推移性のもとでのSemitransitive関係とFerrers関係

橋　本　　　寛

Abstract

Properties of semitransitive relations and Ferrers relations which are special binary relations are considered using Boolean matrices whose elements are binary. These relations are essential to discussion of semiorders and interval orders which are closely related to utility. Their properties are obtained from generalized properties of negatively transitive relations. Some elementary properties of semitransitive relations and Ferrers relations are shown under transitivity and negative transitivity.

1．はじめに

特殊な2項関係である semitransitive 関係と Ferrers 関係の性質について，ブール行列を用いてそれらの定義および性質を行列表現し考察をおこなっている。これらの2項関係は通常の関係論理学などにおける関係としてはそれほど一般的ではないかもしれないが，効用と密接な関連をもつ semiorder や interval order の議論においては必須のものである［6,7,13,19,22］。

本論文では，すでに報告している negatively transitive 関係に関する性質を一般化したもの［12］から，その特別な場合として semitransitive 関係と Ferrers 関係に関する性質を導き，さらに推移性のもとでの semitransitive 関係と Ferrers 関係の初歩的な性質を得ている。推移関係や negatively transitive 関係は様々な応用において重要な2項関係であるが，semitransitive 関係や Ferrers 関係もいくつかの分野において重要な役割を演じており，古くからそれらの若干の基本的性質はよく知られている［6,7,13,19］。ここでは従来よく知られていると思われる性質やほとんど自明な性質も含めて semitransitive 関係および Ferrers 関係の性質を整理して列挙している。

2．定義

2項関係を0，1の要素をもつブール行列によって表現する。n次ブール行列$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$に対して以下のように演算を定義する。

$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}] = [\max(r_{ij}, s_{ij})]$，　$R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}] = [\min(r_{ij}, s_{ij})]$

$\overline{R} = [\overline{r_{ij}}] = [1 - r_{ij}]$，　$R' = [r_{ji}]$（転置）

$\Delta R = R \wedge \overline{R}'$，　$\nabla R = R \wedge R'$

$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$，$R \Diamond S = [(r_{i1} \vee s_{1j}) \wedge \cdots \wedge (r_{in} \vee s_{nj})]$

$R^0 = I = [\delta_{ij}]$（δ_{ij}はクロネッカーのデルタ），$R^{k+1} = R^k \times R$（$k = 0,1,2,\cdots$）

$R \leqq S \Leftrightarrow r_{ij} \leqq s_{ij}$（$i, j = 1,2,\cdots,n$）

特殊な行列として，Oで零行列，Eで全ての要素が1の行列を表す。すでに定めているIは単位行列である。このとき，反対称的関係は$\nabla R \leqq I$なる行列Rで表され，非対称的関係は$\nabla R = O$なる行列Rで表される。また連結的関係は$R \vee R' \vee I = E$なる行列Rで表される。推移関係は$R^2 \leqq R$なる行列Rで表現され，negatively transitive関係は$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$またはこれと同値な$R \leqq R \Diamond R$なる行列$R$で表現される。さらにsemitransitive関係は$R^2 \leqq R \Diamond R$なる行列Rで表現され，Ferrers関係は$R \times \overline{R}' \times R \leqq R$なる$R$で表現される［6,7,13,18,19］。Ferrers関係はbiorderと呼ばれることもある［2,3,4］。非反射的なFerrers関係はinterval orderと呼ばれ，semitransitiveであるinterval orderはsemiorderと呼ばれる［6,13］。

3．結果

まずnegatively transitive関係の性質の一般化されたものを用いてsemitransitive関係とFerrers関係に関する性質を導き，その性質について考察をおこない，いくつかの関連する性質を得る。次にその得られた性質の特別な場合として，推移性およびnegative transitivityのもとでのsemitransitive関係とFerrers関係の初等的な性質を示す。なお，以下においては0，1の要素をもつn次ブール行列を一般に$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$，$T=[t_{ij}]$などで表す。

［性質1］［12］$S \wedge T' \leqq I$のとき

(1) $\bar{R}\times\bar{S}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; R\times T\leqq R$　(3) $\bar{S}\times\bar{R}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; T\times R\leqq R$

(2) $\bar{R}\times\bar{T}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; R\times S\leqq R$　(4) $\bar{T}\times\bar{R}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; S\times R\leqq R$

［性質 2］$T\wedge S'\leqq I$のとき

(1) $\bar{R}\times\bar{S}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; R\times T\leqq R$　(3) $\bar{S}\times\bar{R}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; T\times R\leqq R$

(2) $\bar{R}\times\bar{T}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; R\times S\leqq R$　(4) $\bar{T}\times\bar{R}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; S\times R\leqq R$

(証明) $T\wedge S'\leqq I \Leftrightarrow S'\wedge T\leqq I \Leftrightarrow (S'\wedge T)' \leqq I' \Leftrightarrow S\wedge T'\leqq I$であるから性質 1 による。 (証明終)

