本　寛："連結的関係に関する若干の性質"，山口経済学雑誌，第36巻，第5・6号，pp.245-261（昭和62年5月）。

[9] 橋本　寛："連結性のもとでの関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第37巻，第1・2号，pp.75-88（昭和62年9月）。

[10] 橋本　寛："連結的関係行列の初等的性質"，山口経済学雑誌，第38巻，第3・4号，pp.557-576（平成元年7月）。

[11] 橋本　寛："変更された推移性と連結的関係行列"，山口経済学雑誌，第39巻，第3・4号，pp.397-416（平成2年11月）。

[12] 橋本　寛："反対称的推移関係"，山口経済学雑誌，第41巻，第5・6号，pp.473-489（平成6年5月）。

[13] 橋本　寛："連結的な反対称的推移関係", 山口経済学雑誌, 第42巻, 第1・2号, pp.53-74（平成6年9月）。

[14] 橋本　寛："ほとんど推移的な関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第43巻, 第3・4号, pp.273-288（平成7年5月）。

[15] 橋本　寛："反射的な連結的関係に関する若干の性質", 山口経済学雑誌, 第44巻, 第5・6号, pp.495-515（平成8年3月）。

[16] 橋本　寛："非反射的推移関係", 山口経済学雑誌, 第46巻, 第4号, pp.479-498（平成10年7月）。

[17] 橋本　寛："関係行列の初歩的な同値条件と非反射的推移性", 山口経済学雑誌, 第47巻, 第1号, pp.29-47（平成11年3月）。

[18] 柏木芳美："関係代数的証明", 山口経済学雑誌, 第46巻, 第3号, pp.259-269（平成10年5月）。

[19] Luce, R. D.: "A note on Boolean matrix theory," Proc. Amer. Math. Soc. 3, pp.382-388 (1952).

[20] Roberts, F. S.: "Measurement Theory, with Applications to Decision-making, Utility, and the Social Sciences," Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1979).

[21] Rudeanu, S.: "Boolean Functions and Equations," North-Holland, Amsterdam (1974).

[22] Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).

[23] Schröder, E.: "Algebra der Logik. Vol. III," Teubner, Leipzig (1895) (Chelsea Publ. Co., New York, 1966).