技術進歩をともなう二部門成長モデル〔II〕

木　藤　正　典

1　はしがき

私は本誌前号（〔7〕）において，biased technical change をもつ二部門成長論のモデルを innovation possibility function を用いて試作した。そのモデルにおいては，資本労働を生産要素とするm次同次生産関数が仮定された。しかし$m \leqq 1$とは限らないため，各部門での均衡条件として通常の限界生産力法則は採用することができず，そのため生産物市場の不完全性を示すηなるパラメーターを導入した。（〔７〕，Ｐ．６）

その場合m，ηは何れも各部門で同一の値をとると仮定されていた。しかしながら，投資財部門と消費財部門とにおいて，規模生産性を示すパラメーターmが同一の値を取る必要性はなく，また市場の不完全性を示すパラメーターηが同一の値を取る必然性も考えられない。従って，この点を一般化すれば，拙論〔７〕は如何に拡張されるかを考察するのが本論文のねらいである。

推論の順序および結論はほぼ前論文〔７〕と同じであるが，先ず静学的均衡を考え（３，４節），次に規模生産性および市場の不完全性に関する比較静学的な考察を行ない（５節），終りに biased technical change をもつ動学的理論を述べたい。

2　基本関係式

投資財生産部門を第１部門，消費財生産部門を第２部門とする二部門モデルを考え，添文字１，２にてそれぞれの部門の量であることを示す。なお添文字

のない量は原則として全体系に対する量であることを示す。各部門の生産関数を

$$Y_i = F_i(K_i,\ L_i,\ t),\ (i=1,\ 2,\ K_i>0,\ L_i>0) \cdots (2,\ 1)$$

にて表わす。ただし，Y_i, K_i, L_i, t はそれぞれ生産量，資本量，労働量，時間を示し，F_i は K_i, L_i の m_i 次同次関数（$m_i>0$）であると仮定する。また関数（2，1）は各変数に関して必要な回数まで連続的偏微分可能であるとし，その偏導関数を Y_{iK}, Y_{iL}, Y_{it} にて表わし，$\dot{Y}_i$ は t に関する導関数を示し，$\widehat{Y}_i$ は増加率を示すものとする。なお

$$F_i>0,\ F_{iK}>0,\ F_{iL}>0,\ F_{iKK}<0$$

と仮定する。次に以下のように諸種の変量を定義する。

$$R_i = \frac{Y_{it}}{Y_i} \qquad \text{（第 i 部門技術進歩率）}$$

$$a_i = \frac{Y_{iK}K_i}{Y_i} \qquad \text{（第 } i \text{ 部門資本生産弾力性）}$$

$$b_i = \frac{Y_{iL}L_i}{Y_i} \qquad \text{（第 } i \text{ 部門労働生産弾力性）}$$

$$k_i = \frac{K_i}{L_i} \qquad \text{（第 } i \text{ 部門資本労働比率）}$$

$$\rho_i = -\left\{\frac{d\,k_i}{d(Y_{iK}/Y_{iL})} \cdot \frac{(Y_{iK}/Y_{iL})}{k_i}\right\} t = \text{一定}$$

（第 i 部門要素代替弾力性）

$p_i = i$ 部門生産物価格

$$p = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{（投資財相対価格）}$$

w = 賃金率

r = 資本利潤率

$$\omega = \frac{w}{r} \qquad \text{（相対賃金）}$$

s_1 = 利潤に対する貯蓄率，（$0<s_1<1$）

s_2 = 賃金に対する貯蓄率 ①，（$0 \leqq s_2 < 1$，$s_2 \leqq s_1$）

$$K = K_1 + K_2 \qquad \text{（全資本量）} \cdots\cdots (2,\ 2)$$

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{(全労働量)} \cdots\cdots (2,\ 3)$$

$$k = \frac{K}{L} \quad \text{(資本労働比率)}$$

$$Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2 \quad \text{(全生産額)} \cdots\cdots (2,\ 4)$$

$$\theta_i = \frac{Y_i p_i}{Y} \quad \text{(第 } i \text{ 部門生産額比率)}$$

以上より

$$a_i + b_i = m_i, \quad (i = 1,\ 2) \cdots\cdots (2,\ 5)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 1 \cdots\cdots (2,\ 6)$$

$$\hat{Y}_i = R_i + a_i \hat{K}_i + b_i \hat{L}_i, \quad (i = 1,\ 2) \cdots\cdots (2,\ 7)$$

$$p_1 Y_1 = s_1 (Y - wL) + s_2 wL \cdots\cdots (2,\ 8)$$

なる関係が成立する。ただし（2，8）においては，投資と貯蓄との均等が仮定されている。さて第1部門と第2部門の総合として，全体系に対して以下の諸量を定義する。

$$R = \theta_1 R_1 + \theta_2 R_2 \quad \text{(価格一定のときの技術進歩率)} \cdots\cdots (2,\ 9)$$

$$\left.\begin{aligned} Y_K &= Y_{1K}\, p_1 \frac{K_1}{K} + Y_{2K}\, p_2 \frac{K_2}{K} \\ Y_L &= Y_{1L}\, p_1 \frac{L_1}{L} + Y_{2L}\, p_2 \frac{L_2}{L} \end{aligned}\right\}^{②} \cdots\cdots (2,\ 10)$$

$$a = \frac{Y_K K}{Y}, \quad b = \frac{Y_L L}{Y} \cdots\cdots (2,\ 11)$$

$$\rho = -\left\{\frac{dk}{d(Y_K/Y_L)} \cdot \frac{(Y_K/Y_L)}{k}\right\}_{t = \text{一定}} \cdots\cdots (2,\ 12)$$

