非推移的関係

橋本　寛

1．まえがき

非推移的関係 (intransitive relation)[8][9][14]を表現するブール行列の初等的性質について考察をおこなっている。非推移的関係は，例えば「1才年上である」というような関係であって，ある集合の要素xとy，yとzの間で成立してもxとzの間では決して成立しないような二項関係である。非推移的関係は，推移的でない関係 (nontransitive relation)[8][16]とは必ずしも等しくなく，vacuously transitive 関係[3][17]のように推移的であってかつ非推移的であるような関係も存在する。非推移的関係の例としては，上に示したもの以外に，一定の前提のもとでの「父親である」，「隣家である」，「配偶者である」，「(非零の実数に関して) 異符号である」，「(平面上で直線が) 直交している」などの関係のように多数あるが[2][8][9][18]，その性質は少数の基礎的性質を除いてほとんど知られていないようにおもわれる。

また非推移的関係が重要であると考えられる理由として，上に述べた非推移的関係の具体例が世の中に多数存在するということの他に，推移性によって簡約されたシステムが非推移性をもつということがある。すなわち，推移的簡約形[1][4]，ハッセ線図，直前関係[15]，基礎有向グラフ[13]などこれらに対応する関係は一般に非推移的である。

2．演算と行列の定義

本論文では0，1の要素をもつn次ブール行列を取り扱っている。このブール行列によって，ある有限集合上の二項関係を表現することができ，したがってブール行列の性質を調べることにより，対応する二項関係の性質を明らかにすることができる。ここでのブール行列に関する演算は文献(5)と同様であり，例えばn次ブール行列をR，Sとするときその和を$R \vee S$で，論理積を$R \wedge S$で，また行列積を$R \times S$で示す。R^2は$R \times R$を意味し，R^2の(i, j)要素を$r_{ij}^{(2)}$で表わす。R'はRの転置，$\overline{R}$はRの否定であって，$\overline{R} = [\overline{r_{ij}}] = [1 - r_{ij}]$によって定められ，$R \ominus S$は$R \wedge \overline{S}$で定められる。また$I$は単位行列，$O$は零行列，$E$は全要素が1のuniversal行列[7]である。

ブール行列Rが$R^2 \leqq \overline{R}$を満足するとき，Rは非推移的であるといわれる。$R^2 \leqq R$であればRは推移的と呼ばれるが，すでに述べたように，非推移的ということは，推移的でないということではない。行列Rが$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$を満足すれば，negatively transitive[16]であるといわれ，$R^n = O$であればRはべき零であるといわれる。とくに$R^2 = O$であればvacuously transitive[3][17]といわれる。また$R \wedge I = O$すなわちRの対角要素がすべて0であればRは非反射的，$R \wedge R' = O$のときは非対称的，$R \wedge R' \leqq I$であれば反対称的，$R \vee R' \vee I = E$であれば連結的と呼ばれる。

n次のブール行列が各行各列に1を1個だけ持つとき，このブール行列は順列行列(permutation matrix)であるといわれる[7]。なお，n次順列行列$R = [r_{ij}]$で$r_{1n} = 1$，$r_{2n-1} = 1$，…，$r_{n1} = 1$となるものは反単位行列と呼ばれることがある[11]。

また，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$が非空の2つの部分集合N_1，N_2に分割され($N_1 \cup N_2 = N$，$N_1 \cap N_2 = \phi$)，$i \in N_1$，$j \in N_2$に対して$r_{ij} = 0$となるとき，Rは分解可能であるといい，分解可能でないとき，分解不能という[7][12]。本論文では分解不能な順列行列の非推移性についても若干の考察をおこなっている。

3．非推移的関係の性質

まず非推移性に関する同値な条件と基本的な性質を述べ，次に簡約に関する性質，連結性との関係，そして順列行列に関する性質などについて述べる。これらの性質は，非推移的関係のもつ性質，非推移的となるための条件，また非推移的とはならない条件などから成っている。

〔性質1〕　次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq \overline{R}$

(2)　$R \leqq \overline{R^2}$

(3)　$R \wedge R^2 = O$

（証明）　明らかである。

上の性質より，関係行列Rが非推移的であることを示すには，上記の条件のいずれかが成立することをいえばよい。またあとの性質12において示すように

$$R^2 \leqq \overline{R} \iff R \ominus R^2 = R$$

も成立する。

〔性質2〕　Rが非推移的であるとき

(1)　$r_{ij}^{(2)} = 1 \Longrightarrow r_{ij} = 0$

(2)　$r_{ij} = 1 \Longrightarrow r_{ij}^{(2)} = 0$

（証明）　明らかである。

〔性質3〕[9]　$R^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R \wedge I = O$

（証明）　明らかである。

このようにRが非推移的であれば，Rの対角要素はすべて0，すなわち非反射的となる。しかし，非推移的であっても，$R \wedge R' = O$すなわち非対称的となるとは限らない。これは，例えばRとして

$$R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

を考えてみればよい。このRは非推移的であるけれども非対称的ではない。

〔性質4〕　$R\wedge I\neq O \Longrightarrow R\wedge R^2\neq O$

(証明)　性質3による。　(証明終)

