推移性に関する二つの特殊な自己反双対的関係の十分条件

橋 本 寛

Abstract

We consider two special binary relations which have analogous properties to semitransitive relations and Ferrers relations. They have properties related to transitivity and are self anti-dual relations. By using Boolean matrices we obtain their fundamental properties.

1．はじめに

ある２つの特殊な２項関係について考察をおこない，その推移性を中心に，基本的性質および関連する性質を明らかにしている。この２つの特殊な関係は応用上重要な semitransitive 関係や Ferrers 関係[1, 4, 7, 10]と類似の性質をもち，また一種の自己反双対性[5]を有している。本論文では，関係を0，1の要素をもつブール行列によって表現し，関係の性質もブール行列の性質として表現し，議論している。

2．定義

0，1の要素からなる n 次ブール行列を $R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$，$T=[t_{ij}]$ などで表す。ブール行列に関する記法や演算は文献[2]によるものとするが，主要なものは次のとおりである。

$$\nabla R = R \wedge R'$$

$$R \times S = [\,(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})\,]$$

$$R \diamondsuit S = [\,(r_{i1} \vee s_{1j}) \wedge (r_{i2} \vee s_{2j}) \wedge \cdots \wedge (r_{in} \vee s_{nj})\,]$$

また，要素がすべて１の行列を E で示す。

3．結果

本論文の目的は $\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ となる R，および $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ となる R，また両方の特別な場合として $\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}$ となる R の性質を調べることである。まず，これらの R の基本的性質及び関連する性質を明らかにし，これらが semitransitive 関係を表現する R，すなわち $R^2\leqq R\diamondsuit R$ となる R や，Ferrers 関係を表現する R，すなわち $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$ となる R と類似の性質をもつことを示す。次に，このような R に関する十分条件について考察をおこない，いくつかの関連する性質を与える。

［性質1］［3］(1) $R\times T\leqq R,\ \overline{T'}\wedge\overline{I}\leqq S\ \Rightarrow\ \overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$

(2) $T\times R\leqq R,\ \overline{T'}\wedge\overline{I}\leqq S\ \Rightarrow\ \overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

［性質2］［9］ $R\times S\leqq T\ \Leftrightarrow\ R\leqq T\diamondsuit\overline{S'}\Leftrightarrow\ S\leqq\overline{R'}\diamondsuit T$

次の性質は自明であるが，以下の性質の証明において使用する。

［性質3］(1) $R\leqq S\ \Leftrightarrow\ R'\leqq S'$　　(3) $R=S\ \Leftrightarrow\ R'=S'$

(2) $R\leqq S\ \Leftrightarrow\ \overline{R}\geqq\overline{S}$　　(4) $R=S\ \Leftrightarrow\ \overline{R}=\overline{S}$

［性質4］(1) $R^2\leqq R,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\Rightarrow\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(2) $R^2\leqq R,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\Rightarrow R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(証明) (1) 性質1(1)において，$T=R,\ S=R\times\overline{R'}$ とおけば，$\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$ から $\overline{R}\times(\overline{R}\diamondsuit R')\leqq\overline{R}$ となり，これから性質2を用いて $\overline{R}\diamondsuit R'\leqq R'\diamondsuit\overline{R}$ が得られる。したがって $R\times\overline{R'}\geqq\overline{R'}\times R$ すなわち $\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ となる。

(2) 性質1(2)において，$T=R,\ S=\overline{R'}\times R$ とおけば，$\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$ から $(R'\diamondsuit\overline{R})\times\overline{R}\leqq\overline{R}$ となり，これから $R'\diamondsuit\overline{R}\leqq\overline{R}\diamondsuit R'$ が得られる。したがって $\overline{R'}\times R\geqq R\times\overline{R'}$ すなわち $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ となる。(証明終)

［注意1］一般には，$\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\Rightarrow\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$,

$\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\Rightarrow R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

は成立しない。

いま $R=\begin{bmatrix}0001\\1001\\0100\\0010\end{bmatrix}$ とおけば，$\overline{R'}=\begin{bmatrix}1011\\1101\\1110\\0011\end{bmatrix}$，$\overline{R'}\wedge\overline{I}=\begin{bmatrix}0011\\1001\\1100\\0010\end{bmatrix}$

$$R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}0001\\1001\\0100\\0010\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1011\\1101\\1110\\0011\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0011\\1011\\1101\\1110\end{bmatrix}\geqq\overline{R'}\wedge\overline{I}$$

$$\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}1011\\1101\\1110\\0011\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0001\\1001\\0100\\0010\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0111\\1011\\1101\\0110\end{bmatrix}\geqq\overline{R'}\wedge\overline{I}$$

となり，$\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$ であるが $\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ とはならない。また $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$ であるが $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ とはなっていない。

［注意2］一般には，$\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow\ R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ とはならない。

いま $R=\begin{bmatrix}011000\\000001\\000001\\111001\\011001\\100000\end{bmatrix}$ とおけば，$\overline{R'}=\begin{bmatrix}111010\\011001\\011001\\111111\\111111\\100001\end{bmatrix}$

$$\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}111010\\011001\\011001\\111111\\111111\\100001\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}011000\\000001\\000001\\111001\\011001\\100000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}011001\\100001\\100001\\111001\\111001\\111000\end{bmatrix}$$

$$R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}011000\\000001\\000001\\111001\\011001\\100000\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}111010\\011001\\011001\\111111\\111111\\100001\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}011001\\100001\\100001\\111011\\111001\\111010\end{bmatrix}$$

