巾零ブール行列の特徴付け

柏　木　芳　美

1　はじめに

[2]において，連結的推移的非反射的２元ブール行列を対称群とブール行列

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

によって特徴付けた。この論文では，より一般的である２元巾零ブール行列を対称群とNによって特徴付ける（系４）。更に，その結果を用いて[2]で重要な役割を果たした[２，命題4.2]の別証を与える。

2　記号

[2]の記号をそのまま用いる。この論文では基礎となるブール代数は２元ブール代数{０，１}である。成分がすべて０であるブール行列をO，すべて１であるブール行列をEと書く。$R=(r_{ij})$, $S=(s_{ij})$としたとき，$R\vee S=(r_{ij}\vee s_{ij})$，$R\wedge S=(r_{ij}\wedge s_{ij})$，$\overline{R}=(\overline{r_{ij}})$と定める．$R\leqq S$はすべての$(i, j)$に対して$r_{ij}\leqq s_{ij}$となることである．$a_k\in\{0, 1\}$ $(k\in\{1, \cdots, n\})$としたとき$\vee_{k=1}^{n} a_k=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$と書くこととする。$R\times S=(\vee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj}))$とし，帰納的に$R^1=R$，$R^{k+1}=R^k\times R$とする。$R^l=O$となる自然数$l$が存在

するとき，Rは巾零と呼ばれる。R^tによりRの転置行列を表す([3]ではR'と書かれている)。Rが$R \vee R^t \vee I = E$を満たすときは連結的，$R^2 \leqq R$を満たすときは推移的，$R \wedge I = O$を満たすときは非反射的と呼ばれる。n次対称群を$\mathfrak{S}_n$と書く。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$に対し，$R^\sigma = (r_{\sigma(i)\sigma(j)})$と置く。この論文で重要な役割を演じるブール行列は$N$である。

3　結果

まず，ここで使う基本的性質をまとめておく。

補題１　Rをn次巾零ブール行列とする。このとき次が成り立つ。

(1)　lを自然数としたときR^lも巾零。

(2)　$S \leqq R$とするとSも巾零。

(3)　R^tも巾零。

(4)　$\sigma \in \mathfrak{S}_n$とすると$R^\sigma$も巾零。

(5)　$R \wedge I = O$。

(6)　$R = (r_{ij})$とする。$r_{ij} = 1$ならば$r_{ji} = 0$。この性質は非対称 (asymmetric) と呼ばれる。

証明　kを自然数とする。

(1)　$R^k = O$とすると，$(R^l)^k = (R^k)^l = O$。

(2)　すべてのkに対して，$S^k \leqq R^k$なので。

(3)　$(R^t)^k = (R^k)^t$より。

(4)　$(R^k)^\sigma = (R^\sigma)^k$　([２，命題3.2(7)])　より。

(5)　$R = (r_{ij})$とする。$r_{ii} = 1$ならばすべてのkに対してR^kの（i，i）成分が１であることが帰納法により容易に示される。

(6)　$r_{ji} = 1$と仮定すると，R^2の(i，i)成分は１となるので(1)より(5)に反する。

[２，命題4.1(4)]を巾零行列に一般化した次の補題が鍵となる。

補題２　巾零ブール行列は成分がすべて０の行と列を持つ。

証明　Rを巾零行列とする。成分がすべての０の行をRが持たないとする

と$RE=E$となる。よって，すべての自然数kに対して$R^kE=E$。従って，$O=E$となり矛盾。R^tを考えるとRは成分がすべて0の列を持つ。

次の定理は巾零行列の1つの判定法を与える。

定理3 Rをn次ブール行列とする。Rが零行を持たねば巾零ではない。Rの第i_1行が零行であるとし$\sigma_1=(i_1 n)\in\mathfrak{S}_n$とする($i_1=n$のときは$\sigma_1=1$。以下同様)。

$$R^{\sigma_1}=\begin{pmatrix} & & * \\ & R_1 & \vdots \\ & & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。ただし，R_1は$n-1$次，$*$は0または1。R_1が零行を持たねばRは巾零ではない。R_1の第i_2行が零行であるとし$\sigma_2=(i_2 n-1)\in\mathfrak{S}_{n-1}$とする。

$$R_1^{\sigma_2}=\begin{pmatrix} & & * \\ & R_2 & \vdots \\ & & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。ただし，R_2は$n-2$次。R_2が零行を持たねばRは巾零ではない。以下，この操作を繰り返す。このとき，途中で終わるとRは巾零ではなく，最後まで行くとRは巾零。

証明 $1\leqq l\leqq n-1$とする。$\tau\in\mathfrak{S}_l$に対し，$\tau(i)=i$ $(i=l+1, \cdots, n)$とおくことにより$\mathfrak{S}_l\leqq\mathfrak{S}_n$と見なす。$\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_j$とおく($j\in\{1, \cdots, n-1\}$)。

$$R^{\sigma}=\begin{pmatrix} & & & * & * & \cdots & * \\ & R_j & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。ただし，R_j はn-j次である。帰納法により，

$$(R^t)^\sigma=(R^\sigma)^t=\begin{pmatrix} & & & * & * & \cdots & * \\ & R_j^t & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

よって，Rが巾零であるための必要十分条件はR_jが巾零。最後まで行くと，$R^\sigma \leqq N$となりRは巾零である。

この定理より，

系4　Rをn次巾零ブール行列とする。このとき$R^\sigma \leqq N$となる$\sigma \in \mathfrak{S}_n$が存在する。

系5　成分に$\dfrac{n(n-1)}{2}+1$個以上1を持つn次ブール行列は巾零ではない。

次に，巾零ブール行列における連結性を特徴付ける。

補題6　n次巾零ブール行列Rが連結的であるための必要十分条件はRの1の個数が$\dfrac{n(n-1)}{2}$であること。

証明　Rの1の個数をmとする。補題1の(5)と(6)より，$R \vee R^t \vee I$の1の個数は$2m+n$。よって，Rが連結的であるための必要十分条件は$m=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

次は[3，性質3]と[2，定理4.1]からも導かれる。

命題7　Rをn次ブール行列とする。このときRが巾零かつ連結的であるための必要十分条件は$R=N^\sigma$となる$\sigma \in \mathfrak{S}_n$が存在すること。

証明　N^σは巾零かつ連結的なので十分条件であることは明らか。Rが巾零ならば系4より$R \leqq N^\sigma$となる$\sigma \in \mathfrak{S}_n$が存在する。更に連結的であれば補題6より$R=N^\sigma$となる。

これより[2，命題4.2]の別証が得られる。

系8　n次ブール行列Rが連結的かつ推移的かつ非反射的であるための必

要十分条件は$R=N^{\sigma}$となる$\sigma\in\mathfrak{S}_n$が存在すること。

証明　[3,性質2]より推移的かつ非反射的であれば巾零。従って，命題7より。逆は，[2,系3.1]より。

参考文献

[1]　Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "*Relations and Graphs*", Springer, Berlin (1993).

[2]　柏木芳美："連結的，推移的，非反射的ブール行列の一意性"，山口大学経済学雑誌，第45巻，第4号(1997).

[3]　橋本寛："連結的推移関係行列の性質"，山口大学経済学雑誌，第34巻，第3・4号，pp. 387-405 (1985).