IIIIIIIII **研究ノート** IIIIIIIII

分岐理論の初歩

藤 井 大司郎

最近，Journal of Economic Theory 掲載論文を中心に，経済学研究者にとって耳慣れない「分岐(bifurcation)」という数学概念の使用が見受けられるようになった。この概念が登場するのは経済動学分析の微分方程式や差分方程式モデルの操作においてである。しかし，経済学の数学モデル分析は，複雑な非線形体系に固有に生ずる現象にこれまで余り深入りしてこなかった。このため，非線形現象である分岐の理論については，いわゆる標準的な代数・解析の数学知識のみをもつ経済学研究者向けに書かれた分かり易い解説書がおそらく(わが国では)今のところ皆無ではないかと思われる。

しかし，同じように動学（力学）現象を取り扱っている物理学や工学の分野においては，すでに分岐理論を応用数学レベルでの活用を可能とするような手引書がいくつか現れてきている。本稿では，そうした手引書の中から，Guckenheimer & Holmes [1983] の著書の内容を手掛かりにして，分岐現象の簡易な理解と経済学での直接的適用をめざした公式的説明を試みた。この著書では，力学における分岐理論の実用的応用が主眼とされており，代数と解析，それに位相数学の初歩的知識の範囲でほぼ理解が得られるように著されているので，経済学への応用にも適した内容となっている。われわれは，位相数学的装いは極力避けて述べることとする。しかし，微分・差分方程式の線形系の解法についての知識は最低必要である。

1．分岐の概念

分岐 (bifurcation) の概念を最初に用いたのは Poincaré である。その語句が示すように，本来これは方程式の解が分かれて生じる現象を表現するために用いられた。解の分岐という現象は線形の方程式系では生じない。個々の方程式は線形部分空間をつくるが，異なる線形空間同志は全く交わらないか，交わるとすればただ一回だけ交わるかのいずれかであり，かつその交わり (intersection) も線形部分空間となる。これに対し非線形の場合，例えば，3次方程式 $x^3-\mu x=0$ の実数解の数は，$\mu=0$ の左側と右側でそれぞれ1個と3個であり，$\mu=0$ において解の分岐が見られる。つまり，分岐は非線形固有の現象である。

このように，分岐はパラメータ（上の例では μ）の変化にともなう非線形系の解の枝分かれ現象を意味していた。しかし，位相数学によりその本質が探究されてゆくにつれ，分岐という字義通りの意味の範囲を超えて，より一般的な位相特性に関わる概念へと発展させられてきている。しかし，その発展についてここで述べる余裕はない。

また，その必要もここではなかろう。経済学の文献に現れてくる分岐問題は，現代の位相数学におけるこの分野の成果の中では，比較的明瞭で単純なものに限られているからである。それでも，経済学研究者にとっては，それらは新鮮な視点と鋭い分析手法を提供してくれる。とりわけ，解析的数学モデルを取り扱いながら，非線形のゆえに困難であった経済動学方程式系の定性的および定量的分析が，大変見通しのきくものとなる。

なお，われわれは与えられた方程式体系の定義域すべてにおける解軌道を分析することは一般には出来ない。そうするためには，解析的に十分解ける問題だけを取り扱うか，さもなければ，それをもってしてもまだ大域的分岐を究め尽くすには至っていない位相数学の高度な習熟を必要とする。われわれは，個別の均衡の近傍における局所的分岐についてのみ考察する。

つぎのような微分方程式系を考える。

$$x=f_\mu(x)=f(x,\ \mu)\ ;\quad x\in\boldsymbol{R}^n,\quad \mu\in\boldsymbol{R} \tag{1}$$

xは独立変数である時間 $t\in\boldsymbol{R}$ のベクトル値関数であり，$\dot{x}=\partial x/\partial t$ である。f_μは，パラメータ μ を含むなめらかな（無限に微分可能な）関数であり，$x=\overline{x}$ のとき均衡をもつ，つまり $f_\mu(\overline{x})=0$ とする。双曲的 (hyperbolic) 均衡[1]に関する Hartman [1964] の「線形化定理」によれば，均衡で評価されたxに関するf_μのヤコビヤン導関数 $D_xf_\mu(\overline{x})$ が，全くゼロまたは純虚数の固有値をもたないならば，均衡のある近傍において，(1)の解軌道の動学的振る舞いは(1)の線形化系

$$\dot{x}=D_xf_\mu(\overline{x})(x-\overline{x}) \tag{2}$$

の解軌道のそれと同等である。すなわち，双曲的均衡の近傍においては，非線形系は定性的に線形系によって近似化されうるのである。この定理は，複雑な非線形動学問題の定性的分析が線形化によってアプローチできるということを示しており，このことは，局所動学理論の分析上の利点である。