となり，$\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ であるが，$R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ とはならない。

［注意3］一般には，$R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R\Rightarrow\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ とはならない。

いま $R=\begin{bmatrix}000101\\100110\\100110\\000000\\000000\\011110\end{bmatrix}$ とおけば，$\overline{R'}=\begin{bmatrix}100111\\111110\\111110\\000110\\100110\\011111\end{bmatrix}$

$$R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}000101\\100110\\100110\\000000\\000000\\011110\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}100111\\111110\\111110\\000110\\100110\\011111\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}011111\\100111\\100111\\000000\\000000\\111110\end{bmatrix}$$

$$\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}100111\\111110\\111110\\000110\\100110\\011111\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}000101\\100110\\100110\\000000\\000000\\011110\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}011111\\100111\\100111\\000000\\000101\\111110\end{bmatrix}$$

となり，$R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ であるが，$\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ とはならない。

なお，ここでの R は注意2の R を転置したものとなっている。

$\overline{R'}\times R$ および $R\times\overline{R'}$ に関しては次の性質がよく知られている。すなわち $\overline{R'}\times R$ および $R\times\overline{R'}$ の対角要素はすべて0となる。

［性質5］［3］(1) $(\overline{R'}\times R)\wedge I=O$　(3) $\overline{R'}\times R\leqq\overline{I}$

(2) $(R\times\overline{R'})\wedge I=O$　(4) $R\times\overline{R'}\leqq\overline{I}$

［性質6］［3］(1) $(R'\times\overline{R})\wedge I=O$　(3) $R'\times\overline{R}\leqq\overline{I}$

(2) $(\overline{R}\times R')\wedge I=O$　(4) $\overline{R}\times R'\leqq\overline{I}$

［性質7］［3］(1) $R'\diamond\overline{R}\geqq I$　(3) $\overline{R'}\diamond R\geqq I$

(2) $\overline{R}\diamond R'\geqq I$　(4) $R\diamond\overline{R'}\geqq I$

［性質8］(1) $R=O$ のとき　$\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=O$

(2) $R=E$ のとき　$\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=O$

(3) $R=I$ のとき　$\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=\overline{I}$

(4) $R=\overline{I}$ のとき　$\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=\overline{I}$

(証明) (1)－(2)　明らかである。

(3) $\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=\overline{R'}=\overline{I}$

(4) $\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=R=\overline{I}$　(証明終)

［性質9］次の条件は同値である。

(1) $R^2\leqq R$, $I\leqq R$　(3) $\overline{R'}\times R=\overline{R'}$

(2) $\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=\overline{R'}$　(4) $R\times\overline{R'}=\overline{R'}$

(証明) (1) ⇒ (2) $R^2\leqq R$ すなわち $R\times R\leqq R$ から $R\leqq R\diamond\overline{R'}$ となり，$\overline{R'}\times R\leqq\overline{R'}$ となる。これから $\overline{R'}\times R\leqq\overline{R'}=I\times\overline{R'}\leqq R\times\overline{R'}$ が得られる。また $R\times R\leqq R$ から $R\leqq\overline{R'}\diamond R$ となり，$R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}$ となる。これから $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}=\overline{R'}\times I\leqq\overline{R'}\times R$ が得られる。したがって $\overline{R'}\times R=\overline{R'}=R\times\overline{R'}$ となる。

(2) ⇒ (3)，(2) ⇒ (4)　明らかである。

(3) ⇒ (1)　$\overline{R'}\times R=\overline{R'}$ から $\overline{R'}\times R\leqq\overline{R'}$ であるので，$R\leqq R\diamond\overline{R'}$ となり，$R^2\leqq R$ が得られる。また $(\overline{R'}\times R)\wedge I=O$ から $\overline{R'}\wedge I=O$ であるので，$I\leqq R$ となる。

(4) ⇒ (1)　$R\times\overline{R'}=\overline{R'}$ から $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}$ であるので，$R\leqq\overline{R'}\diamond R$ となり，$R^2\leqq R$ が得られる。また $(R\times\overline{R'})\wedge I=O$ から $\overline{R'}\wedge I=O$ であるので，$I\leqq R$ となる。　(証明終)

［例1］いま

$$R=\begin{bmatrix}1100\\0100\\0111\\0101\end{bmatrix}$$

とおけば，$I\leqq R$ であり，また

$$R^2=\begin{bmatrix}1100\\0100\\0111\\0101\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1100\\0100\\0111\\0101\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1100\\0100\\0111\\0101\end{bmatrix}=R$$

$$\overline{R'}=\begin{bmatrix}0111\\0000\\1101\\1100\end{bmatrix}$$

であって，

$$\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}0111\\0000\\1101\\1100\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1100\\0100\\0111\\0101\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0111\\0000\\1101\\1100\end{bmatrix}=\overline{R'}$$

$$R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}1100\\0100\\0111\\0101\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0111\\0000\\1101\\1100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0111\\0000\\1101\\1100\end{bmatrix}=\overline{R'}$$

となる。

［注意4］一般には，$R^2\leqq R$，$R\wedge I=O\Rightarrow\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}$ とはならない。

いま

$$R=\begin{bmatrix}010\\000\\000\end{bmatrix}$$

とおけば，　$R^2=O$，$R\wedge I=O$ となるが，

$$\overline{R}'=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\overline{R}'\times R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$R\times\overline{R}'=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