［性質 3］$(R\times\overline{R'})\wedge S'\leqq I$のとき

(1) $\bar{R}\times\bar{S}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; R^2\times\overline{R'}\leqq R$　(3) $\bar{S}\times\bar{R}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(2) $\bar{R}\times(\bar{R}\Diamond R')\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; R\times S\leqq R$　(4) $(\bar{R}\Diamond R')\times\bar{R}\leqq\bar{R} \;\Rightarrow\; S\times R\leqq R$

(証明) 性質 2 において$T=R\times\overline{R'}$とおけばよい。 (証明終)

上の性質 3 に関してはいくつかの注意すべき点がある。まず前提条件の$(R\times\overline{R'})\wedge S'\leqq I$については以下の性質 6 で示すように，一般に$(R\times\overline{R'})\wedge S'\leqq I \Leftrightarrow S\times R\leqq R$となるので，$(R\times\overline{R'})\wedge S'\leqq I$を$S\times R\leqq R$で置き換えることができる。

次に(1)の$R^2\times\overline{R'}\leqq R$については，これを満たす行列$R$は semitransitive 関係を表現する行列となり，性質11などに示すような同値な条件が知られている。

(2)の$\bar{R}\times(\bar{R}\Diamond R')\leqq\bar{R}$に関しては，性質19で示すように，

$$\bar{R}\times(\bar{R}\Diamond R')\leqq\bar{R} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$$

となり，また$\bar{R}\times(\bar{R}\Diamond R')\leqq\bar{R} \;\Leftrightarrow\; \bar{R}\times(\bar{R}\Diamond R')=\bar{R}$となる。しかし，一般に単独で$\bar{R}\times(\bar{R}\Diamond R')\leqq\bar{R}$または$\bar{R}\times(\bar{R}\Diamond R')=\bar{R}$が成立する訳ではない。

(3)の$R\times\overline{R'}\times R\leqq R$を満たす$R$は Ferrers 関係を表現する行列となり，性質25などで示すような同値条件が知られている。

(4)の $(\bar{R}\Diamond R')\times\bar{R}\leqq\bar{R}$は(2)の場合の$\bar{R}\times(\bar{R}\Diamond R')\leqq\bar{R}$とは違って，性質21で示すように一般に成立する。したがって，(4)においてこの条件は不要となる。このことは，すでに前提条件に関して述べたように，$(R\times\overline{R'})\wedge S'\leqq I \Leftrightarrow S\times R\leqq R$であることからもわかる。

［性質4］［1,14,16,20,21］　$R\times S\leqq T \Leftrightarrow R\leqq T\diamond\overline{S}' \Leftrightarrow S\leqq\overline{R}'\diamond T$

［性質5］［10］（1）$S\times R\leqq R \Leftrightarrow (S\wedge\overline{I})\times R\leqq R$

（2）$R\times S\leqq R \Leftrightarrow R\times(S\wedge\overline{I})\leqq R$

［性質6］次の条件は同値である。

(1) $S\times R\leqq R$

(2) $R\times\overline{R}'\leqq\overline{S}'$

(3) $(R\times\overline{R}')\wedge S'=O$

(4) $(S\wedge\overline{I})\times R\leqq R$

(5) $R\times\overline{R}'\leqq\overline{S}'\vee I$

(6) $(R\times\overline{R}')\wedge S'\leqq I$

（証明）(1) $\Leftrightarrow$（2）性質4によって，$S\times R\leqq R \Leftrightarrow R\leqq\overline{S}'\diamond R \Leftrightarrow R\times\overline{R}'\leqq\overline{S}'$ となる。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 明らかである。

(1) $\Leftrightarrow$ (4) 性質5(1)による。

(4) $\Leftrightarrow$ (5) 性質4によって，$(S\wedge\overline{I})\times R\leqq R \Leftrightarrow R\leqq(\overline{S}'\vee I)\diamond R \Leftrightarrow R\times\overline{R}'\leqq\overline{S}'\vee I$。

(5) $\Leftrightarrow$ (6) 明らかである。（証明終）

［性質7］次の条件は同値である。

(1) $R\times S\leqq R$

(2) $\overline{R}'\times R\leqq\overline{S}'$

(3) $(\overline{R}'\times R)\wedge S'=O$

(4) $R\times(S\wedge\overline{I})\leqq R$

(5) $\overline{R}'\times R\leqq\overline{S}'\vee I$

(6) $(\overline{R}'\times R)\wedge S'\leqq I$

（証明）性質6と同様である。（証明終）

$R\times S\leqq R$ の同値条件が文献［12］でも示されている。

［注意1］一般には，「$S\times R\leqq R \Rightarrow R\times S\leqq R$」とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$S\times R\leqq R$ であるが，$R\times S\leqq R$ とはならない。