すぐに気が付かれるように，$D_xf_\mu(\overline{x})$ がゼロの固有値を全くもたなければ $D_xf_\mu(\overline{x})$ は逆行列をもつから，パラメータ μ の各値に対する均衡 $\overline{x}$ の値が一義的に決まることになる。言うまでもなく，これは因関数定理の示唆するところである。しかし，線形化定理は，純虚数固有値の場合を除外する点で因関数定理とは適用条件が異なることに注意すべきである。因関数定理が成立する均衡においても，動学的特性に関しては線形化によって究められない特殊な現象が生じうるのである[2]。先にも述べたように，「分岐」の意味は均衡の枝分かれであったから，それは解の一義性の欠如，すなわち因関数定理の不成立点に関わる現象と考えられていた。しかし，局所的分岐の領域においても，このようにそうでないケースが存在している。

1）$Dxf_\mu(\overline{x})$がゼロ実部の固有値を全くもたないとき，均衡 $\overline{x}$ は双曲的ないし非退化的であると言う。

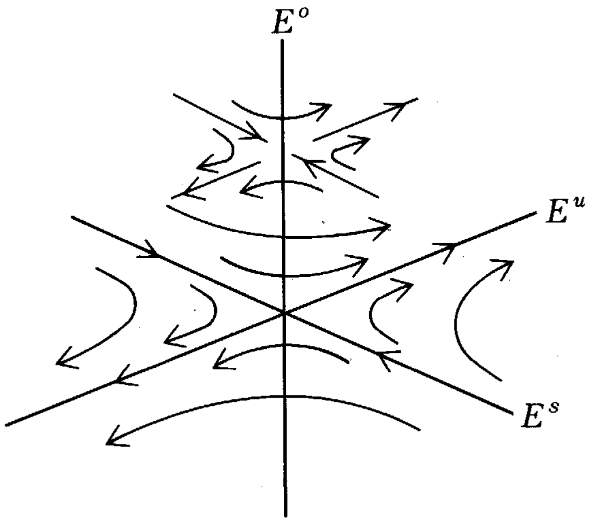
2）Hopf 分岐が生ずるのはこの場合である。

2．不変多様体

さて，分岐問題の本題に立ち入る前に，定性的分析の重要なカギをにぎる中心多様体(center manifolds)の概念についてふれておこう。線形の微分(あるいは差分)方程式系の解法については，すでに十分に解明されている[3)]。線形系を解くことにおいては，固有値とそれらに対する固有ベクトル（によって張られる線形固有空間）を見い出だすことがその中心問題となる。そして，具体的解析解を求めるのではなく，均衡の安定性に関わる定性的結論のみがわれわれの唯一の関心事項だとするなら，個々の固有値の符号[4)]により区別される固有空間を確定しさえすればよい。つまり，図1に示されたような位相図を描く手だてとしての線形固有空間

$$
\begin{aligned}
E^s &= \mathrm{span}\{v^1, \cdot\cdot, v^A\} \\
E^u &= \mathrm{span}\{u^1, \cdot\cdot, u^B\} \\
E^o &= \mathrm{span}\{w^1, \cdot\cdot, w^C\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

図1　不変部分空間による位相図作成例



E^s=span(1, 0, 0)
E^u=span(0, 1, 0)
E^c=span(0, 0, 1)

3）たとえば代表的なテキスト ПОНТРЯГИН [1965] などを見よ。
4）差分系の場合には固有値の絶対値と1との大小関数が区別の基準となる。

を確定すればよい。これらは順に安定部分空間，不安定部分空間，中心空間と呼ばれる。ただし，v^i，u^j，w^kはそれぞれ，負の実部をもつ固有値のA個の固有ベクトル，正の実部をもつ固有値のB個の固有ベクトル，ゼロの実部をもつ固有値のC個の固有ベクトルであり，span$\{\cdot\}$はそれらによって張られる線形部分空間を表わす。また，$A+B+C$は与えられた線形方程式系の次数に等しい[5)]。これらの固有空間は，それぞれの空間に属する点を初期値とする解が常にその空間上にとどまることになるので，「不変部分空間(invariant subspace)と総称される。そして，E^s上の解は指数的に均衡へ向かって減衰してゆき，E^u上の解は指数的に均衡から離れて成長してゆき，E^o上の解は（重固有値でなければ）定常振動ないし停留する。