となり，$R\times\overline{R}'\neq\overline{R}'\times R$ である。

なお，性質12で示すように，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$，$R\wedge I=O \Rightarrow \overline{R}'\times R=R\times\overline{R}'$ は成立する。

［性質10］次の条件は同値である。

(1) $R^2\leqq R$，$I\leqq R$

(2) $R'\Diamond\overline{R}=\overline{R}\Diamond R'=R'$

(3) $\overline{R}'\Diamond R=R\Diamond\overline{R}'=R$

(4) $R'\Diamond\overline{R}=R'$

(5) $\overline{R}'\Diamond R=R$

(6) $\overline{R}\Diamond R'=R'$

(7) $R\Diamond\overline{R}'=R$

(証明) 性質 9 および性質 3 (3) (4) による。　　(証明終)

［性質11］次の条件は同値である。

(1) $R\wedge I=O$

(2) $(\overline{R}'\times R)\wedge(R\times\overline{R}')\geqq R$

(3) $\overline{R}'\times R\geqq R$

(4) $R\times\overline{R}'\geqq R$

(5) $(\overline{R}'\times R)\vee(R\times\overline{R}')\geqq R$

(証明) (1)⇒(2) $R\wedge I=O$ から $\overline{R}'\geqq I$ となるので，$\overline{R}'\times R\geqq R$，$R\times\overline{R}'\geqq R$ となる。したがって $(\overline{R}'\times R)\wedge(R\times\overline{R}')\geqq R$ が得られる。

(2)⇒(3)⇒(5)，(2)⇒(4)⇒(5)　明らかである。

(5)⇒(1) 性質 5 から $(\overline{R}'\times R)\wedge I=O$，$(R\times\overline{R}')\wedge I=O$ であるので，$R\wedge I=O$ となる。　　(証明終)

［注意5］一般には，$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O \Rightarrow (\overline{R'} \times R) \wedge (R \times \overline{R'}) = R$ とはならない。

いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R \wedge I = O$，$R^2 = O$ であるが

$$\overline{R'} = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R'} \times R = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0 \end{bmatrix}$$

$$R \times \overline{R'} = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,0 \end{bmatrix}$$

となり，

$$(\overline{R'} \times R) \wedge (R \times \overline{R'}) = \begin{bmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0 \end{bmatrix} \neq R$$

である。

なお，性質13で示すように $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$，$R \wedge I = O \Rightarrow (\overline{R'} \times R) \wedge (R \times \overline{R'}) = R$ が成立する。

［性質12］次の条件は同値である。

(1) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$, $R \wedge I = O$ (3) $\overline{R'} \times R = R$

(2) $\overline{R'} \times R = R \times \overline{R'} = R$ (4) $R \times \overline{R'} = R$

(証明) 性質9において R を $\overline{R}$ とおけば，$R^2 \leqq R$ は $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$，$I \leqq R$ は $I \leqq \overline{R}$ すなわち $R \wedge I = O$，$\overline{R'} \times R = R \times \overline{R'} = \overline{R'}$ は $R' \times \overline{R} = \overline{R} \times R' = R'$ すなわち $\overline{R'} \times R = R \times \overline{R'} = R$ となり，本性質が得られる。 (証明終)

［例2］

いま $R = \begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix}$ とおけば，$R \wedge I = O$，$\overline{R} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix}$

$$\overline{R'} = \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \end{bmatrix}$$

であり，

$$(\overline{R})^2 = \begin{bmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} = \overline{R}$$

$$\overline{R'} \times R = \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix} = R$$

$$R \times \overline{R'} = \begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix} = \overline{R'} \times R = R$$

となる。

［例3］いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R \wedge I = O$,

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \end{bmatrix},\ \overline{R'} = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \end{bmatrix}$$

であり，

$$(\overline{R})^2 = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \end{bmatrix} = \overline{R}$$

$$\overline{R'} \times R = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} = R$$

$$R \times \overline{R'} = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} = \overline{R'} \times R = R$$

となる。

なお

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} = O$$

である。

［注意6］一般には，$R^2 = O \Rightarrow \overline{R'} \times R = R \times \overline{R'}$ とはならない。

いま $R=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ とおけば，

$$R^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

であるが，

$$\overline{R'}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

となり，$R\times\overline{R'}\neq\overline{R'}\times R$ である。

［性質13］ $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$，$R\wedge I=O \Rightarrow (\overline{R'}\times R)\wedge(R\times\overline{R'})=R$

（証明） 性質12(1) ⇒ (2)による。 （証明終）

［性質14］ $(\overline{R'}\times R)\wedge(R\times\overline{R'})=R \Rightarrow R\wedge I=O$

（証明） 性質11(2) ⇒ (1)による。 （証明終）

［注意７］一般には，$(\overline{R'}\times R)\wedge(R\times\overline{R'})=R \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ とはならない。

いま $R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ とおけば，$\overline{R}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，$\overline{R'}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

$$\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$(\overline{R'}\times R)\wedge(R\times\overline{R'})=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=R$$

であるが，

$$(\overline{R})^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

となり，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ とはならない。

［性質15］R が順列行列のとき $\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=\overline{I}$