なお（2，9），（2，10）から

$$R = \frac{1}{Y} \quad \frac{\partial}{\partial t}\{Y\}_{p_i = \text{一定}}$$

$$Y_K = \frac{\partial}{\partial K}\{Y\}_{\begin{cases} p_i = \text{一定} \\ K_i \propto K \end{cases}}$$

なる関係が成立する。従ってY_K，a，ρはp_i=一定（$i = 1,\ 2$），$K_i \propto K$（$i = 1,\ 2$）が成立するという条件付での資本の限界価値生産力，資本の価

値生産弾力性，価値生産における要素代替弾力性を示すものである。また次の関係式が成立する。

$$\left.\begin{aligned} a&=a_1\theta_1+a_2\theta_2 \\ b&=b_1\theta_1+b_2\theta_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2,\ 13)$$

$$a+b=m_1\theta_1+m_2\theta_2 \cdots\cdots (2,\ 14)$$

$$\widehat{Y}=R+(\theta_1 a_1\widehat{K}_1+\theta_2 a_2\widehat{K}_2)+(\theta_1 b_1\widehat{L}_1+\theta_2 b_2\widehat{L}_2) +(\theta_1\widehat{p}_1+\theta_2\widehat{p}_2) \cdots\cdots (2,\ 15)$$

$$a\widehat{Y}_K+b\widehat{Y}_L=m\widehat{Y}+\dot{m}-(a\widehat{K}+b\widehat{L}) \cdots\cdots (2,\ 16)$$

ただし$m=m_1\theta_1+m_2\theta_2\ (=a+b)$ ……(2，17)

である。従って

$$\widehat{a}=\frac{m-a}{m}\left\{\widehat{Y}_K-\widehat{Y}_L+\widehat{K}-\widehat{L}+\frac{\dot{m}}{m-a}\right\} \cdots\cdots (2,\ 18)$$

なる関係式が成立する。また以後次の仮定が成立するものとする。

〔仮定１〕　$m_i<1$ のときは $\rho_i>0$，$(i=1,\ 2)$

さて $F_i(K_i,\ L_i,\ t)$ の同次性より

$$F_i(K_i,\ L_i,\ t)=L_i^{m_i}F_i(k_i,\ 1,\ t)=L_i^{m_i}f_i(k_i,\ t)$$

とおく。静学的考察の範囲では t はパラメーターにすぎないから，第５節末までは f_i は k_i のみの関数と考えて，f_i の k_i に関する（偏）導関数を f_i'，f_i'' 等で表わせば，F_i の偏導関数に関する仮定から

$$F_{iK}=L_i^{m_i-1}f_i'>0,\quad F_{iL}=L_i^{m_i-1}(m_if_i-f_i'k_i)>0,$$

$$F_{iKK}=L_i^{m_i-2}f_i''<0$$

となる。従って

$$\left.\begin{aligned} &f_i>0,\quad f_i'>0,\quad f_i''<0 \\ &m_if_i-f_i'k_i>0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2,\ 19)$$

を得る。然るに

$$\rho_i=\frac{f_i'(m_if_i-f_i'k_i)}{k_i\{(m_i-1)f_i'^2-m_if_if_i''\}}$$

であるから，$m_i\geqq 1$ のときは $\rho_i>0$ である。故に結局〔仮定１〕とよりm_i の

値に拘らず

$$\rho_i > 0, \quad (i = 1,\ 2) \quad \cdots\cdots (2,\ 20)$$

が成立する。

① s_1, s_2は例外的な添文字の使用法である。なおs_1, s_2はtの関数と考える。
② Y_K, Y_LはKまたはLに関する偏導関数を示す記号ではない。

3　静学的均衡

静学的均衡の条件として次のような限界生産力法則を仮定する。

〔仮定２〕
$$\frac{F_{iK}}{r} = \frac{F_{iL}}{w} = \frac{1}{p_i(1-\eta_i)}, \quad (i = 1,\ 2) \quad \cdots\cdots (3,\ 1)$$

ただし，η_iは市場の不完全性を示すパラメーターであって [①]

$$0 \leqq \eta_i < 1, \quad 0 < \delta_i \equiv m_i(1-\eta_i) \leqq 1, \quad (i = 1,\ 2) \quad \cdots\cdots (3,\ 2)$$

を満足するものとする。（３，１）とF_iの同次性とより

$$Y_i = \frac{rK_i + wL_i}{m_i(1-\eta_i)p_i} = \frac{rK_i + wL_i}{\delta_i p_i}, \quad (i = 1,\ 2) \quad \cdots\cdots (3,\ 3)$$

$$Y = r\left(\frac{K_1}{\delta_1} + \frac{K_2}{\delta_2}\right) + w\left(\frac{L_1}{\delta_1} + \frac{L_2}{\delta_2}\right) \cdots\cdots (3,\ 4)$$

を得る。第i部門の企業利潤をπ_iとし，全利潤をπとすれば（３，２）より

$$\pi_i = p_i Y_i - (rK_i + wL_i) = p_i Y_i(1-\delta_i) \geqq 0$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 \geqq 0$$