類推に基づけば，非線形系においてもこの線形系における不変部分空間に対応する集合が考えられる。事実，そうした集合が存在し，それらは一般に非線形となることが分かっている。これらが「不変多様体(invariant manifolds)」と呼ばれるものである。そこで，線形化定理を想起すれば，少なくとも双曲的均衡に関して，不変多様体が線形化された系の固有空間で近似化されうるのではないかと期待されよう。この期待も裏切られないことが明らかにされている。それを保証する定理は，均衡に関する「安定多様体定理」と呼ばれる。それによると，双曲的均衡の場合，対応する線形化系のE^s，E^uに均衡点でそれぞれ接する安定，不安定多様体が存在しており，それらの動学的性質もE^s，E^uと同様である。

分岐問題は，しかし，非双曲的均衡，したがってゼロ実部固有値に関わる問題であるから，われわれの関心は，当然中心空間E^oの非線形対応物に向けられる。これが中心多様体である。中心多様体上の解軌道は，安定及び不安定の多様体とは違って，その動学特性が線形化系から類推されえない。何故なら，その上の解軌道の一次（線形）近似がゼロ実部固有値をもつという

5）重固有値がある場合には，それに対する固有ベクトルはジョルダン標準形法においてつくりだされる一般化された固有ベクトルとして区別されているものとする。詳しくは，例えば，竹内[1966]，第6章を見よ。

だけでは，それの動学的振る舞いを確定することが出来ないからである。局所的に安定性を支配するはずの一次項がゼロだから，近似化による安定性の決定役割は（最初に非ゼロとなる）より高次の項にとって代わられる。したがって，中心多様体の近似形を求めるためには，２次以上のテーラー級数を必要とし，それゆえ，分岐のタイプによっては中心多様体に関するかなり高次までの微分可能性が要求されることになる。ところが，「中心多様体定理」によると，中心多様体の微分可能性は安定及び不安定多様体に比べて限定的である[6]。中心多様体を（近似）解析関数として求める方法は，初等的計算手続きに属するものである。そして，それから得られた結果の式——通常は適当な次数までのテーラー級数——を対応する中心空間 E^o に射影することで，その動学的振る舞いを知ることが出来る[7]。

３．微分系における分岐

前節で述べたように，微分（あるいは差分）方程式系の分岐の特質を決定しているのは，分岐の生じている均衡 $(\bar{x},\ \mu)=(x_0,\ \mu_0)$——これを分岐点と呼ぶ——を通る不変多様体である。分岐の様々なタイプはこれら３種の不変多様体の組み合わせにより決まる。そして定性分析の目的は与えられた分岐問題のタイプを確定することにあると言える。とりわけ，中心多様体を確定することが問題を解くカギとなっている。本節では，１パラメータ系で生ずる代表的なタイプの分岐を簡単な例を用いながら説明する。

微分系については，分岐は一部の固有値がゼロかまたは純虚数のとき（さらに両方を含む場合）に生ずる。我々は，そのうちから最も簡単なケースだ

6）f が x に関して C^r 級（r 回微分可能）であれば，安定及び不安定多様体も C^r 級となるが，中心多様体は C^{r-1} 級（$r=\infty$ ならば，任意の有限値回微分可能）である。また，多様体存在の一義性についても，中心多様体については必ずしも満たされない。

7）詳しくは，Guckenheimer & Holmes [1983]，3.3を見よ。

けを取り上げる。それでも，分岐のタイプは多くの種類が含まれる。

ゼロ固有値ケース

このケースでは，分岐点における f_μ のヤコビヤンが，

$$D_x f_\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \;;\quad \begin{array}{l}\mathbf{A}\text{の固有値はすべて} \\ \text{ゼロでない実部をもつ,}\end{array} \tag{4}$$

の形をしている。ここに含まれる分岐は最もポピュラーであるが，さらに関数 f_μ の形状に関する追加的特性がいくつかの種類を派生させる。それらの特性は，中心多様体の次元や位置を決める要因となっており，横断性条件と呼ばれるものである[8)]。