［性質8］次の条件は同値である。

(1) $R^2\leqq R$

(2) $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'$

(7) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R$

(8) $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\vee I$

(3) $\overline{R'}\times R \leqq \overline{R'}$

(4) $(R\times\overline{R'})\wedge R' = O$

(5) $(\overline{R'}\times R)\wedge R' = O$

(6) $(R\wedge\overline{I})\times R \leqq R$

(9) $\overline{R'}\times R \leqq \overline{R'}\vee I$

(10) $(R\times\overline{R'})\wedge R' \leqq I$

(11) $(\overline{R'}\times R)\wedge R' \leqq I$

(証明) 性質 6 および性質 7 による。　(証明終)

上の性質 8 の一部はすでによく知られている [9]。

[性質 9] 次の条件は同値である。

(1) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2) $\overline{R}\times R' \leqq R'$

(3) $R'\times\overline{R} \leqq R'$

(4) $(\overline{R}\times R')\wedge\overline{R'} = O$

(5) $(R'\times\overline{R})\wedge\overline{R'} = O$

(6) $(\overline{R}\wedge\overline{I})\times\overline{R} \leqq \overline{R}$

(7) $\overline{R}\times(\overline{R}\wedge\overline{I}) \leqq \overline{R}$

(8) $\overline{R}\times R' \leqq R'\vee I$

(9) $R'\times\overline{R} \leqq R'\vee I$

(10) $(\overline{R}\times R')\wedge\overline{R'} \leqq I$

(11) $(R'\times\overline{R})\wedge\overline{R'} \leqq I$

(証明) 性質 8 において R を $\overline{R}$ とおけばよい。　(証明終)

上の性質 9 の $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ なる R は negatively transitive 関係を表現する行列である。

[性質10] 次の条件は同値である。

(1a) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(1b) $(\overline{R'})^2 \leqq \overline{R'}$

(2) $\overline{R'}\times R \leqq R$

(3) $R\times\overline{R'} \leqq R$

(4) $(\overline{R'}\times R)\wedge\overline{R} = O$

(5) $(R\times\overline{R'})\wedge\overline{R} = O$

(6) $(\overline{R'}\wedge\overline{I})\times\overline{R'} \leqq \overline{R'}$

(7) $\overline{R'}\times(\overline{R'}\wedge\overline{I}) \leqq \overline{R'}$

(8) $\overline{R'}\times R \leqq R\vee I$

(9) $R\times\overline{R'} \leqq R\vee I$

(10) $(\overline{R'}\times R)\wedge\overline{R} \leqq I$

(11) $(R\times\overline{R'})\wedge\overline{R} \leqq I$

(証明) 性質 9 において R を R' とおけばよい。　(証明終)

[性質11] 次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R\Diamond R$

(2) $(R')^2 \leqq R'\Diamond R'$

(3) $R'\times\overline{R} \leqq \overline{R}\Diamond R'$

(9) $(R')^2\times\overline{R} \leqq R'$

(10) $R'\times(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(11) $(\overline{R})^2\times R' \leqq \overline{R}$

(4) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R}$

(5) $\overline{R} \times R' \leqq R' \Diamond \overline{R}$

(6) $R \times \overline{R'} \leqq \overline{R'} \Diamond R$

(7) $(\overline{R'})^2 \leqq \overline{R'} \Diamond \overline{R'}$

(8) $\overline{R'} \times R \leqq R \Diamond \overline{R'}$

(12) $\overline{R} \times (R')^2 \leqq R'$

(13) $R^2 \times \overline{R'} \leqq R$

(14) $R \times (\overline{R'})^2 \leqq \overline{R'}$

(15) $(\overline{R'})^2 \times R \leqq \overline{R'}$

(16) $\overline{R'} \times R^2 \leqq R$

（証明）　$R^2 \leqq R \Diamond R$　(1)

$\Leftrightarrow (R^2)' \leqq (R \Diamond R)'$

$\Leftrightarrow (R')^2 \leqq R' \Diamond R'$　(2)　$\Leftrightarrow (R')^2 \times \overline{R} \leqq R'$　(9)

$\Leftrightarrow R' \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Diamond R'$　(3)　$\Leftrightarrow R' \times (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$　(10)

$\Leftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R}$　(4)　$\Leftrightarrow (\overline{R})^2 \times R' \leqq \overline{R}$　(11)

$\Leftrightarrow \overline{R} \times R' \leqq R' \Diamond \overline{R}$　(5)　$\Leftrightarrow \overline{R} \times (R')^2 \leqq R'$　(12)

$R^2 \leqq R \Diamond R$　(1)　$\Leftrightarrow R^2 \times \overline{R'} \leqq R$　(13)

$\Leftrightarrow R \times \overline{R'} \leqq \overline{R'} \Diamond R$　(6)　$\Leftrightarrow R \times (\overline{R'})^2 \leqq \overline{R'}$　(14)

$\Leftrightarrow (\overline{R'})^2 \leqq \overline{R'} \Diamond \overline{R'}$　(7)　$\Leftrightarrow (\overline{R'})^2 \times R \leqq \overline{R'}$　(15)