上の $R\wedge R^2\neq O$ はRが非推移的でないことをいっており，結局 $R\wedge I\neq O$ なるRは非推移的ではない。したがって単位行列 I や universal 行列 E は非推移的でない。

〔性質5〕[9]　$R^2\leqq\overline{R}$, $R^2\leqq R \Longleftrightarrow R^2=O$

(証明)　明らかである。

すでに述べたように，$R^2\leqq\overline{R}$ であればRは非推移的，$R^2\leqq R$ であれば推移的，$R^2=O$ であれば vacuously transitive である。したがって，上の性質はRが非推移的でかつ推移的であることと vacuously transitive であることとは同値であるといっている。また，これの特別な場合として vacuously transitive なブール行列は非推移的であることがわかる。

〔性質6〕[9]　$R^2\leqq\overline{R}$, $R^2\leqq R \Longrightarrow R\wedge R'=O$

(証明)　$R^2\leqq\overline{R}$ および $R^2\leqq R$ から $R^2=O$。

したがって $R\wedge R'=O$　(証明終)

〔性質7〕　$R^2\leqq\overline{R}$, $R^2=R \Longleftrightarrow R=O$

(証明)　(1)　$R^2\leqq\overline{R}$, $R^2=R$ のとき

$R^2\leqq\overline{R}$ から $R\wedge R^2=O$。また $R^2=R$ だから $R=O$。

(2)　$R=O$ のとき

明らかに $R^2\leqq\overline{R}$, $R^2=R$。　(証明終)

〔性質8〕　$R^2\leqq\overline{R}$, $S\leqq R \Longrightarrow S^2\leqq\overline{S}$

(証明)　$R^2\leqq\overline{R}$ から $R\wedge R^2=O$。したがって $S\leqq R$ なので $S\wedge S^2=O$, すなわち $S^2\leqq\overline{S}$。　(証明終)

〔性質9〕　$R^2\leqq\overline{R}$, $S=R' \Longrightarrow S^2\leqq\overline{S}$

(証明)　明らかである。

〔性質10〕　$R \leqq S$ のとき

(1)　$P = R \ominus (R \times S) \Longrightarrow P^2 \leqq \overline{P}$

(2)　$P = R \ominus (S \times R) \Longrightarrow P^2 \leqq \overline{P}$

(証明)　(1)　$P \wedge P^2 \leqq (R \ominus (R \times S)) \wedge R^2$

$$\leqq (R \ominus R^2) \wedge R^2$$

$$= R \wedge \overline{R^2} \wedge R^2 = O$$

よって，$P^2 \leqq \overline{P}$。

(2)　$P \wedge P^2 \leqq (R \ominus (S \times R)) \wedge R^2$

$$\leqq (R \ominus R^2) \wedge R^2$$

$$= R \wedge \overline{R^2} \wedge R^2 = O$$

よって，$P^2 \leqq \overline{P}$。　(証明終)

上の性質によって $R \leqq S$ のとき，$R \ominus (R \times S)$ と $R \ominus (S \times R)$ はともに非推移的となる。

〔性質11〕　$S = R \ominus R^2 \Longrightarrow S^2 \leqq \overline{S}$

(証明)　性質10による。　(証明終)

こうして $R \ominus R^2$ は常に非推移的となる。なお，一定の条件のもとでは $R \ominus R^2$ はRの推移的簡約形(15)となる。

〔性質12〕　$R^2 \leqq \overline{R} \Longleftrightarrow R \ominus R^2 = R$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq \overline{R}$ のとき

$R \wedge R^2 = O$ であるから

$$R \ominus R^2 = R \wedge \overline{R^2} = (R \wedge \overline{R^2}) \vee (R \wedge R^2) = R$$

(2)　$R \ominus R^2 = R$ のとき

性質11によって $(R \ominus R^2) \wedge (R \ominus R^2)^2 = O$ であるから，$R \wedge R^2 = O$ すなわち $R^2 \leqq \overline{R}$。　(証明終)