(証明) R の次数 n が1のときは明らかであるので，$n\geqq 2$とする。

(1) $\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ となることを示す。

$\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}=1$ とする。このとき $i\neq j$ で，$r_{ki}=0$，$r_{kj}=1$ となる。R が順列行列であるのである l に対し $r_{il}=1$ となり，$i\neq j$ だから $r_{il}=1$ より $r_{jl}=0$ となる。したがって $r_{il}\wedge\overline{r_{jl}}=1$ となり，$\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ が得られる。

(2) $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ となることを示す。

$r_{ik}\wedge\overline{r_{jk}}=1$ とする。このとき $i\neq j$ となる。R が順列行列であるのである l に対し $r_{lj}=1$ であり，$i\neq j$ だから $r_{li}=0$ となる。したがって $\overline{r_{li}}\wedge r_{lj}=1$ となり，$R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$ が得られる。

(3) $\overline{R'}\times R=\overline{I}$ となることを示す。

任意の i，$j\,(i\neq j)$ に対し，ある k が存在して $r_{kj}=1$ となり，$i\neq j$ だから $r_{ki}=0$ となる。よって $\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}=1$ となる。また任意の l に対して $\overline{r_{li}}\wedge r_{li}=0$ であるから $\overline{R'}\times R$ の対角要素は0となる。

こうして(1)，(2)，(3)から $\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=\overline{I}$ となる。　　　　(証明終)

[例 4]

いま $R=\begin{bmatrix}0001\\1000\\0010\\0100\end{bmatrix}$ とおけば, $\overline{R'}=\begin{bmatrix}1011\\1110\\1101\\0111\end{bmatrix}$

$$\overline{R'}\times R=\begin{bmatrix}1011\\1110\\1101\\0111\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0001\\1000\\0010\\0100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0111\\1011\\1101\\1110\end{bmatrix}=\overline{I}$$

$$R\times\overline{R'}=\begin{bmatrix}0001\\1000\\0010\\0100\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1011\\1110\\1101\\0111\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0111\\1011\\1101\\1110\end{bmatrix}=\overline{I}$$

であって $\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}=\overline{I}$ となる。

[性質16] 次の条件は同値である。

(1) $\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ すなわち $R\,\varepsilon\,\{S\mid\overline{S'}\times S\leqq S\times\overline{S'}\}$

(2) $\overline{R}\,\varepsilon\,\{S\mid\overline{S'}\times S\leqq S\times\overline{S'}\}$

(3) $R'\,\varepsilon\,\{S\mid S\times\overline{S'}\leqq\overline{S'}\times S\}$

(4) $\overline{R'}\,\varepsilon\,\{S\mid S\times\overline{S'}\leqq\overline{S'}\times S\}$

(証明) (2)⇔(1) $\overline{S'}\times S\leqq S\times\overline{S'}$ の S を $\overline{R}$ とおけば $R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}\times R'$ となり, このとき

$$R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}\times R' \Leftrightarrow (R'\times\overline{R})'\leqq(\overline{R}\times R')' \Leftrightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$$

となる。

(3)⇔(1) $S\times\overline{S'}\leqq\overline{S'}\times S$ の S を R' とおけば $R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}\times R'$ となり, このとき

$$R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}\times R' \Leftrightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$$

となる。

(4)⇔(1) $S\times\overline{S'}\leqq\overline{S'}\times S$ の S を $\overline{R'}$ とおけば $\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$ となる。これは(1)そのものである。 (証明終)

[性質17] $\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'} \Leftrightarrow R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}\times R'$

(証明) 両辺を転置すればよい。 (証明終)

[性質18] (1) $S=\overline{R}$ のとき, $\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$ $\Leftrightarrow$ $\overline{S}'\times S\leqq S\times\overline{S}'$

(2) $S=R'$ のとき, $\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$ $\Leftrightarrow$ $S\times\overline{S}'\leqq\overline{S}'\times S$

(3) $S=\overline{R}'$ のとき, $\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$ $\Leftrightarrow$ $S\times\overline{S}'\leqq\overline{S}'\times S$

(証明) 性質16による。 (証明終)

[性質19] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$ すなわち $R\,\varepsilon\,\{S\mid S\times\overline{S}'\leqq\overline{S}'\times S\}$

(2) $\overline{R}\,\varepsilon\,\{S\mid S\times\overline{S}'\leqq\overline{S}'\times S\}$

(3) $R'\,\varepsilon\,\{S\mid \overline{S}'\times S\leqq S\times\overline{S}'\}$

(4) $\overline{R}'\,\varepsilon\,\{S\mid \overline{S}'\times S\leqq S\times\overline{S}'\}$

(証明) (2)⇔(1) $S\times\overline{S}'\leqq\overline{S}'\times S$ の S を $\overline{R}$ とおけば $\overline{R}\times R'\leqq R'\times\overline{R}$ となり, このとき性質3(1)を用いて

$$\overline{R}\times R'\leqq R'\times\overline{R} \quad\Leftrightarrow\quad (\overline{R}\times R')'\leqq(R'\times\overline{R})' \quad\Leftrightarrow\quad R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$$

となる。

(3)⇔(1) $\overline{S}'\times S\leqq S\times\overline{S}'$ の S を R' とおけば $\overline{R}\times R'\leqq R'\times\overline{R}$ となり, このとき

$$\overline{R}\times R'\leqq R'\times\overline{R} \quad\Leftrightarrow\quad R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$$