$\Leftrightarrow \overline{R'} \times R \leqq R \Diamond \overline{R'}$　(8)　$\Leftrightarrow \overline{R'} \times R^2 \leqq R$　(16)　（証明終）

上の性質11の条件はsemitransitive関係を表現する行列に関する同値条件であり，いずれもほとんど明らかである。また，(1)，(2)，(4)，(7)によって

$$R^2 \leqq R \Diamond R \Leftrightarrow (R')^2 \leqq R' \Diamond R' \Leftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R} \Leftrightarrow (\overline{R'})^2 \leqq \overline{R'} \Diamond \overline{R'}$$

であるから，R が semitransitive 関係を表現する行列であれば，R'，$\overline{R}$，$\overline{R'}$ も semitransitive 関係を表現する行列となる。

[性質12] 次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$

(2) $\overline{R'} \leqq \overline{R'} \Diamond \overline{R'} \Diamond R$

(3) $R \leqq \overline{R'} \Diamond R \Diamond R$

(4) $R \leqq R \Diamond R \Diamond \overline{R'}$

(5) $\overline{R'} \leqq R \Diamond \overline{R'} \Diamond \overline{R'}$

(6) $\overline{R} \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R} \Diamond R'$

(7) $R' \leqq \overline{R} \Diamond R' \Diamond R'$

(8) $R' \leqq R' \Diamond R' \Diamond \overline{R}$

(9) $\overline{R} \leqq R' \Diamond \overline{R} \Diamond \overline{R}$

（証明） (1) $\Leftrightarrow$ (2)　性質11(1)と(9)によって

$$R^2 \leqq R \Diamond R \Leftrightarrow (R')^2 \times \overline{R} \leqq R' \Leftrightarrow \overline{R'} \Diamond \overline{R'} \Diamond R \geqq \overline{R'} \Leftrightarrow \overline{R'} \leqq \overline{R'} \Diamond \overline{R'} \Diamond R$$

(1) ⇔ (3), …, (1) ⇔ (9)　性質11(1)と(10), (11), …, (16)による。

(証明終)

［性質13］次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R\Diamond R$

(2) $R^2 \wedge (\overline{R})^2 = O$ [15]

(3) $(R')^2 \wedge (\overline{R'})^2 = O$

(4) $(R\times\overline{R'}) \wedge (R'\times\overline{R}) = O$ [5, 11]

(5) $(\overline{R'}\times R) \wedge (\overline{R}\times R') = O$

(証明) (1)⇔ (2)　$R^2 \leqq R\Diamond R \Leftrightarrow R^2 \wedge (\overline{R\Diamond R}) = O \Leftrightarrow R^2 \wedge (\overline{R})^2 = O$

(2) ⇔ (3)　$R^2 \wedge (\overline{R})^2 = O \Leftrightarrow (R^2 \wedge (\overline{R})^2)' = O' \Leftrightarrow (R')^2 \wedge (\overline{R'})^2 = O$

(1) ⇔ (4)　$R^2 \leqq R\Diamond R \Leftrightarrow R\times\overline{R'} \leqq \overline{R'}\Diamond R$　(性質11(1)(6))

$\Leftrightarrow (R\times\overline{R'}) \wedge (\overline{\overline{R'}\Diamond R}) = O \Leftrightarrow (R\times\overline{R'}) \wedge (R'\times\overline{R}) = O$

(1) ⇔ (5)　$R^2 \leqq R\Diamond R \Leftrightarrow \overline{R'}\times R \leqq R\Diamond\overline{R'}$　(性質11(1)(8))

$\Leftrightarrow (\overline{R'}\times R) \wedge (\overline{R\Diamond\overline{R'}}) = O \Leftrightarrow (\overline{R'}\times R) \wedge (\overline{R}\times R') = O$　(証明終)

［性質14］(1) $\overline{R}\Diamond R' \geqq I$

(2) $R\times\overline{R'} \leqq \overline{I}$

(3) $(R\times\overline{R'}) \wedge I = O$

(4) $(R\times\overline{R'}) \wedge \overline{I} = R\times\overline{R'}$

(証明) (1) 一般に $R'\times I \leqq R'$ であり，また $R'\times I \leqq R' \Leftrightarrow I \leqq \overline{R}\Diamond R'$ であるから $I \leqq \overline{R}\Diamond R'$ が一般に成立する。

(2) 明らかに $\overline{R}\Diamond R' \geqq I \Leftrightarrow R\times\overline{R'} \leqq \overline{I}$ となる。

(3) (2)による。

(4) (3)による。　(証明終)

上の性質14は，実質的にはすでによく知られている [14, 17, 21]。

［性質15］(1) $R'\Diamond\overline{R} \geqq I$

(2) $\overline{R'}\times R \leqq \overline{I}$

(3) $(\overline{R'}\times R) \wedge I = O$

(4) $(\overline{R'}\times R) \wedge \overline{I} = \overline{R'}\times R$

(証明) (1)　性質14(1)において R を R' とおけば $\overline{R'}\Diamond R \geqq I$ となるので，転置して $R'\Diamond\overline{R} \geqq I$ が得られる。