となる [②]。

さて次にK, Lが与えられたとき，（２，１），（２，２），（２，３），（２，８），（３，１）の９個の関係式を満足するY_i, K_i, L_iの値およびp_i, r, wの比の値が存在するか否かについて考察する。先ず

$$y_i = \frac{Y_i}{L}, \quad l_i = \frac{L_i}{L}, \quad (i = 1,\ 2)$$

とおけば（２，１），（２，２），（２，３），（２，８），（３，１）からy_i, k_i, l_i, p, ωに関する次の８個の関係式を導くことができる。

$$y_i = L^{m_i - 1} l_i f_i, \quad (i = 1,\ 2) \quad \cdots\cdots (3,\ 6)$$

$$l_1k_1+l_2k_2=k \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 7)$$

$$l_1+l_2=1 \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 8)$$

$$\omega+k_i=\frac{m_if_i}{f_i'},\quad (i=1,\ 2) \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 9)$$

$$p=\frac{l_2^{m2-1}f_2'}{l_1^{m1-1}f_1'}L^{m2-m1}\left(\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1}\right) \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 10)$$

$$y_1=\frac{1}{m_1}[s_1\{l_1(k_1+\omega)+l_2(k_2+\omega)\delta\}-\theta\omega]f_1'(l_1L)^{m1-1} \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 11)$$

ただし $\delta=\dfrac{\delta_1}{\delta_2}$, $\theta=(s_1-s_2)\delta_1\leqq s_1\delta_1\leqq s_1\delta$ ……………………（3，12）

とする。以下では k, Lが与えられたとき，（3，6）〜（3，11）の８個の関関式を満足するy_i, l_i, k_i, p, ωの値が存在するか否かについて考える。

先ず（2，19），（3，9）より

$$\omega=\frac{mf_i}{f_i'}-k_i>0 \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 13)$$

を得る。なお（3，13）より定まる関数 $\omega=\omega(k_i)$ とすれば ρ_i の定義式と（3，1）とから

$$\rho_i=\frac{dk_i}{d\omega}\cdot\frac{\omega}{k} \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 14)$$

を得るから（2，20）から

$$\frac{dk_i}{d\omega}>0 \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 15)$$

故に $\omega=\omega(k_i)$ の逆関数 $k_i=k_i(\omega)$ は１意的に定まる。従って

$$z=\omega+k,\quad z_i=\omega+k_i,\ (i=1,\ 2) \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 16)$$

とおけば

$$z>k,\quad z_i>k_i \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 17)$$

$$\frac{dz_i}{d\omega}>1,\quad (i=1,\ 2) \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 18)$$

を得る。次に（3，6），（3，11）より y_1 を消去すれば

$$l_1=\frac{s_1\delta z_2-\theta\omega}{A}=\frac{s_1\delta k_2+(s_1\delta-\theta)\omega}{A}>0 \quad\cdots\cdots\quad (3,\ 19)$$

ただし$A=(1-s_1)z_1+s_1\delta z_2=(1-s_1)k_1+s_1\delta k_2+(1-s_1+s_1\delta)\omega$

故に（3, 8）から

$$l_2=\frac{(1-s_1)z_1+\theta\omega}{A}=\frac{(1-s_1)k_1+(1-s_1+\theta)\omega}{A}>0 \quad \cdots (3,\ 20)$$

（3, 7）より $z=l_1z_1+l_2z_2>0$ ……………………………… (3, 21)

故に（3, 19），（3, 20）より

$$z=\frac{gz_1z_2+(z_2-z_1)\theta\omega}{A} \quad \cdots\cdots (3,\ 22)$$

ただし $g=1-s_1+s_1\delta$, $g>1-s_1>0$

となりzはz_1, z_2の関数である。従ってzはωの関数となり，kはωの関数である。さて（3, 19），（3, 20）より

$$\frac{dz}{d\omega}=\frac{g(l_1z_2z_1'+l_2z_1z_2')+\theta(z_2-z_1)}{A} \quad \cdots\cdots (3,\ 23)$$

ただし $z_i'=\dfrac{dz_i}{d\omega}$, $(i=1,\ 2)$

となる。故に（3, 18），（3, 19），（3, 20）より

$$\frac{dz}{d\omega}-1>\frac{g(l_1z_2+l_2z_1)+\theta(z_2-z_1)}{A}-1$$

$$=\frac{(1-s_1)\delta s_1(k_2-k_1)^2+\theta\{(1-s_1)k_1+s_1\delta k_2\}(k_2-k_1)}{A^2}$$

故に $s_1=s_2$ 或は $k_2\geqq k_1$ であれば $\dfrac{dz}{d\omega}>1$ である。

従って $s_1=s_2$ 或は $k_2\geqq k_1$ であれば

$$\frac{dk}{d\omega}>0 \quad \cdots\cdots (3,\ 24)$$

また（3, 22）より

$$k=\frac{gk_1k_2+\{(s_1\delta-\theta)k_1+(1-s_1+\theta)k_2\}\omega}{A}>0 \quad \cdots (3,\ 25)$$

故に $\dfrac{dk}{d\omega}=Pk_1^2+\theta k_2^2+R$ ……………………………… (3, 26)

ただし $P=\dfrac{gk_2'+(s_1\delta-\theta)}{A^2}(1-s_1)>0$

$$Q=\frac{g\,k_1'+(1-s_1+\theta)}{A^2}s_1\delta>0$$

$$R=\frac{1}{A^2}\Big[2\,g\{(s_1\delta-\frac{\theta}{2})k_1'\,k_2+(1-s_1+\frac{\theta}{2})k_2'\,k_1\}\omega$$
$$-\{(1-s_1)(s_1\delta-\theta)+s_1\delta(1-s_1+\theta)\}k_1k_2\Big]$$