1）鞍節型　　[例]　$\dot{x} = f_\mu(x) = f(x, \mu) = \mu - x^2$　　(5)

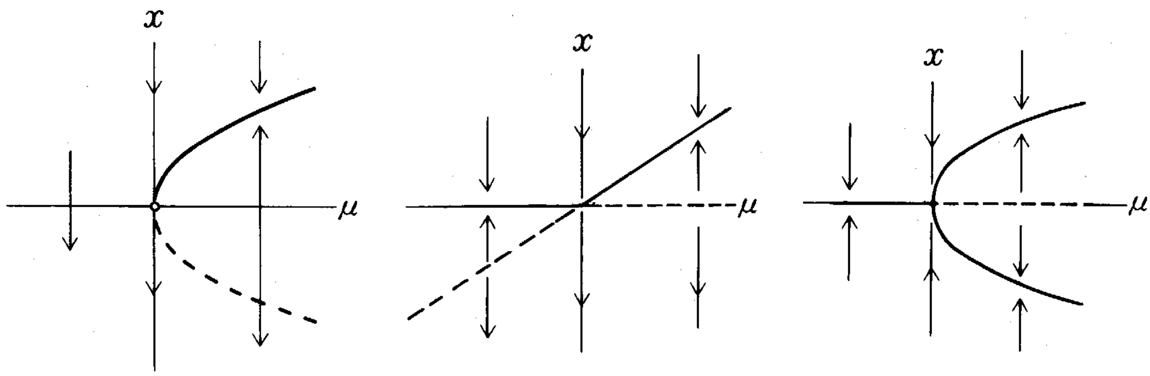
図 2(1)は，分岐ダイヤグラムと呼ばれるもので，均衡の分枝をパラメータ μ の関数として表現したものである。分岐は $\mu_0 = 0$，$x_0 = 0$ において生じており，分岐の左側には均衡は存在せず，その右側には 2 つの双曲的均衡が存在する。分岐点におけるヤコビヤンは $D_x f_\mu(0, 0) = (df_\mu/dx)(0, 0) = 0$ であり，ゼロ固有値ケースの最も単純な例であることが分かる。

この例では不変多様体を調べてみるまでもないが，練習問題として行なってみよう。まず，パラメータ μ を疑似的に体系変数として取り扱うことにより，問題を 2 次元系と考える。

8）多様体同志が与えられた空間内で交わり (intersection) をもつとしても，横断的交点（通常の交点）と非横断的交点（接点）の場合がある。たとえば，ゼロ固有値分岐点は非横断的交点にほかならない。横断的交点はわずかな関数の摂動 (perturbation) によって影響されない（その位相を保持する）が，非横断的交点はそうではない。

図2　ゼロ固有値分岐ダイヤグラム

（太実線；安定的均衡，太破線；不安定均衡）



(1)　鞍節型　　(2)　安定性交替型　　(3)　音叉型

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\mu-x^2\\ \dot{\mu}&=0\end{aligned}\tag{6}$$

これによって，パラメータを含まない体系として問題を取り扱うことが出来る。分岐点におけるxとμとに関するヤコビヤン導関数

$$Df(0,\ 0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\tag{7}$$

についての計算により，2つの固有値λ_1，$\lambda_2=0$と固有ベクトル$w=(1,\ 0)$を得る。もうひとつの不変部分空間は，$\dot{\mu}=0$から自明なように，$\mu=\text{constant}=\mu_0=0$である。つまり，この2次元系には，分岐点で$x$軸$(=\text{span}\{w,\ \mu=0\})$に接する1つの中心多様体が存在する。それが$x$軸自体であることは解析的にも自明であろう。

同様にして，$\mu=\mu_h>0$の均衡についてヤコビヤン導関数を求めれば，

$$Df(0,\ 0)=\begin{bmatrix}x_h & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad x_h=\pm 2\sqrt{\mu_h}\tag{8}$$

となり，2つの均衡は，それぞれ安定及び不安定の多様体をもち，それらは固有ベクトル（1，0）によって張られる空間に接していることが分かる。

以上のことは，すべて解析解から確かめられる。このタイプの分岐を他のゼロ固有値分岐と区別する横断性条件を $x \in \boldsymbol{R}$ の場合について示せば，次のようになる。

$$(\partial f/\partial\mu)(x_0,\ \mu_0) \neq 0 \qquad (9)$$
$$(\partial^2 f/\partial x^2)(x_0,\ \mu_0) \neq 0$$