〔性質13〕　$R^2 \leqq \overline{R}$，$R \wedge (R^3 \vee R^4 \vee \cdots \vee R^{n-1}) = O$

$$\Longleftrightarrow R = R \ominus (R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{n-1})$$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq \overline{R}$，$R \wedge (R^3 \vee R^4 \vee \cdots \vee R^{n-1}) = O$ のとき

$R^2 \leqq \overline{R}$ から $R \wedge R^2 = O$。したがって

$$R \wedge (R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{n-1}) = O$$

ゆえに

$$R \ominus (R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{n-1}) = R$$

(2)　$R = R \ominus (R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{n-1})$ のとき

性質11によって $R \ominus R^2$ は非推移的である。したがって性質 8 によって $R \ominus (R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{n-1})$ は非推移的となる。また

$$\begin{aligned}
&R \wedge (R^3 \vee R^4 \vee \cdots \vee R^{n-1}) \\
&= [R \ominus (R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{n-1})] \wedge (R^3 \vee R^4 \vee \cdots \vee R^{n-1}) \\
&= R \wedge \overline{(R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{n-1})} \wedge (R^3 \vee R^4 \vee \cdots \vee R^{n-1}) \\
&= R \wedge \overline{R^2} \wedge \overline{(R^3 \vee R^4 \vee \cdots \vee R^{n-1})} \wedge (R^3 \vee R^4 \vee \cdots \vee R^{n-1}) = O
\end{aligned}$$

(証明終)

よく知られているように，$R^n = O$ なるブール行列 R の推移的簡約形は

$$R \ominus (R^2 \vee R^3 \vee \cdots \vee R^{n-1})$$

で与えられる[(1)(4)(10)]。したがって，べき零行列 R が非推移的であって，かつ

$$R \wedge (R^3 \vee R^4 \vee \cdots \vee R^{n-1}) = O$$

であれば，R それ自体が推移的簡約形となっている。例えば，R が vacuously transitive ($R^2 = O$) であれば，R 自身が推移的簡約形となる。

なお，$R^n = O$ でかつ $R^2 \leqq R$ であれば推移的簡約形は $R \ominus R^2$ で与えられる[(15)]。また，このとき $S = R \ominus R^2$ とおけば

$$S \vee S^2 \vee \cdots \vee S^{n-1} = R$$

となる。

〔性質14〕　次の条件は同値である。

(1)　$(\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$

(2)　$\overline{R} \wedge \overline{R}' \leqq I$

(3)　$R \vee R' \vee I = E$

(証明)　
$$\begin{aligned}
(\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O &\Longleftrightarrow (\overline{R} \wedge \overline{I}) \wedge (\overline{R} \wedge \overline{I})' = O \\
&\Longleftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{R}' \wedge \overline{I} = O \\
&\Longleftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{R}' \leqq I
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow R \vee R' \geqq \overline{I}$$

$$\Longleftrightarrow R \vee R' \vee I \geqq \overline{I} \vee I$$

$$\Longleftrightarrow R \vee R' \vee I = E$$

(証明終)

上の性質から $\overline{R}$ が反対称的 ($\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq I$) であることと，$R$ が連結的 ($R \vee R' \vee I = E$) であることは同値であることがわかる。$R \vee R' \vee I = E$ と同値な条件については文献(5)でも考察をおこなっている。

〔性質15〕[(6)]　$n \geqq 4$ のとき

(1)　$R^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R \vee R' \vee I \neq E$

(2)　$R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow R \wedge R^2 \neq O$

この性質によって $n \geqq 4$ のとき，非推移的 ($R^2 \leqq \overline{R}$ または $R \wedge R^2 = O$) でかつ連結的 ($R \vee R' \vee I = E$) な関係行列は存在しないことがわかる。

〔性質16〕　$n \geqq 4$ のとき

$$R^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow (\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \wedge I \neq O$$

(証明)　性質14および性質15(1)による。　(証明終)

〔性質17〕　$n = 3$ のとき

(1)　$R^2 \leqq \overline{R}$, $(\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow R \wedge R' = O$

(2)　$R^2 \leqq \overline{R}$, $R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow R \wedge R' = O$

(証明)　(1)　$n = 3$ のとき

$$(\overline{S})^2 \leqq S,\ (S \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow S \vee S' = E$$

であるから[(6)]，$S = \overline{R}$ とおいて

$$R^2 \leqq \overline{R},\ (\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow \overline{R} \vee \overline{R'} = E$$

したがって

$$R^2 \leqq \overline{R},\ (\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow R \wedge R' = O$$