ただし $k_i'=\dfrac{d\,k_i}{d\,\omega}$, $(i=1,\ 2)$

を得る。さて（3，14）より $k_i'\omega=k_i\rho_i$ であり

$$\alpha_1=s_1\delta-\frac{\theta}{2},\quad \alpha_2=1-s_1+\frac{\theta}{2}$$

とおけば $\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$ であって

$$R=\frac{2}{A^2}\Big[g\{\alpha_1(\rho_1+\rho_2-1)+(\alpha_2-\alpha_1)\rho_2\}+s_1\delta(s_1\delta-\theta)\Big]k_1k_2$$

となる。従って $\alpha_2\geqq\alpha_1$, $\rho_1+\rho_2-1\geqq1$ なら $R>0$ である。また同様にして

$$R=\frac{2}{A^2}\Big[g\{\alpha_2(\rho_1+\rho_2-1)+(\alpha_1-\alpha_2)\rho_1\}+(1-s_1)(1-s_1+\theta)\Big]k_1k_2$$

であるから $\alpha_1\geqq\alpha_2$, $\rho_1+\rho_2\geqq1$ の場合も $R>0$ である。故に結局（3，24）とより

$$\left.\begin{array}{ll} & (イ)\quad s_1=s_2 \\ \text{或は} & (ロ)\quad k_2\geqq k_1 \\ \text{或は} & (ハ)\quad \rho_1+\rho_2\geqq1 \end{array}\right\}\ \text{なら}\ \frac{d\,k}{d\,\omega}>0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3,\ 27)$$

である。従ってこの場合は（3，25）より定まる関数 $k=k(\omega)$ の逆関数は1意的に定まる。従って（3，13)，（3，15）より $k_i=k_i(k)$，$(i=1,\ 2)$ なる関数が1意的に定まり $\dfrac{d\,k_i}{d\,k}>0$，$(i=1,\ 2)$ となる。従って（3，27）および

$$0\leqq\lim_{k\to0}k_i(k)<\lim_{k\to\infty}k_i(k),\quad (i=1,\ 2)\quad\cdots\cdots\cdots\ (3,\ 28)$$

が成立すれば[3]，与えられた k の値に対して（3，28），（3，19），（3，20），（3，13）より k_i, l_i, ω の正の値が1意的に定まり，更に L が与えられれば，（3，6），（3，10）より y_i, p の正の値が1意的に定まる。

故に（3，27），（3，28）が成立すれば，与えられたK，Lに対して（3，6）～（3，11）に唯1組の均衡値が存在し，従って（2，1），（2，2）（2，3），（2，8），（3，1）に対しても唯1組の均衡値が存在する。以後は唯1組の均衡値の存在を仮定し，また次の関係式を仮定する。

〔仮定3〕　$\rho>0$

① $c_i=\dfrac{K_i}{Y_i}$，$d_i=\dfrac{L_i}{Y_i}$とおけば，（3，1）とF_iの同次性より

$$\frac{c_iF_{iK}+d_iF_{iL}}{c_ir+d_iw}=\frac{m_i}{c_ir+d_iw}=\frac{1}{p_i(1-\eta_i)}$$

故に　$\delta_i=\dfrac{1}{1+r_i}$とおけば

$$(c_ir+d_iw)\ (1+r_i)=p_i,\quad (i=1,\ 2)$$

となる。特に$m_i=1$のときは$\eta_i=\dfrac{r_i}{1+r_i}\fallingdotseq r_i$（ただし$r_i\ll 1$とする）となり，$\eta_i$は full-cost theory における利潤率にあたる。

② （3，3）より　$\delta_i=\dfrac{rK_i+wL_i}{p_iY_i}$　は所得率を示す。従って　$1-\delta_i$　は企業利潤率を示す。

③ （3，28）は次にのべるようにして$\lim\limits_{k\to 0}k_i=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}k_i=\infty$と同等となる。それは先づ（3，7）より$k\geqq\min(k_1,\ k_2)$であるから$k\to 0$なら$k_1$，$k_2$の何れかは0に収束する。今$k_1\to 0$とすれば，（3，28）より$\lim\limits_{k\to 0}k_2=k_2^0\geqq 0$でるが，$k_2^0>0$　と仮定する。従って（3，13）より

$$\lim_{ki\to 0}\omega=\omega_0^{(i)},\quad (i=1,\ 2)$$

とすれば　$k_2^0>0$　より　$\omega_0^{(1)}>\omega_0^{(2)}\geqq 0$　である。そのときは（3，25）より

$$\lim_{k1\to 0}k=\frac{(1-s_1+\theta)\,k_2^0\,\omega_0^{(1)}}{s_1\delta k_0^2+g\,\omega_0^{(1)}}>0$$

となる。これは仮定に反するから　$k_2^0=0$　でなければならない。故に

$$\omega_0^{(1)}=\omega_0^{(2)}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3,\ 29)$$

である。逆に（3，29）が成立すれば$\lim\limits_{ki\to 0}k=0$が成立する。

同様にして，（3，13）より$\lim\limits_{ki\to\infty}\omega=\omega_\infty^{(i)}$，（$i=1$，2）とおけば，（3，28）の後半が成立するための条件は

$$\omega_\infty^{(1)}=\omega_\infty^{(2)}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3,\ 30)$$

となり，$\lim\limits_{k\to\infty}k_i=\infty$　となる。

4 巨視体系

前節より静学的均衡においてはK，L，t以外の均衡値はK，L，tの関数として1意的に定まる。従って

$$Y=F(K,\ L,\ t) \quad \cdots\cdots (\cdots 4,\ 1)$$

なる関数が定まる。そのような巨視体系について考察することとする。先ず（3，1）より

$$Y_{iK}p_i=\frac{r}{1-\eta_i},\quad Y_{iL}p_i=\frac{w}{1-\eta_i},\quad (i=1,\ 2)$$