となる。

(4)⇔(1) $\overline{S}'\times S\leqq S\times\overline{S}'$ の S を $\overline{R}'$ とおけば $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$ となる。これは(1)そのものである。 (証明終)

[性質20] $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$ $\Leftrightarrow$ $\overline{R}\times R'\leqq R'\times\overline{R}$

(証明) 両辺を転置すればよい。 (証明終)

[性質21] (1) $S=\overline{R}$ のとき, $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$ $\Leftrightarrow$ $S\times\overline{S}'\leqq\overline{S}'\times S$

(2) $S=R'$ のとき, $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$ $\Leftrightarrow$ $\overline{S}'\times S\leqq S\times\overline{S}'$

(3) $S=\overline{R}'$ のとき, $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$ $\Leftrightarrow$ $\overline{S}'\times S\leqq S\times\overline{S}'$

(証明) 性質19による。 (証明終)

[性質22] 次の条件は同値である。

(1) $\overline{R}'\times R=R\times\overline{R}'$ すなわち $R\,\varepsilon\,\{S\mid \overline{S}'\times S=S\times\overline{S}'\}$

(2) $R\times\overline{R}'=\overline{R}'\times R$ すなわち $R\,\varepsilon\,\{S\mid S\times\overline{S}'=\overline{S}'\times S\}$

(3) $\overline{R}\ \varepsilon\ \{S \mid \overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'\}$

(4) $R'\ \varepsilon\ \{S \mid \overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'\}$

(5) $\overline{R'}\ \varepsilon\ \{S \mid \overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'\}$

(証明) (2)⇔(1) 明らかである。

(3)⇔(1) $\overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'$ の S を $\overline{R}$ とおけば $R'\times\overline{R} = \overline{R}\times R'$ となり，このとき性質３(3)を用いて，$R'\times\overline{R} = \overline{R}\times R' \Leftrightarrow (R'\times\overline{R})' = (\overline{R}\times R')' \Leftrightarrow \overline{R}'\times R = R\times\overline{R}'$ となる。

(4)⇔(1) $\overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'$ の S を R' とおけば $\overline{R}\times R' = R'\times\overline{R}$ となり，このとき

$$\overline{R}\times R' = R'\times\overline{R} \quad\Leftrightarrow\quad R'\times\overline{R} = \overline{R}\times R' \quad\Leftrightarrow\quad \overline{R}'\times R = R\times\overline{R}'$$

となる。

(5)⇔(1) $\overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'$ の S を $\overline{R}'$ とおけば,$R\times\overline{R}' = \overline{R}'\times R$ となり,このとき

$$R\times\overline{R}' = \overline{R}'\times R \quad\Leftrightarrow\quad \overline{R}'\times R = R\times\overline{R}'$$

となる。 (証明終)

[性質23] $\overline{R}'\times R = R\times\overline{R}' \quad\Leftrightarrow\quad R'\times\overline{R} = \overline{R}\times R'$

(証明) 両辺を転置すればよい。 (証明終)

[性質24] (1) $S = \overline{R}$ のとき，$\overline{R}'\times R = R\times\overline{R}' \quad\Leftrightarrow\quad \overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'$

(2) $S = R'$ のとき，$\overline{R}'\times R = R\times\overline{R}' \quad\Leftrightarrow\quad \overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'$

(3) $S = \overline{R}'$ のとき，$\overline{R}'\times R = R\times\overline{R}' \quad\Leftrightarrow\quad \overline{S}'\times S = S\times\overline{S}'$

(証明) 性質22による。 (証明終)

[性質25] $\overline{R}'\times R = R\times\overline{R}'$ のとき

(1) $\overline{R}'\times R \leqq R\times\overline{R}'$ (2) $R\times\overline{R}' \leqq \overline{R}'\times R$

(証明) (1) 明らかである。

(2) $R\times\overline{R}' = \overline{R}'\times R$ であるから明らかである。 (証明終)

[性質26] [2] 次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R\Diamond R$ すなわち $R\ \varepsilon\ \{S \mid S^2 \leqq S\Diamond S\}$

(2) $\overline{R}\ \varepsilon\ \{S \mid S^2 \leqq S\Diamond S\}$

(3) $R'\ \varepsilon\ \{S \mid S^2 \leqq S\Diamond S\}$

(4) $\overline{R'}\ \varepsilon\ \{S \mid S^2 \leqq S\Diamond S\}$

(証明)　(2)⇔(1)　$S^2 \leqq S \Diamond S$ の S を $\overline{R}$ とおけば $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R}$ となり，このとき

$$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R} \quad \Leftrightarrow \quad R \Diamond R \geqq R \times R = R^2$$

となる。

(3)⇔(1)　$S^2 \leqq S \Diamond S$ の S を R' とおけば $(R')^2 \leqq R' \Diamond R'$ となり，このとき転置して，

$$(R')^2 \leqq R' \Diamond R' \quad \Leftrightarrow \quad R^2 \leqq R \Diamond R$$

となる。

(4)⇔(1)　$S^2 \leqq S \Diamond S$ の S を $\overline{R'}$ とおいて，$(\overline{R'})^2 \leqq \overline{R'} \Diamond \overline{R'}$ となり，このとき

$$(\overline{R'})^2 \leqq \overline{R'} \Diamond \overline{R'} \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R} \quad \Leftrightarrow \quad R \Diamond R \geqq R \times R = R^2$$

となる。　(証明終)