第一の条件は(7)式より確かめられよう。その下で，第二の条件は，均衡曲線が分岐点の片側にだけ存在するという鞍節型の特性を与えるものである。

2）安定性交替型　[例]　$\dot{x} = f_\mu(x) = f(x,\ \mu) = \mu x - x^2$　(10)

鞍節型の特徴は，均衡の存在がパラメータに左右されていたことである。このタイプとこのつぎのタイプとでは，パラメータに依存しない均衡 $x_0 = 0$； すべての μ に対して $f(x_0) = 0$，が自明な解軌道として常に存在している。例に挙げた方程式の分岐ダイヤグラムは図２(2)に示されている。分岐点の両側に２つの双曲的均衡が存在し，互いに安定性を転換していることから，この名がある。この型を特徴づける横断性条件は，次のとおりである。

$$(\partial f/\partial\mu)(x_0,\ \mu_0) = 0$$
$$(\partial^2 f/\partial x\partial\mu)(x_0,\ \mu_0) \neq 0 \qquad (11)$$
$$(\partial^3 f/\partial x^3)(x_0,\ \mu_0) \neq 0$$

鞍節型の(9)の第一条件はもはや満たされず，代わりに２次の新しい条件が付け加わっている。

3）音叉型　[例]　$\dot{x} = f_\mu(x) = f(x,\ \mu) = \mu x - x^3$　(12)

自明な解軌道が存在するもう一つのタイプとして，さらに f_μ が奇関数 $f_\mu(-x) = -f_\mu(x)$ となる場合である。図２(3)の分岐ダイヤグラムが示すように，このタイプでは，均衡は対称的に３つの分枝に分岐し，かつ自明

な解 $x=0$ の安定性は分岐点を境いに反転している。このタイプの横断性条件は,

$$
\begin{aligned}
(\partial f/\partial u)(x_0,\ \mu_0) &= 0 \\
(\partial^2 f/\partial x\partial\mu)(x_0,\ \mu_0) &\neq 0 \\
(\partial^2 f/\partial x^2)(x_0,\ \mu_0) &= 0 \\
(\partial^3 f/\partial x^3)(x_0,\ \mu_0) &\neq 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

である。安定性交替型の第二条件が満たされず，代わりに2次の新しい条件が付け加わっている。

ゼロ固有値が単一であり，――これを「余次元 (codimension) 1 の分岐」と言う――かつ1次元系の最も簡単なケースでさえ，以上の様に分岐のタイプは多様に生ずる。しかも，これらの場合でさえ一層高次の横断性条件をそなえたタイプをつぎつぎと考えることができ，リストは尽きない。

純虚数固有値ケース

今度は，ゼロ固有値のかわりに純虚数（共役）固有値ペアのみが存在する場合を考える。すなわち，1ペアのみの場合で示せば，ある $\mu=\mu_0$ における均衡 x_0 で評価されたヤコビヤン導関数がつぎのような形をしている場合である。

$$
D_x f(x_0,\ \pi\mu_0)=\begin{bmatrix} 0 & -\omega & \mathbf{0} \\ \omega & 0 & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}\ ;\ \text{Aの固有値はすべてゼロでない実部をもつ,}
\tag{14}
$$

先に述べたように，この非双曲的均衡においては因関数定理が成り立ち，このヤコビヤンは逆行列をもちうる。しかしながら，Hopf [1942] によれば，もし μ の変化とともに対応する固有値が虚数軸を横切る，つまり μ_0

を境いに実部 Re(λ) がその符号を変えるならば，不変多様体の次元が変化することになる。これが，発見者の名前にちなんで Hopf 分岐と呼ばれている現象である。明らかに，Hopf 分岐は 2 次元以上の体系でしか生じない。

どうしてこの場合分岐が生ずると言えるのかを理解するために，つぎの例を考察しよう。

Hopf 分岐 [例]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (d\mu + a(x^2+y^2))\,x - (\omega + b(x^2+y^2))\,y \\ \dot{y} &= (\omega + b(x^2+y^2))\,x + (d\mu + a(x^2+y^2))\,y\end{aligned} \tag{15}$$