(2)－(4) 性質14(2)－(4)から上の(1)と同様にして得られる。　(証明終)

［性質16］(1) $\overline{R'}\Diamond R \geqq I$

(2) $R'\times\overline{R} \leqq \overline{I}$

(3) $(R'\times\overline{R}) \wedge I = O$

(4) $(R'\times\overline{R}) \wedge \overline{I} = R'\times\overline{R}$

(証明) 性質14において R を R' とおく。　(証明終)

［性質17］［17］(1) $R\Diamond\overline{R'}\geqq I$　　(3) $(\overline{R}\times R')\wedge I=O$

(2) $\overline{R}\times R'\leqq\overline{I}$　　(4) $(\overline{R}\times R')\wedge\overline{I}=\overline{R}\times R'$

（証明）性質15において R を R' とおく。（証明終）

［性質18］［17］(1) $(R\Diamond\overline{R'})^2=R\Diamond\overline{R'}$　　(3) $(R'\Diamond\overline{R})^2=R'\Diamond\overline{R}$

(2) $(\overline{R'}\Diamond R)^2=\overline{R'}\Diamond R$　　(4) $(\overline{R}\Diamond R')^2=\overline{R}\Diamond R'$

［性質19］次の条件は同値である。

(1) $\overline{R}\times(\overline{R}\Diamond R')\leqq\overline{R}$　　(3) $\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(2) $\overline{R}\Diamond R'\leqq R'\Diamond\overline{R}$　　(4) $\overline{R}\times(\overline{R}\Diamond R')=\overline{R}$

（証明）(1) ⇔ (2) 明らかである。

(2) ⇔ (3)　$\overline{R}\Diamond R'\leqq R'\Diamond\overline{R}\Leftrightarrow R\times\overline{R'}\geqq\overline{R'}\times R\Leftrightarrow\overline{R'}\times R\leqq R\times\overline{R'}$

(1) ⇔ (4)　性質14によって $\overline{R}\Diamond R'\geqq I$ であるから明らかである。（証明終）

［注意2］一般には，$\overline{R}\times(\overline{R}\Diamond R')\leqq\overline{R}$ とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$\overline{R}\times(\overline{R}\Diamond R')\leqq\overline{R}$ とはならない。

なお，性質21で示すように $(\overline{R}\Diamond R')\times\overline{R}\leqq\overline{R}$ は一般に成立する。さらに，性質22で示すように $\overline{R}\times(R'\Diamond\overline{R})\leqq\overline{R}$ も成立する。また，性質14で示したように $\overline{R}\Diamond R'\geqq I$ であるから，$\overline{R}\times(\overline{R}\Diamond R')\geqq\overline{R}$ は成立する。

［性質20］次の条件は同値である。

(1) $(R'\Diamond\overline{R})\times\overline{R}\leqq\overline{R}$　　(3) $R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\times R$

(2) $R'\Diamond\overline{R}\leqq\overline{R}\Diamond R'$　　(4) $(R'\Diamond\overline{R})\times\overline{R}=\overline{R}$

（証明）(1) 性質19(1)において R を R' とおけば

$$\overline{R'}\times(\overline{R'}\Diamond R)\leqq\overline{R'}\Leftrightarrow(\overline{R'}\times(\overline{R'}\Diamond R))'\leqq(\overline{R'})'$$

$$\Leftrightarrow(\overline{R'}\Diamond R)'\times\overline{R}\leqq\overline{R}\Leftrightarrow(R'\Diamond\overline{R})\times\overline{R}\leqq\overline{R}$$

となって上記の(1)が得られる。

(2)－(4) 性質19(2)－(4)において上の(1)と同様にすればよい。（証明終）

［性質21］(1) $(\overline{R}\Diamond R')\times\overline{R}\leqq\overline{R}$　　(2) $(\overline{R}\Diamond R')\times\overline{R}=\overline{R}$

(証明) (1) 明らかに $\overline{R}\Diamond R'\leqq\overline{R}\Diamond R'$ であり，また $\overline{R}\Diamond R'\leqq\overline{R}\Diamond R' \Leftrightarrow (\overline{R}\Diamond R')\times\overline{R}\leqq\overline{R}$ であるから，一般に $(\overline{R}\Diamond R')\times\overline{R}\leqq\overline{R}$ となる。

(2) 性質14によって $\overline{R}\Diamond R'\geqq I$ であるから $(\overline{R}\Diamond R')\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow (\overline{R}\Diamond R')\times\overline{R}=\overline{R}$ となる。したがって(1)による。 (証明終)

[性質22] (1) $\overline{R}\times(R'\Diamond\overline{R})\leqq\overline{R}$ (2) $\overline{R}\times(R'\Diamond\overline{R})=\overline{R}$