故に
$$Y_K=\frac{r\overline{K}}{K},\quad Y_L=\frac{w\overline{L}}{L} \quad \cdots\cdots (4,\ 2)$$

ただし
$$\overline{K}_i=\frac{K_i}{1-\eta_i},\quad \overline{L}_i=\frac{L_i}{1-\eta_i},\ (i=1,\ 2)$$

$$\overline{K}=\overline{K}_1+\overline{K}_2,\quad \overline{L}=\overline{L}_1+\overline{L}_2,\quad \overline{k}=\frac{\overline{K}}{\overline{L}}$$

とする。従って

$$\frac{Y_L}{Y_K}=\omega\frac{k}{\overline{k}} \quad \cdots\cdots (4,\ 3)$$

となる。よって通常の限界生産力説によるモデルでは成立する

（資本と労働との限界生産力の比）＝（利潤率と賃金率との比）

なる関係式は一般には成立しない[①]。それが成立するのは$\overline{k}=k$の場合即ち

$$\overline{k}-k=\frac{\dfrac{K_1}{1-\eta_1}+\dfrac{K_2}{1-\eta_2}}{\dfrac{L_1}{1-\eta_1}+\dfrac{L_2}{1-\eta_2}}-\frac{K_1+K_2}{L_1+L_2}$$

$$=\frac{(\eta_1-\eta_2)\ (k_1-k_2)}{L_1L_2(L_1+L_2)\{(1-\eta_2)L_1+(1-\eta_1)L_2\}}=0$$

即ち　$\eta_1=\eta_2$か，$k_1=k_2$の場合のみである。

次にまた（3，1）より

$$a_i=\frac{r\overline{K}_i}{p_iY_i},\quad b_i=\frac{w\overline{L}_i}{p_iY_i},\quad (i=1,\ 2) \quad \cdots\cdots (4,\ 4)$$

故に
$$a_i\theta_i=\frac{r\overline{K}_i}{Y},\quad b_i\theta_i=\frac{w\overline{L}_i}{Y},\quad (i=1,\ 2)$$

故に（2，13）より

$$a=\frac{r\overline{K}}{Y},\quad b=\frac{w\overline{L}}{Y} \quad\cdots\cdots (4,\ 5)$$

故に $\dfrac{a_i\theta_i}{a}=\dfrac{\overline{K}_i}{\overline{K}},\quad \dfrac{b_i\theta_i}{b}=\dfrac{\overline{L}_i}{\overline{L}},\quad (i=1,\ 2)$ ……………… (4，6)

故に

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_1\theta_1\widehat{K}_1+a_2\theta_2\widehat{K}_2}{a}&=\widehat{K}\\ \frac{b_1\theta_1\widehat{L}_1+b_2\theta_2\widehat{L}_2}{b}&=\widehat{L}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots (4,\ 7)$$

故に（2，15）とより

$$\widehat{Y}=R+a\widehat{K}+b\widehat{L}+(\theta_1\widehat{p}_1+\theta_2\widehat{p}) \quad\cdots\cdots (4,\ 8)$$

故に（2，16）とより

$$a\widehat{Y}_K+b\widehat{Y}_L=mR+m(a\widehat{K}+b\widehat{L})-(a\widehat{K}+b\widehat{L})$$
$$+m(\theta_1\widehat{p}_1+\theta_2\widehat{p}_2)+\dot{m} \quad\cdots\cdots (4,\ 9)$$

なる関係式を得る。

更に（4，5）より

$$\frac{b}{a}=\frac{\omega}{k} \quad\cdots\cdots (4,\ 10)$$

（4，3）より

$$\frac{m}{a}-1=\frac{1}{k}\left(\frac{Y_L}{Y_K}\right)$$

故に t =一定のもとで両辺を k で微分すれば

$$-\frac{m}{a^2}\frac{da}{dk}=-\frac{1}{k^2}\left(\frac{Y_L}{Y_K}\right)+\frac{1}{k}\frac{d}{dk}\left(\frac{Y_L}{Y_K}\right)$$

然るに $\rho=\dfrac{dk}{d\left(\dfrac{Y_L}{Y_K}\right)}\cdot\dfrac{(Y_L/Y_K)}{k}$

であるから

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{Y_L}{Y_K}\right)=\frac{1}{\rho k}\cdot\frac{Y_L}{Y_K}$$

故に　$\dfrac{da}{dk}=\dfrac{a^2}{mk^2}\left(\dfrac{Y_L}{Y_K}\right)\left(1-\dfrac{1}{\rho}\right)$ ……………………………………… (4, 11)

故に $\rho\gtreqqless 1$ に従って$\dfrac{da}{dk}\gtreqqless 0$ である。即ち資本が労働に比して増大するとき，$\rho<1$ なら資本の生産弾力性（従って資本分配率）は減少し，$\rho>1$ ならそれは増加し，$\rho=1$ なら不変である。

① （4，3）より〔仮定3〕の $\rho=\dfrac{dk}{d(Y_L/Y_K)}\cdot\dfrac{(Y_L/Y_K)}{k}>0$ と（3，27）の $\dfrac{dk}{d\omega}>0$ とは同等でない。$\overline{k}=k$（従って $\eta_1=\eta_2$ 又は $k_1=k_2$）の場合のみ両者は同等である。