[性質27]　[2]　(1)　$S = \overline{R}$ のとき，$R^2 \leqq R \Diamond R \quad \Leftrightarrow \quad S^2 \leqq S \Diamond S$

(2)　$S = R'$ のとき，$R^2 \leqq R \Diamond R \quad \Leftrightarrow \quad S^2 \leqq S \Diamond S$

(3)　$S = \overline{R'}$ のとき，$R^2 \leqq R \Diamond R \quad \Leftrightarrow \quad S^2 \leqq S \Diamond S$

(証明)　性質26による。　(証明終)

[性質28]　[1,2,6,8]　次の条件は同値である。

(1)　$R \times \overline{R'} \times R \leqq R$ すなわち $R \in \{S \mid S \times \overline{S'} \times S \leqq S\}$

(2)　$\overline{R} \in \{S \mid S \times \overline{S'} \times S \leqq S\}$

(3)　$R' \in \{S \mid S \times \overline{S'} \times S \leqq S\}$

(4)　$\overline{R'} \in \{S \mid S \times \overline{S'} \times S \leqq S\}$

(証明)　(2)⇔(1)　$S \times \overline{S'} \times S \leqq S$ の S を $\overline{R}$ とおいて $\overline{R} \times R' \times \overline{R} \leqq \overline{R}$ となり，このとき

$$\overline{R} \times R' \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R' \times \overline{R} \leqq R' \Diamond \overline{R} \Leftrightarrow R' \times \overline{R} \times R' \leqq R' \Leftrightarrow R \times \overline{R'} \times R \leqq R$$

となる。

(3)⇔(1)　$S \times \overline{S'} \times S \leqq S$ の S を R' とおいて $R' \times \overline{R} \times R' \leqq R'$ となり，このとき

$$R' \times \overline{R} \times R' \leqq R' \quad \Leftrightarrow \quad R \times \overline{R'} \times R \leqq R$$

となる。

(4)⇔(1)　$S \times \overline{S'} \times S \leqq S$ の S を $\overline{R'}$ とおいて $\overline{R'} \times R \times \overline{R'} \leqq \overline{R'}$ となり，このとき

$$\overline{R'} \times R \times \overline{R'} \leqq \overline{R'} \quad \Leftrightarrow \quad R \times \overline{R'} \leqq R \Diamond \overline{R'} \quad \Leftrightarrow \quad R \times \overline{R'} \times R \leqq R$$

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

［性質29］［1,2,6,8］ (1) $S=\overline{R}$ のとき，$R\times\overline{R}'\times R\leqq R \iff S\times\overline{S}'\times S\leqq S$

(2) $S=R'$ のとき，$R\times\overline{R}'\times R\leqq R \iff S\times\overline{S}'\times S\leqq S$

(3) $S=\overline{R}'$ のとき，$R\times\overline{R}'\times R\leqq R \iff S\times\overline{S}'\times S\leqq S$

（証明） 性質28による。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

［性質30］［2］ 次の条件は同値である。

(1) $\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$

(2) $\overline{R}\Diamond R'\leqq R'\Diamond\overline{R}$

(3) $\overline{R}\times(\overline{R}\Diamond R')\leqq\overline{R}$

(4) $\overline{R}\times(\overline{R}\Diamond R')=\overline{R}$

［性質31］ 次の条件は同値である。

(1) $\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$

(2) $R\Diamond\overline{R}'\leqq\overline{R}'\Diamond R$

(3) $R\leqq R\Diamond(R\times\overline{R}')$

(4) $\overline{R}'\leqq(R\times\overline{R}')\Diamond\overline{R}'$

(5) $R'\leqq(\overline{R}\times R')\Diamond R'$

(6) $\overline{R}\leqq\overline{R}\Diamond(\overline{R}\times R')$

(7) $R'\geqq(\overline{R}\Diamond R')\times R'$

(8) $\overline{R}'\geqq(R\Diamond\overline{R}')\times\overline{R}'$

(9) $R\geqq R\times(R\Diamond\overline{R}')$

（証明） (1)⇔(2) 性質30(1)(2)と性質3(1)による。

(1)⇔(3)，(1)⇔(4) 性質2による。

(3)⇔(5)，(4)⇔(6) 性質3(1)による。

(4)⇔(7)，(5)⇔(8)，(6)⇔(9) 性質3(2)による。　　　　　　　　（証明終）

次の性質は自明であり，よく知られているが，以下の性質の証明で使用する。

［性質32］ (1) $R\geqq I \Rightarrow R\times S\geqq S,\ S\times R\geqq S$

(2) $R\leqq\overline{I} \Rightarrow R\Diamond S\leqq S,\ S\Diamond R\leqq S$

［性質33］ 次の条件は同値である。

(1) $\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$

(2) $R=R\Diamond(R\times\overline{R}')$

(3) $\overline{R}'=(R\times\overline{R}')\Diamond\overline{R}'$

(4) $R'=(\overline{R}\times R')\Diamond R'$

(5) $\overline{R}=\overline{R}\Diamond(\overline{R}\times R')$

(6) $R'=(\overline{R}\Diamond R')\times R'$

(7) $\overline{R}'=(R\Diamond\overline{R}')\times\overline{R}'$

(8) $R=R\times(R\Diamond\overline{R}')$

（証明） 性質5(4)，性質6(4)により，$R\times\overline{R}'\leqq\overline{I}$，$\overline{R}\times R'\leqq\overline{I}$ である。また性