ただし，ω, a，d は非ゼロ定数である。この体系は $\mu_0 = 0$，$x_0 = 0$ においてヤコビヤン，

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

をもっている。複素固有値をもつ線形系が極座標への変換で理解し易い代数表現を得ることを思い出し，$x = r\cdot\cos\theta$，$y = r\cdot\sin\theta$，$r \geqq 0$ とおいて，(14)に代入，整理すると，つぎの結果を得る。

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (d\mu + ar^2)\,r \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \\ r &\geqq 0\end{aligned} \tag{17}$$

この結果を参考にすると，θ は $\dot{r}$ 式に影響を与えないから，分岐ダイヤグラムが図 3 のようになることが確かめられよう。

解析解(17)から知られるように，この体系の解軌道は，渦状均衡点をもつ軌道から，分岐点を境いにして，放物面 $r^2 = x^2 + y^2 = -(d/a)\,\mu$ の断面で均衡曲線が与えられるところの極限閉軌道に変わる。そして，存在する

自明解$(x_0, y_0)=(0, 0)$は分岐点の両側でその安定性を転換していることが分かる。dは，実は，

$$d=d(Re(\lambda(\mu)))/d\mu \neq 0 \tag{18}$$

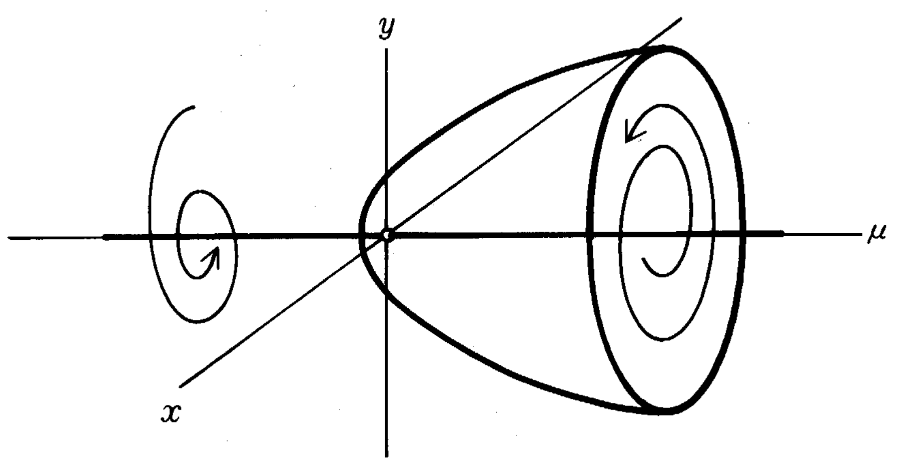
であり，Hopf 分岐が非ゼロのdに依存していることが理解できよう。また，aは，閉軌道の安定性を支配する定数であり，$a>$（$<$）0ならば不安定（安定）極限閉軌道となることが容易に確かめられる。

この場合の分岐点を通る中心多様体は，(16)に対応する固有ベクトル空間に接しているはずであるが，固有ベクトルは複素ベクトル（1，$-i$），（1，i）であるから直感的にはその幾何学的特徴がつかめない。しかし，極座標変換による線形系の周知の解法を用いれば，中心部分空間が$\mu=0$平面上の渦状軌道となることが分かる[9)]。もちろん上記放物面がこの場合の中心多様体である。

4．差分系における分岐

差分方程式系の取り扱いは，いつでも微分系の場合に較べより複雑である。

図3　純虚数固有値(Hopf)分岐ダイヤグラム



9）ПОНТРЯГИН［1965］，第2章を見よ。

本稿の目的は非線形現象である分岐を線形系についての周知の理解のわずかな延長の範囲でとらえ，もっぱらそれらの結果の経済学への応用に結びつけることである。そこで，差分系については，以上の微分系の例示的説明のアナロジーの範囲で，結果だけに簡単にふれておくことで本稿を閉じることとする。

すがることのできるアナロジーは，言うまでもなく，分岐の非双曲特性を決める固有値についてのものである。差分方程式の体系をつぎのようにおこう。ただし添字Tは整数である。

$$x_{T+1}=f_\mu(x_T)=f(x_T,\mu)\ ;\quad x\in \boldsymbol{R}^n,\ \ \mu\in \boldsymbol{R} \tag{19}$$