(2)　性質14および上の(1)によって

$$R^2 \leqq \overline{R},\ R \vee R' \vee I \vee E \Longrightarrow R \wedge R' = O$$

(証明終)

〔注意１〕　一般には

$$R^2 \leqq \overline{R},\ (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R \wedge R' = O$$

とはならない。例えば

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R^2 \leqq \overline{R}$ かつ $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ であるけれども，$R \wedge R' = O$ とはならない。なお，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ なる R は，すでに述べたように，negatively transitive であるといわれる。

〔性質18〕[6]　$R^2 \leqq \overline{R}$，$R \vee R' \vee I = E$ のとき

(1)　$R^2 \leqq R' \vee I$

(2)　$\ell = 0$，1，2，…に対して $R^2 \leqq R^{2+3\ell} \vee I$

(3)　$\ell = 0$，1，2，…に対して $R^2 \leqq R^{2+6\ell}$

〔注意2〕(1)　一般には

$$R^2 \leqq \overline{R},\ R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow R^2 \leqq R'$$

とはならない。たとえば

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R^2,\ R' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であって，$R^2 \leqq \overline{R}$，$R \vee R' \vee I = E$ であるが，$R^2 \leqq R'$ とはならない。

(2)　一般には

$$R^2 \leqq \overline{R},\ R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow \ell = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \text{に対して } R^2 \leqq R^{2+3\ell}$$

とはならない。例えば

$$\ell = 1,\ R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ R^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であって，Rは非推移的で連結的であるが $R^2 \leqq R^5$ とはなっていない。

(3)　一般には

$$R^2 \leqq \overline{R},\ R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow \ell = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \text{に対して } R \leqq R^{2+6\ell}$$

とはならない。例えば

$$\ell = 1,\ R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，Rは非推移的でかつ連結的であるが $R \leqq R^8$とはなっていない。

〔注意 3〕 $n \geqq 4$ のときは，すでに示した性質15によって $R^2 \leqq \overline{R}$ かつ $R \vee R' \vee I = E$ なるRは存在しない。しかし，$n=1$，2，3に対しては次のような行列が存在する。

$$[0]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

〔性質19〕 $R^2 \leqq \overline{R}$，$R \vee R' \vee I = E$ のとき

(1)　$R^2 \leqq R^5 \vee I$

(2)　$R^2 \leqq R^8$

(証明)　性質18による。　(証明終)

〔性質20〕 非反射的な順列行列は非推移的である。

(証明)　Rを非反射的な順列行列とするとき $R^2 \leqq \overline{R}$となることを示す。いま，$r_{ik}=1$，$r_{kj}=1$ とすれば，Rの非反射性によって $i \neq k$ かつ $k \neq j$。Rの各行には1が1個しかないことおよび $k \neq j$ によって $r_{ij}=0$。　(証明終)

〔例 1〕

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば

$$R^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\overline{R}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

こうして，$R^2\leqq\overline{R}$ が成立する。

〔性質21〕　分解不能な順列行列は非推移的である。

（証明）　Rを分解不能な順列行列とし，まず $R\wedge I=O$ となることを示す。もし $r_{pp}=1$ とすれば，Rが順列行列だから

$$\{k\mid r_{pk}=1\}=\{p\}$$

となる。したがって

$$i\in\{k\mid r_{pk}=1\},\ j\in\{k\mid r_{pk}=0\}$$

に対して

$$r_{ij}=r_{pj}=0$$

となり，分解可能となって矛盾する。よって $R\wedge I=O$ となり，性質20からRは非推移的となる。　（証明終）

なお，上の証明から明らかなように，分解不能な順列行列は非反射的となる。

〔性質22〕　偶数次の反単位行列は非推移的である。

（証明）　$R=[r_{ij}]$ を反単位行列とすれば

$$r_{1n}=1,\ r_{2n-1}=1,\ \cdots,\ r_{kn-k+1}=1,\ \cdots,\ r_{n1}=1。$$

nは偶数であるので $n=2m\,(m\geqq 1)$ とおく。このとき

$$r_{k2m-k+1}=1。$$

いま，ある k に対して $r_{kk}=1$ であるとすれば $k=2m-k+1$ となり，$2k$

$=2m+1$ となる。しかし，これは矛盾するので，$k=2m-k+1$ となることはない。よって $R\wedge I=O$。ゆえに性質20によってRは非推移的となる。

(証明終)

上の証明から明らかなように偶数次の反単位行列は非反射的であることがわかる。なお，反単位行列は対称な順列行列であるので，Rを反単位行列とするとき，一般に

$$R^2=R\times R'=I$$

となる(11)。

〔例２〕

$$R=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば

$$R^2=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\overline{R}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}。$$