(証明) (1) 性質21(1)において R を R' とおけば

$$(\overline{R'}\Diamond R)\times\overline{R'}\leqq\overline{R'} \Leftrightarrow ((\overline{R'}\Diamond R)\times\overline{R'})'\leqq(\overline{R'})'$$

$$\Leftrightarrow \overline{R}\times(\overline{R'}\Diamond R)'\leqq\overline{R} \Leftrightarrow \overline{R}\times(R'\Diamond\overline{R})\leqq\overline{R}$$

(2) 性質21(2)において上の(1)と同様にすればよい。 (証明終)

[性質23] [21] (1) $(R\Diamond\overline{R'})\times R\leqq R$ (2) $(R\Diamond\overline{R'})\times R=R$

(証明) 性質21において R を $\overline{R}$ とおけばよい。 (証明終)

[性質24] [21] (1) $R\times(\overline{R'}\Diamond R)\leqq R$ (2) $R\times(\overline{R'}\Diamond R)=R$

(証明) 性質22において R を $\overline{R}$ とおけばよい。 (証明終)

[性質25] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(2) $R'\times\overline{R}\times R'\leqq R'$ [18, 20]

(3) $\overline{R}\times R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}$ [18, 20]

(4) $\overline{R'}\times R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}$ [5]

(5) $\overline{R}\times R'\leqq\overline{R}\Diamond R'$

(6) $R'\times\overline{R}\leqq R'\Diamond\overline{R}$

(7) $\overline{R'}\times R\leqq\overline{R'}\Diamond R$

(8) $R\times\overline{R'}\leqq R\Diamond\overline{R'}$

(証明) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$ (1) $\Leftrightarrow (R\times\overline{R'}\times R)'\leqq R' \Leftrightarrow R'\times\overline{R}\times R'\leqq R'$ (2)
$\Leftrightarrow \overline{R}\times R'\leqq\overline{R}\Diamond R'$ (5) $\Leftrightarrow \overline{R}\times R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}$ (3) $\Leftrightarrow R'\times\overline{R}\leqq R'\Diamond\overline{R}$ (6)
$\Leftrightarrow (R'\times\overline{R})'\leqq(R'\Diamond\overline{R})' \Leftrightarrow \overline{R'}\times R\leqq\overline{R'}\Diamond R$ (7) $\Leftrightarrow \overline{R'}\times R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}$ (4)
$\Leftrightarrow R\times\overline{R'}\leqq R\Diamond\overline{R'}$ (8) (証明終)

上の条件は Ferrers 関係を表現する行列の同値条件であるが，ほとんど自明であり，またよく知られている [18, 20]。なお，(1)，(2)，(3)，(4) が同値であることから，semitransitive 関係のときと同様，R が Ferrers 関係を表現する行列であれば，R'，$\overline{R}$，$\overline{R'}$ も Ferrers 関係を表現する行列となる [4, 5, 18, 20]。

すでに示している semitransitive 関係を表現する行列の同値条件と Ferrers

関係を表現する行列の同値条件を比較することは興味深い。たとえば，semitransitive関係を表現する行列の同値条件である性質11の(6)(8)と，上記のFerrers関係を表現する行列の同値条件である性質25の(8)(7)を比較すると次のようになっている。

semitransitive関係　$R\times\overline{R'}\leqq\overline{R'}\Diamond R \Leftrightarrow \overline{R'}\times R\leqq R\Diamond\overline{R'}$

Ferrers関係　$R\times\overline{R'}\leqq R\Diamond\overline{R'} \Leftrightarrow \overline{R'}\times R\leqq\overline{R'}\Diamond R$

次の性質は明らかである。

［性質26］　$\nabla(R') = \nabla R$

［性質27］次の条件は同値である。

(1)　$R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(2)　$(\overline{R}\times R')\wedge(R\times\overline{R'}) = O$　[5]

(3)　$(R'\times\overline{R})\wedge(\overline{R'}\times R) = O$　[5]

(4)　$\nabla(\overline{R}\times R') = O$

(5)　$\nabla(R\times\overline{R'}) = O$

(6)　$\nabla(R'\times\overline{R}) = O$

(7)　$\nabla(\overline{R'}\times R) = O$

（証明）(1) ⇔ (2)　性質25(1)(5)によって

$$R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Leftrightarrow \overline{R}\times R'\leqq\overline{R}\Diamond R' \Leftrightarrow (\overline{R}\times R')\wedge(\overline{\overline{R}\Diamond R'}) = O$$

$$\Leftrightarrow (\overline{R}\times R')\wedge(R\times\overline{R'}) = O$$

(1) ⇔ (3)　性質25(1)(6)によって

$$R\times\overline{R'}\times R\leqq R \Leftrightarrow R'\times\overline{R}\leqq R'\Diamond\overline{R} \Leftrightarrow (R'\times\overline{R})\wedge(\overline{R'\Diamond\overline{R}}) = O$$

$$\Leftrightarrow (R'\times\overline{R})\wedge(\overline{R'}\times R) = O$$

(2) ⇔ (4) ⇔ (5)　　$(\overline{R}\times R')' = R\times\overline{R'}$であるから

$$(\overline{R}\times R')\wedge(R\times\overline{R'}) = O \Leftrightarrow (\overline{R}\times R')\wedge(\overline{R}\times R')' = O \Leftrightarrow \nabla(\overline{R}\times R') = O$$