もちろん均衡は$x_{T+1}=x_T$によって与えられる。差分系の非双曲的均衡は，分岐点におけるf_μのヤコビヤン導関数の固有値の絶対値が1である場合に生ずる。すなわち固有値が1) 1に等しい，2) −1に等しい，3) 絶対値が1の共役複素数，の場合のいずれかである。

固有値の1のケース

微分系におけるゼロ固有値のケースと全く同等である。生ずる分岐のタイプは，鞍節型，安定性交替型，音叉型等であり，個々のタイプを区別する横断性条件なども同様に取り扱われる。

固有値 −1のケース

微分系には現れない離散型独自の分岐タイプ，「フリップ分岐」が生ずる。その分岐ダイヤグラムは，$x\in\boldsymbol{R}$については図4のように示される。上下2つの分枝は周期2で交替している。この分岐が存在するための付加条件はつぎの通りである。

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}=\frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}-1\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\neq 0$$

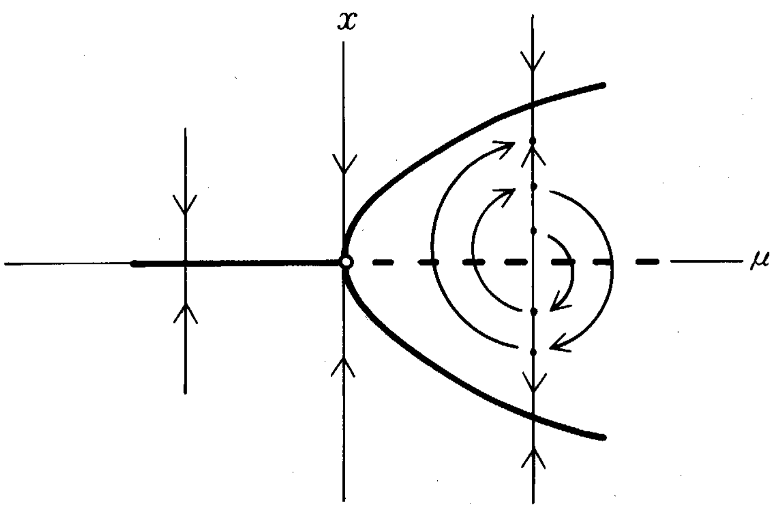
$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\neq 0 \tag{20}$$

ここに，各導関数は分岐点において評価されているものとする。a は分岐する2つの均衡軌道の安定性を支配しており，$a>(<)\,0$ に従って安定（不安定）的となる。

絶対値1の複素固有値ケース

微分系の純虚数固有値ケースに対応しており，Hopf 分岐，つまり均衡点とそれを囲む極限閉軌道が生ずる。差分系の分岐点に対応する固有値は，要するに1の m 乗根（m は正整数）であり，$m=1$ の場合が鞍節型等となり，$m=2$ の場合（-1 の場合）がフリップ分岐となった。しかし，差分

図4　フリップ分岐ダイヤグラム



（2つの分枝は互いに周期2で交替）

系でHopf分岐が生ずるためには，$m \geqq 5$でなければならない。すなわち，分岐点における固有値λは，

$$|\lambda(\mu_0)| = 1,\ \text{ただし}\quad j = 1, 2, 3, 4 \text{に対し}\quad \lambda(\mu_0)^j \neq 1 \tag{21}$$

である[10)]。また，微分系の分岐の存在条件(18)に対応するつぎの条件も必要である。

$$d = d(|\lambda(\mu)|)/d\mu \neq 0 \tag{22}$$

〈参考文献〉

Arnold, V. L. [1977], "Loss of stability of self oscillations close to resonances and versal deformations of equivalent vector fields", *Funct. Anal. Appl*., 11(2), 1-10.

Guckenheimer, J. & Holmes, P. [1983], *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag.

Hartman, P. [1964], *Ordinary Differential Equations*, Willey.

ПОНТРЯГИН Л. С [1965], *ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ* (木村俊房・千葉克裕訳「常微分方程式[新版]」，共立出版，1963.)

竹内啓[1966]，「線形数学」，培風館

10) 3乗根と4乗根の場合には，分岐構造は特別なものとなるという。これについては，Arnold [1977]を参照せよ。なお，1のm乗根は複素平面における単位円上の(1, 0)を起点とするm等分点であることはよく知られている。