こうして $R^2\leqq\overline{R}$ となる。

〔性質23〕 $n\geqq 2$ のとき，Rの第 k 列が対角要素を除いてすべて１でかつ

$$\bigvee_{i\neq k}\bigvee_{j\neq k} r_{ij}=1$$

であれば，このとき $R\wedge R^2\neq O$。

(証明) $r_{ml}=1$，$m\neq k$，$l\neq k$ とする。

$$
\begin{aligned}
r^{(2)}_{mk} &= \bigvee_{p=1}^{n} r_{mp} \wedge r_{pk} \\
&= \bigvee_{p \neq l} r_{mp} \wedge r_{pk} \vee r_{ml} \wedge r_{lk} \\
&\geqq r_{ml} \wedge r_{lk} = 1
\end{aligned}
$$

一方 $r_{mk}=1$ だから $r_{mk} \wedge r^{(2)}_{\overline{mk}}=1$。よって $R \wedge R^2 \neq O$。　(証明終)

〔例3〕

$$
R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

とおけば

$$
R^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
R \wedge R^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq O,
$$

$$
\overline{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

こうして $R \wedge R^2 \neq O$ となる。したがって $R^2 \leqq \overline{R}$ は成立しない。

〔性質24〕　$n \geqq 2$ のとき, R の第 k 行が対角要素を除いてすべて1でかつ

$$
\bigvee_{i \neq k} \bigvee_{j \neq k} r_{ij}=1
$$

であれば, このとき $R \wedge R^2 \neq O$。

(証明)　性質23による。　(証明終)

4．まとめ

非推移的関係を表現するブール行列について考察をおこない，いくつかの初等的性質を明らかにした。とくに，推移性や連結性，また推移的簡約形や順列行列との関係などについて調べた。非推移的関係の実例は日常生活において多数知られているので，本論文で明らかにした性質はそのような非推移的関係の議論において有用であろうと考えられる。

なお，非推移的関係については，ここで述べた性質以外にもまだ多くの興味深い性質が存在するものと考えられ，それらを明らかにすること，また非推移的関係の性質が本質的な役割を演じるような応用例を見出すことは今後の重要な課題である。

文　献

(1) Aho, A. V., J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: “The Design and Analysis of Computer Algorithms,” Addison—Wesley, Reading, Massachusetts (1974).

(2) Fararo, T. J.: “Mathematical Sociology,” Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).

(3) Golumbic, M. C.: “Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs,” Academic Press, New York (1980).

(4) Hashimoto, H.: “Transitive reduction of a nilpotent boolean matrix,” Discrete Applied Mathematics 8, pp. 51-61 (1984).

(5) 橋本　寛：“連結的関係に関する若干の性質”，山口経済学雑誌，第36巻第５・６号，pp.245-261(昭和62年５月)。

(6) 橋本　寛：“連結性のもとでの関係行列の性質”，山口経済学雑誌，第37巻第１・２号，pp.75-88(昭和62年９月)。

(7) Kim, K. H.: “Boolean Matrix Theory and Applications,” Marcel Dekker, New York (1982).

(8) 近藤・好並：“論理学概論”，岩波書店(1964年４月)。

(9) Lemmon, E. J.: “Beginning Logic,” Thomas Nelson and Sons Ltd. (1965).
(竹尾・浅野訳：“論理学初歩”，世界思想社，1977年４月)。

(10) Marimont, R. B.: “Applications of graphs and boolean matrices to computer programming,” SIAM Review 2, No. 4, pp. 259-268 (Oct., 1960).

(11) 増山元三郎："実験計画法(第2版)", 岩波書店(1972年4月)。
(12) 二階堂副包："現代経済学の数学的方法", 岩波書店(1960年10月)。
(13) 小野寛晰："関係の代数—集合・順序・グラフ—", 教育出版(1974年9月)。
(14) 尾崎・藤原："論理数学の基礎", オーム社(昭和55年10月)
(15) Preparata, F. P. and R. T. Yeh: "Introduction to Discrete Structures for Computer Science and Engineering," Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1973) (榎本彦衛訳："離散構造入門", 日本コンピューター協会, 昭和55年4月)。
(16) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to social, biological, and environmental problems," Prentice—Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
(17) Sharp, H., Jr.: "Enumeration of vacuously transitive relations," Discrete Mathematics 4, pp. 185-196 (1973).
(18) Tarski, A.: "Introduction to Logic," Oxford University Press, New York (1965).