5 比較静学

前々節より静学的均衡の存在については明らかになったが，本節では全資本量Kと全労働量Lとが所与のとき，パラメーターである m_n, η_i, s_i,（$i=1$, 2）が変化した場合に均衡値は如何に変化するであろうかを考察する。

〔I〕m_i が変化した場合

（3，7），（3，8），（3，19）より

$$\left.\begin{array}{l} l_1k_1+(1-l_1)k_2=k \\ (1-s_1)l_1z_1-s_1\delta l_2z_2+\theta\omega=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5,\ 1)$$

を得るが，m_i が m_i+dm_i に変化したときの l_1, k_1, k_2, ω の変動量を dl_1, dk_1, dk_2, $d\omega$ とし，$\dfrac{dm_i}{m_i}$ を $\hat{d}m_i$ にて表わせば（5，1），（3，9）より

$$\left.\begin{array}{ll} (k_1-k_2)dl_1+l_1dk_1+l_2dk_2 & =0 \\ dk_1 \quad -k_1'd\omega & =-z_1k_1'\hat{d}m_1 \\ dk_2-k_2'd\omega & =-z_2k_2'\hat{d}m_2 \\ A\cdot dl_1+l_1(1-s_1)dk_1-l_2s_1\delta dk_2+Bd\omega & =s_1\delta l_2z_2\hat{d}\delta_1-\theta\omega\hat{d}\theta \end{array}\right\}$$

……………………………… (5, 2)

を得る。ただし（3，12）より

$$\left.\begin{aligned}\hat{d}\delta_1&=\frac{d\delta}{\delta}=\hat{d}m_1-\hat{d}m_2\\ \hat{d}\theta&=\hat{d}m_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5,\ 3)$$

また　$B=l_1(1-s_1)-l_2s_1\delta+\theta$ ……………………………（5，4）

である。先ず m_1 のみが変動する場合を考え，$\hat{d}m_2=0$ とおけば（5，2）より

$$\left.\begin{aligned}dl_1&=\frac{1}{\varDelta}\{(gl_2k_2'-B)k_1'+(1-s_1)(l_1k_1'+l_2k_2')\}l_1z_1\hat{d}m_1\\ dk_1&=-\frac{1}{\varDelta}[(z_2-z_1)\{B-(1-s_1)l_1\}+gl_2z_1k_2']z_1k_1'\hat{d}m_1\\ dk_2&=\frac{1}{\varDelta}\{gz_2k_1'+(1-s_1)(z_2-z_1)\}l_1z_1k_2'\hat{d}m_1\end{aligned}\right\}$$

…………………………（5，5）

を得る。ただし$\varDelta$は（5，2）の左辺の係数の行列式に（－１）を乗じたもので

$$\varDelta=B(z_2-z_1)+g(l_1z_2k_1'+l_2z_1k_2')\cdots\cdots\cdots(5,\ 6)$$

であるが，$\varDelta\fallingdotseq 0$ と仮定する。全く同様にして$\hat{d}m_1=0$，$\hat{d}m_2\fallingdotseq 0$のときは（5，2）より

$$\left.\begin{aligned}dl_1&=-\frac{1}{\varDelta}\{(gl_1k_1'+B)k_2'+s_1\delta(l_1k_1'+l_2k_2')\}l_2z_2\hat{d}m_2\\ dk_1&=\frac{1}{\varDelta}\{gz_1k_2'-s_1\delta(z_2-z_1)\}l_2z_2k_1'\hat{d}m_2\\ dk_2&=-\frac{1}{\varDelta}\{(z_2-z_1)(B+s_1\delta l_2)+gl_1z_2k_1'\}z_2k_2'\hat{d}m_2\end{aligned}\right\}$$

…………………………（5，7）

を得る。さて（5，4）より

$$B=\frac{1}{A}[(1-s_1)s_1\delta(k_2-k_1)+\{(1-s_1)k_1+s_1\delta k_2\}\theta]$$

となり$k_2\geqq k_1$なら$B\geqq 0$である。故に（5，6），（3，24）より$k_2\geqq k_1$又は $\theta=0$（従って$s_1=s_2$)であれば $\varDelta>0$ である。従って（5，5）の第３式より　$z_2\geqq z_1$（即ち　$k_2\geqq k_1$）のとき$\hat{d}m_1>0$，$\hat{d}m_2=0$であれば$dk_2>0$ である。即ち，消費財生産部門の方がより資本使用的であるとき，

生産財生産部門の生産方法が increasing returns がより増強される方向に移動すれば，消費財生産部門の資本労働比率は上昇する。次に $z_2 \geqq z_1$ のとき，（5，7）の第1式と第3式とより $\widehat{d}m_1=0$，$\widehat{d}m_2>0$ なら $dl_1<0$（従って $dl_2>0$），$dk_2<0$ である。即ち消費財生産部門の方がより資本使用的であるとき，消費財生産部門の生産方法が increasing returns がより増強される方向に移動すれば，消費財生産部門の資本労働比率は下落し，労働者は生産財生産部門より消費財生産部門へ移動する。

〔Ⅱ〕　η_i が変化する場合

m_i が変化する場合と同様にして（5，2），（5，1）の後半より

$$\left.\begin{aligned}&(k_1-k_2)dl_1+l_1dk_1+l_2dk_2=0\\&dk_1-k_1'd\omega=0\\&dk_2-k_2'd\omega=0\\&Adl_1+(1-s_1)l_1dk_1-s_1\delta l_2dk_2+Bd\omega\\&\qquad=-\frac{(1-s_1)l_1z_1\eta_1}{1-\eta_1}\widehat{d}\eta_1+\frac{s_1\delta l_2z_2\eta_2}{1-\eta_2}\widehat{d}\eta_2\end{aligned}\right\}\cdots(5,\ 8)$$