$\Leftrightarrow \nabla((\overline{R}\times R')') = O$　（性質26）$\Leftrightarrow \nabla(R\times\overline{R'}) = O$

(3) ⇔ (6) ⇔ (7)　　$(R'\times\overline{R})' = \overline{R'}\times R$であるから

$$(R'\times\overline{R})\wedge(\overline{R'}\times R) = O \Leftrightarrow (R'\times\overline{R})\wedge(R'\times\overline{R})' = O \Leftrightarrow \nabla(R'\times\overline{R}) = O$$

$\Leftrightarrow \nabla((R'\times\overline{R})') = O$　（性質26）$\Leftrightarrow \nabla(\overline{R'}\times R) = O$　　（証明終）

一般に $\nabla S = O$ なる行列 S は非対称的関係を表すので，上記の性質27の

(4) − (7) は $\overline{R}\times R'$,　$R\times\overline{R'}$, $R'\times\overline{R}$, $\overline{R'}\times R$ が非対称的関係を表現することを示している。そして，そのようなとき，かつ，その時に限り R は Ferrers 関係を表現することになる。

次の性質はよく知られている。

[性質28] $\triangledown R = O \;\Leftrightarrow\; R^2 \wedge I = O \;\Leftrightarrow\; R^2 \leqq \overline{I}$

[性質29] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\times R \leqq R$

(2) $(\overline{R}\times R')^2 \wedge I = O$

(3) $(R\times\overline{R'})^2 \wedge I = O$

(4) $(R'\times\overline{R})^2 \wedge I = O$

(5) $(\overline{R'}\times R)^2 \wedge I = O$

(証明) 性質27(1)(4) − (7)と性質28による。　(証明終)

[性質30] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\times R \leqq R$

(2) $(\overline{R}\times R')^2 \leqq \overline{I}$

(3) $(R\times\overline{R'})^2 \leqq \overline{I}$

(4) $(R'\times\overline{R})^2 \leqq \overline{I}$

(5) $(\overline{R'}\times R)^2 \leqq \overline{I}$

(証明) 性質29および性質28による。　(証明終)

次の性質は明らかである。

[性質31] $\triangledown R = O \;\Leftrightarrow\; \overline{R} \vee (\overline{R})' = E$

[性質32] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\times R \leqq R$

(2) $(R\Diamond\overline{R'}) \vee (R\Diamond\overline{R'})' = E$

(3) $(\overline{R}\Diamond R') \vee (\overline{R}\Diamond R')' = E$

(4) $(\overline{R'}\Diamond R) \vee (\overline{R'}\Diamond R)' = E$

(5) $(R'\Diamond\overline{R}) \vee (R'\Diamond\overline{R})' = E$

(証明) 一般に 性質31が成立するから，性質27(1)(4) − (7)による。

(証明終)

すでに示している性質27は次のように一般化できる。

[性質33] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{S'}\times R \leqq S$

(2) $(\overline{S}\times R') \wedge (R\times\overline{S'}) = O$

(5) $\triangledown(R\times\overline{S'}) = O$

(6) $\triangledown(R'\times\overline{S}) = O$

(3)　$(R'\times\bar{S})\wedge(\bar{S}'\times R)=O$　　(7)　$\triangledown(\bar{S}'\times R)=O$

(4)　$\triangledown(\bar{S}\times R')=O$

（証明）(1) ⇔ (2)　$R\times\bar{S}'\times R\leqq S \Leftrightarrow R'\times\bar{S}\times R'\leqq S' \Leftrightarrow \bar{S}\times R'\leqq\bar{R}\Diamond S'$

$\Leftrightarrow(\bar{S}\times R')\wedge(\overline{\bar{R}\Diamond S'})=O \Leftrightarrow(\bar{S}\times R')\wedge(R\times\bar{S}')=O$

(1)⇔(3)　$R\times\bar{S}'\times R\leqq S \Leftrightarrow \bar{S}'\times R\leqq\bar{R}'\Diamond S \Leftrightarrow (\bar{S}'\times R)\wedge(\overline{\bar{R}'\Diamond S})=O$

$\Leftrightarrow(\bar{S}'\times R)\wedge(R'\times\bar{S})=O \Leftrightarrow (R'\times\bar{S})\wedge(\bar{S}'\times R)=O$

(2)⇔(4)　$(\bar{S}\times R')\wedge(R\times\bar{S}')=O \Leftrightarrow (\bar{S}\times R')\wedge(\bar{S}\times R')'=O \Leftrightarrow \triangledown(\bar{S}\times R')=O$