質7(2)(4)により$\overline{R}\Diamond R'\geqq I$，$R\Diamond\overline{R'}\geqq I$であるから，性質31(1)，(3)－(9)と性質32による。　(証明終)

［性質34］［2］次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(2) $R'\Diamond\overline{R}\leqq\overline{R}\Diamond R'$

(3) $(R'\Diamond\overline{R})\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(4) $(R'\Diamond\overline{R})\times\overline{R}=\overline{R}$

［性質35］次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(2) $\overline{R'}\Diamond R\leqq R\Diamond\overline{R'}$

(3) $R\leqq(\overline{R'}\times R)\Diamond R$

(4) $\overline{R'}\leqq\overline{R'}\Diamond(\overline{R'}\times R)$

(5) $R'\leqq R'\Diamond(R'\times\overline{R})$

(6) $\overline{R}\leqq(R'\times\overline{R})\Diamond\overline{R}$

(7) $R'\geqq R'\times(R'\Diamond\overline{R})$

(8) $\overline{R'}\geqq\overline{R'}\times(\overline{R'}\Diamond R)$

(9) $R\geqq(\overline{R'}\Diamond R)\times R$

(証明) (1)⇔(2) 性質34(1)(2)と性質3(1)による。

(1)⇔(3)，(1)⇔(4) 性質2による。

(3)⇔(5)，(4)⇔(6) 性質3(1)による。

(4)⇔(7)，(5)⇔(8)，(6)⇔(9) 性質3(2)による。　(証明終)

［性質36］次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(2) $R=(\overline{R'}\times R)\Diamond R$

(3) $\overline{R'}=\overline{R'}\Diamond(\overline{R'}\times R)$

(4) $R'=R'\Diamond(R'\times\overline{R})$

(5) $\overline{R}=(R'\times\overline{R})\Diamond\overline{R}$

(6) $R'=R'\times(R'\Diamond\overline{R})$

(7) $\overline{R'}=\overline{R'}\times(\overline{R'}\Diamond R)$

(8) $R=(\overline{R'}\Diamond R)\times R$

(証明) 性質5(3)，性質6(3)により，$\overline{R'}\times R\leqq\overline{I}$，$R'\times\overline{R}\leqq\overline{I}$である。また性質7(1)(3)により$R'\Diamond\overline{R}\geqq I$，$\overline{R'}\Diamond R\geqq I$であるから，性質35(1)，(3)－(9)と性質32による。　(証明終)

［性質37］次の条件は同値である。

(1) $\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}$

(2) $R'\times\overline{R}=\overline{R}\times R'$

(3) $\overline{R'}\Diamond R=R\Diamond\overline{R'}$

(4) $R'\Diamond\overline{R}=\overline{R}\Diamond R'$

(証明) 性質3(3)(4)を用いればよい。　(証明終)

［性質38］

(1) $R'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}\times R' \Leftrightarrow R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$ (2) $R'\wedge\overline{I}\leqq R'\times\overline{R} \Leftrightarrow R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$

(証明) 両辺を転置すればよい。 (証明終)

[性質39] (1) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'} \Rightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(2) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R \Rightarrow R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(証明) (1)性質 4 (1)において R を $\overline{R}$ とおき，性質38(1)，性質17を用いればよい。

(2) 性質 4 (2)において R を $\overline{R}$ とおき，性質38(2)，性質20を用いればよい。

(証明終)

[性質40] [2] (1) $R^2\leqq R,\ R\vee R'\vee I=E \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(2) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ \nabla R\leqq I \Rightarrow R^2\leqq R$

[性質41] (1) $R^2\leqq R,\ R\vee R'\vee I=E,\ R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'} \Rightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(2) $R^2\leqq R,\ R\vee R'\vee I=E,\ R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R \Rightarrow R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(3) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ \nabla R\leqq I,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'} \Rightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(4) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ \nabla R\leqq I,\ \overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R \Rightarrow R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(証明) (1) 性質40(1)を性質39(1)へ代入すればよい。

(2) 性質40(1)を性質39(2)へ代入すればよい。

(3) 性質40(2)を性質 4 (1)へ代入すればよい。

(4) 性質40(2)を性質 4 (2)へ代入すればよい。 (証明終)

[性質42] [3] (1) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'},\ R^2\leqq R\Diamond R \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(2) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R,\ R^2\leqq R\Diamond R \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(3) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'},\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(4) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R,\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

[性質43] (1) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'},\ R^2\leqq R\Diamond R,\ R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'} \Rightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(2) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'},\ R^2\leqq R\Diamond R,\ R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R \Rightarrow R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(3) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R,\ R^2\leqq R\Diamond R,\ R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'} \Rightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(4) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R,\ R^2\leqq R\Diamond R,\ R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R \Rightarrow R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(5) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'},\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R, R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'} \Rightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(6) $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'},\ R\times\overline{R'}\times R\leqq R, R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R \Rightarrow R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(7) $\overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R$, $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$, $R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'\Rightarrow\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$

(8) $\overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R$, $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$, $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R\Rightarrow R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$

(証明) (1) 性質42(1)を性質39(1)へ代入すればよい。

(2) 性質42(1)を性質39(2)へ代入すればよい。

(3) 性質42(2)を性質39(1)へ代入すればよい。

(4) 性質42(2)を性質39(2)へ代入すればよい。

(5) 性質42(3)を性質39(1)へ代入すればよい。

(6) 性質42(3)を性質39(2)へ代入すればよい。

(7) 性質42(4)を性質39(1)へ代入すればよい。

(8) 性質42(4)を性質39(2)へ代入すればよい。　(証明終)