を得る。これより

$$\left.\begin{aligned}&dk_1=k_1'd\omega,\quad dk_2=k_2'd\omega\\&dl_1=\frac{l_1k_1'+l_2k_2'}{z_2-z_1}d\omega\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5,\ 9)$$

$$d\omega=-\frac{(z_2-z_1)(1-s_1)l_1z_1\eta_1}{(1-\eta_1)\Delta}\widehat{d}\eta_1+\frac{(z_2-z_1)s_1\delta l_2z_2\eta_2}{(1-\eta_2)\Delta}\widehat{d}\eta_2$$
$$\cdots\cdots(5,\ 10)$$

を得る。故に $d\eta_1\leqq 0$，$d\eta_2\gtreqqless 0$（ただし，何れかは不等号）であれば $dl_1>0$ であり，そのとき $z_2\gtreqqless z_1$ なら $d\omega\gtreqqless 0$ である。即ち生産財部門の市場の不完全性が低まるか，或は消費財部門の市場の不完全性が高まるかすれば，労働者は消費財部門から生産財部門に移動する。その場合消費財部門の方がより資本使用的（労働使用的）であれば，各部門の資本労働比率及び利潤率に対する相対的賃金は上昇（下落）し，両部門の資本労働比率が等しければ各部門の

資本労働比率及び利潤率に対する相対的賃金は変化しない。

〔Ⅲ〕　s_i が変化した場合

〔Ⅱ〕の場合と全く同様にして（5，1）より

$$A\,d\,l_1+(1-s_1)\,l_1 d\,k_1-s_1\delta\,l_2 d\,k_2+B\,d\omega$$
$$=l_1 z_1 \widehat{d}\,s_1-\theta\omega\widehat{d}\,s_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(5, 11)}$$

を得るが，（5，9）より

$$d\,\omega=\frac{(z_2-z_1)\,l_1 z_1}{\varDelta}\widehat{d}\,s_1-\frac{(z_2-z_1)\theta\omega}{\varDelta}\widehat{d}\,s_2\cdots\cdots \text{(5, 12)}$$

を得る。従って $d\,s_1>0$ 或は $d\,s_2<0$ は〔Ⅱ〕における $d\eta_1>0$ 或は $d\eta_2<0$ の場合と同じ方向の効果を生ずる。

6　動　学　化

既に静学的均衡は定まっているが，それに動学的な条件を導入してK，Lを定め，動学体系について考えたい。先ず本節では $s_1=s_2$（$=s$ とおく）と仮定し，それは t の非増加関数であるとする。即ち

$$s=s_1=s_2=s(t),\quad s'(t)\leqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(6, 1)}$$

とする。これは生産において技術進歩を仮定したことに対応して，消費構造の変化を仮定するものである。従って（2，8）より

$$p_1 Y_1=s\,Y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(6, 2)}$$

θ_iの定義式より

$$\theta_1=s,\ \theta_2=1-s \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(6, 3)}$$

となる。さて動学的条件として次の仮定をおく。

〔仮定 4〕　$\dot{L}=\lambda L \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6, 4)

$$\dot{K}=Y_1-\mu K \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(6, 5)}$$

ここに λ，μ は定数で $0\leqq\lambda<1$，$0\leqq\mu<1$ とする。（6，4）は労働の増加率が一定であることを示し，（6，5）は資本の増加率を規定するものである。（6，5）より

$$\dot{\widehat{K}}=(\widehat{K}+\mu)(\widehat{Y}_1-\widehat{K})$$

然るに（6, 2），（2, 16）より

$$\widehat{Y}_1=\widehat{Y}+\widehat{s}-\widehat{p}_1=\frac{a\widehat{Y}_K+d\widehat{Y}_L}{m}-\frac{\dot{m}}{m}+\frac{a\widehat{K}+b\widehat{L}}{m}+\widehat{s}-\widehat{p}_1$$

故に　$\widehat{Y}_K=u$，$\widehat{Y}_L=v$，$\frac{a}{m}=\alpha$，$\frac{b}{m}=\beta$

とおけば　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$\alpha+\beta=1$　であって

$$\dot{\widehat{K}}=(\widehat{K}+\mu)\beta\{(v-u+\lambda)+\frac{u+\widehat{s}-\widehat{m}-\widehat{p}_1}{\beta}-\widehat{K}\} \quad \cdots\cdots (6,\ 6)$$

となる。また（2, 18）より

$$\widehat{\alpha}=\beta\{\widehat{K}-(v-u+\lambda)\} \quad \cdots\cdots (6,\ 7)$$

となる。さて技術進歩のあり方を規定する条件として次の仮定を導入する。

〔仮定5〕　u，vの間には

$$v=\varphi(u),\ \varphi(0)>0,\ \varphi'(u)<0,\ \varphi''(u)>0, \quad \cdots\cdots (6,\ 8)$$

なる関係が成立し，α=一定のときはu，vは

$$S=\frac{a\,u+b\,v}{m}=\alpha u+\beta v \quad \cdots\cdots (6,\ 9)$$

を最大ならしめる[⑦]。

〔仮定5〕より

$$\frac{ds}{du}=\alpha+\beta\varphi'(u)=0$$

故に　$\varphi'(u)=-\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\alpha}{1-\alpha}$

故にu，vはαの関数として定まり

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{d\alpha}&=-\frac{1}{\beta^2\varphi''(u)}>0,\\ \frac{dv}{d\alpha}&=\varphi'(u)\frac{du}{d\alpha}<0,\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (6,\ 10)$$

従って

$$\left.\begin{aligned} G(\alpha) &= v - u + \lambda \\ H(\alpha) &= v - u + \lambda + \frac{u + \hat{s} - \hat{m} - \hat{p}_1}{\beta} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (6,\ 11)$$

とおけば（6，6），（6，7）は

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{K}} &= (\hat{K} + \mu)\,\beta\,\{H(\alpha) - \hat{K}\} \\ \dot{\alpha} &= \alpha\,\beta\,\{\hat{k} - G(\alpha)\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (6,\ 12)$$

となる。さて（6，10）より

$$G'(\alpha) < 0$$

$$H'(\alpha) = \frac{u + \hat{s} - \hat{m} - \hat{p}_1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}\,\frac{d}{d\alpha}\{\hat{s} - \hat{m} - \hat{p}\} \cdots\cdots\cdots (6,\ 13)$$

$$H(\alpha) - G(\alpha) = \frac{u + \hat{s} - \hat{m} - \hat{p}_1}{\beta} \cdots\cdots\cdots (6,\ 14)$$

故に　$u + \hat{s} - \hat{m} - \hat{p}_1 = 0$ $\cdots\cdots\cdots$ （6，15）

となるような α の値 α^* が存在すれば

$$\hat{K}^* = H(\alpha^*) = G(\alpha^*)$$

なる $\hat{K}^*$，α^* は（6，12）なる微分方程式の定常解をあたえる。特に

〔仮定 6〕　$s = \dfrac{m_2 m_0\, l^{-\nu t}}{1 + (m_2 - m_1) m_0\, l^{-\nu t}}$ $\cdots\cdots\cdots$ （6，15）

ただし ν，m_0 は正の定数で　$m_0 < \dfrac{1}{m_1}$

が成立する場合を考えれば $0 < s < 1$，$\lim\limits_{t \to \infty} s = 0$ であって

$$\frac{s}{m} = m_0\, l^{-\nu t}, \quad \hat{s} - \hat{m} = -\nu$$

となる。次に価格は相対価格が問題であるから p_1＝一定とすれば $\hat{p}_1 = 0$ となる。従って（6，15）は

$u - \nu = 0$ $\cdots\cdots\cdots$ （6，17）

となり（6，10）より，（6，17）を満足する α の値が存在すれば唯 1 つである。以後そのような α の値の存在を仮定する。従って（6，13），（6，14）は

$$H'(\alpha)=\frac{u-\nu}{\beta^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6,\ 18)$$

$$H(\alpha)-G(\alpha)=\frac{u-\nu}{\beta} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6,\ 19)$$

となり $H(\alpha)$ は $\alpha=\alpha^*$ で最少値をとる。そのときは

$$a=\alpha^* m=\frac{\alpha^* m_2}{1+(m_2-m_1)m_0 l^{-\nu t}},\quad b=m(1-\alpha^*)$$

$$\hat{a}=\hat{b}=\hat{m}=\frac{\nu(m_2-m_1)m_0 l^{-\nu t}}{1+(m_2-m_1)m_0 l^{-\nu t}}$$

であり，$m_2 \gtreqless m_1$ に従って a 及び b は増加不変減少である。そして

$$\lim_{t\to\infty}\hat{a}=0,\quad \lim_{t\to\infty}a=\alpha^* m_2,\quad \lim_{t\to\infty}b=(1-\alpha^*)m_2$$

である。なお定常解 $\hat{K}=\hat{K}^*$, $\alpha=\alpha^*$ は（6，12）より容易に知られるように一般には不安定である。

① α =一定は$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{b}$の一定を意味する。特に $m_1=m_2$ 又は s =一定のときは（2，17）より m=一定であり，α=一定と a =一定とは同等となる。なお（6，9）においてSは u，v の加重平均であるが，（4，9）より $m_1=m_2$，$\eta_1=\eta_2$ のときはSは技術進歩率Rと一致する。

参考文献

〔1〕 天野明弘，“技術進歩と均衡成長” **理論経済学**，14 No. 2 (Feb. 1964)，23—30

〔2〕 ——，“Induced Bias in Technological Progress and Economic Growth”，**理論経済学**，17 No. 3 (March, 1967)，1—17

〔3〕 Drandakis, E.M.，“Factor Substitution in the Two-Sector Growth Model,” *Review of Economic Studies*, 30 (1963)，217—228

〔4〕 ——，aud Phelps, E.S.，“AModel of Induced Invention, Growth and Distribution，”*Economic Journal*, 76 (1966)，823—840

〔5〕 木藤正典，“非一次同次生産関数” **山口経済学雑誌**，17 (1967)，489

—508

〔6〕 ——, "技術進歩と非一次同次生産", **山口経済学雑誌**, 18 (1968), 191—210

〔7〕 ——, "技術進歩をともなう二部門成長モデル〔I〕", **山口経済学雑誌**, 20 (1970), 1—17

〔8〕 Takayama, A., "On a Two-Sector Model of Economic Growth with the Technological Progress", *Review of Economic Studies*, 32 (1965), 251—262

〔9〕 Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, 29 (1961) 40—47

〔10〕 ——, "On a Two-Sector Model of Economic Growth II", *Review of Economic Studies*, 30 (1963), 105—118