[性質44] [3] (1) $R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'$, $R^2\leqq R\Diamond R\ \Rightarrow\ R^2\leqq R$

(2) $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R$, $R^2\leqq R\Diamond R\ \Rightarrow\ R^2\leqq R$

(3) $R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'$, $R\times\overline{R}'\times R\leqq R\ \Rightarrow\ R^2\leqq R$

(4) $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R$, $R\times\overline{R}'\times R\leqq R\ \Rightarrow\ R^2\leqq R$

[性質45] (1) $R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'$, $R^2\leqq R\Diamond R$, $\overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R\ \Rightarrow\ R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$

(2) $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R$, $R^2\leqq R\Diamond R$, $\overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'\ \Rightarrow\ \overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$

(3) $R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'$, $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$, $\overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R\Rightarrow R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$

(4) $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'\times R$, $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$, $\overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'\Rightarrow\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$

(証明) (1) 性質44(1)を性質4(2)へ代入すればよい。

(2) 性質44(2)を性質4(1)へ代入すればよい。

(3) 性質44(3)を性質4(2)へ代入すればよい。

(4) 性質44(4)を性質4(1)へ代入すればよい。　(証明終)

上の性質45に関して，性質44(1)を性質4(1)に代入すれば

$$R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}',\ R^2\leqq R\Diamond R,\ \overline{R}'\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R}'\ \Rightarrow\ \overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$$

が得られるが，これは性質43(1)と同じである。性質44(2)を性質4(2)に代入した場合は性質43(4)が，性質44(3)を性質4(1)に代入した場合は性質43(5)が，性質44(4)を性質4(2)に代入した場合は性質43(8)が得られる。

なお，上の性質45の各帰結の不等式は，次の性質46で示すように等式とし

て成立する。

［性質46］ (1) $R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$, $R^2\leqq R\Diamond R$, $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow\ \overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}$

(2) $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$, $R^2\leqq R\Diamond R$, $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow\ \overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}$

(3) $R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}$, $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$, $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\Rightarrow\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}$

(4) $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R$, $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$, $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\Rightarrow\overline{R'}\times R=R\times\overline{R'}$

（証明） (1) 性質43(3)および性質45(1)による。

(2) 性質43(2)および性質45(2)による。

(3) 性質43(7)および性質45(3)による。

(4) 性質43(6)および性質45(4)による。 （証明終）

［性質47］［2］ (1) $R^2\leqq R\Diamond R$, $\nabla R\leqq I\ \Rightarrow\ R^2\leqq R$

(2) $R^2\leqq R\Diamond R$, $R\vee R'\vee I=E\ \Rightarrow\ (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

［性質48］ (1) $R^2\leqq R\Diamond R$, $\nabla R\leqq I$, $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow\ \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(2) $R^2\leqq R\Diamond R$, $\nabla R\leqq I$, $\overline{R'}\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow\ R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(3) $R^2\leqq R\Diamond R$, $R\vee R'\vee I=E$, $R\wedge\overline{I}\leqq R\times\overline{R'}\ \Rightarrow\ \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(4) $R^2\leqq R\Diamond R$, $R\vee R'\vee I=E$, $R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R'}\times R\ \Rightarrow\ R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

（証明） (1) 性質47(1)を性質 4 (1)へ代入すればよい。

(2) 性質47(1)を性質 4 (2)へ代入すればよい。

(3) 性質47(2)を性質39(1)へ代入すればよい。

(4) 性質47(2)を性質39(2)へ代入すればよい。 （証明終）

4．まとめ

応用上重要な二項関係である semitransitive 関係や Ferrers 関係と類似の興味深い性質をもつ2つの特殊な関係について考察をおこない，それらの基本的な性質を明らかにした。しかし，これらの関係の具体的な応用上の有用性については今後さらに検討する必要がある。

文　献

[1] Doignon, J.-P., Monjardet, B., Roubens, M., and Vincke, Ph.: "Biorder families, valued relations, and preference modelling," Journal of Mathematical Psychology, 30, pp.435-480 (1986).

[2] 橋本　寛: "推移性のもとでの Semitransitive 関係と Ferrers 関係," 山口経済学雑誌, 第53巻, 第5号, pp.425-448（平成17年1月）.

[3] 橋本　寛: "Semitransitive 関係と Ferrers 関係の Negative 推移性," 山口経済学雑誌, 第54巻, 第5号, pp.657-681（平成18年1月）.

[4] Jamison, D.T. and Lau, L.J.: "Semiorders and the theory of choice," Econometrica, Vol. 41, No. 5, pp.901-912 (1973).

[5] 尾崎, 樹下: "ディジタル代数学," 共立出版（昭和41年10月）.

[6] Riguet, J.: "Les relations de Ferrers," C.R.Acad. Sci. Paris 232, pp.1729-1730 (1951).

[7] Roubens, M. and Vincke, Ph.: "Preference Modelling," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[8] Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).

[9] Schröder, E. "Algebra der Logik. Vol.3," Teubner, Leipzig (1895) (Chelsea Publishing, New York, 1966).

[10] Scott, D. and Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement," The Journal of Symbolic Logic, 23, pp.113-128 (1958).