(4)⇔(5)　$\triangledown(\bar{S}\times R')=O \Leftrightarrow \triangledown((\bar{S}\times R')')=O$　（性質26）$\Leftrightarrow \triangledown(R\times\bar{S}')=O$

(3)⇔(6)　$(R'\times\bar{S})\wedge(\bar{S}'\times R)=O \Leftrightarrow (R'\times\bar{S})\wedge(R'\times\bar{S})'=O \Leftrightarrow \triangledown(R'\times\bar{S})=O$

(6)⇔(7)　$\triangledown(R'\times\bar{S})=O \Leftrightarrow \triangledown((R'\times\bar{S})')=O$　（性質26）$\Leftrightarrow \triangledown(\bar{S}'\times R)=O$

（証明終）

［性質34］次の条件は同値である。

(1)　$R\times\bar{S}'\times R\leqq S$　　(4)　$(R'\times\bar{S})^2\wedge I=O$

(2)　$(\bar{S}\times R')^2\wedge I=O$　　(5)　$(\bar{S}'\times R)^2\wedge I=O$

(3)　$(R\times\bar{S}')^2\wedge I=O$

（証明）性質33(1)(4)－(7)および性質28による。　（証明終）

［性質35］次の条件は同値である。

(1)　$R\times\bar{S}'\times R\leqq S$　　(4)　$(R'\times\bar{S})^2\leqq\bar{I}$

(2)　$(\bar{S}\times R')^2\leqq\bar{I}$　　(5)　$(\bar{S}'\times R)^2\leqq\bar{I}$

(3)　$(R\times\bar{S}')^2\leqq\bar{I}$

（証明）性質34および性質28による。　（証明終）

［性質36］次の条件は同値である。

(1)　$R\times\bar{S}'\times R\leqq S$　　(4)　$(\bar{R}'\Diamond S)\vee(\bar{R}'\Diamond S)'=E$

(2)　$(S\Diamond\bar{R}')\vee(S\Diamond\bar{R}')'=E$　　(5)　$(S'\Diamond\bar{R})\vee(S'\Diamond\bar{R})'=E$

(3)　$(\bar{R}\Diamond S')\vee(\bar{R}\Diamond S')'=E$

（証明）性質33(1)(4)－(7)と性質31による。　（証明終）

次の性質はよく知られている。

［性質37］$R^2\leqq R,\ R\wedge I=O \Rightarrow \triangledown R=O$

[性質38] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$　　(3) $(\overline{R}\times R')^2\leqq\overline{R}\times R'$

(2) $(R\times\overline{R'})^2\leqq R\times\overline{R'}$

(証明) (1) ⇒ (2)　$R\times\overline{R'}\times R\leqq R \;\Rightarrow\; (R\times\overline{R'}\times R)\times\overline{R'}\leqq R\times\overline{R'}$

$\Leftrightarrow\; (R\times\overline{R'})^2 \leqq R\times\overline{R'}$

(2) ⇒ (1) 性質14(3)から$(R\times\overline{R'})\wedge I=O$であるから性質37によって$\bigtriangledown(R\times\overline{R'})=O$となり，性質27(5)(1)によって$R\times\overline{R'}\times R\leqq R$となる。

(2) ⇔ (3) $(R\times\overline{R'})^2\leqq R\times\overline{R'} \Leftrightarrow ((R\times\overline{R'})^2)'\leqq(R\times\overline{R'})'$

$\Leftrightarrow (\overline{R}\times R')^2\leqq\overline{R}\times R'$　(証明終)

[性質39] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$　　(3) $(R'\times\overline{R})^2\leqq R'\times\overline{R}$

(2) $(\overline{R'}\times R)^2\leqq\overline{R'}\times R$

(証明) (1) ⇒ (2) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$から$\overline{R'}\times(R\times\overline{R'}\times R)\leqq\overline{R'}\times R$となり，$(\overline{R'}\times R)^2\leqq\overline{R'}\times R$となる。

(2) ⇒ (1) 性質15(3)よって$(\overline{R'}\times R)\wedge I=O$であるから性質37によって$\bigtriangledown(\overline{R'}\times R)=O$となり，性質27(7)(1)によって$R\times\overline{R'}\times R\leqq R$となる。

(2) ⇔ (3) $(\overline{R'}\times R)^2\leqq\overline{R'}\times R \Leftrightarrow ((\overline{R'}\times R)^2)'\leqq(\overline{R'}\times R)'$

$\Leftrightarrow (R'\times\overline{R})^2\leqq R'\times\overline{R}$　(証明終)

[性質40] [18] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R'}\times R\leqq R$

(2) $(R\times\overline{R'})^2\leqq R\times\overline{R'}$, $\bigtriangledown(R\times\overline{R'})=O$

(3) $(\overline{R'}\times R)^2\leqq\overline{R'}\times R$, $\bigtriangledown(\overline{R'}\times R)=O$

(4) $(\overline{R}\Diamond R')^2\leqq\overline{R}\Diamond R'$, $(\overline{R}\Diamond R')\vee(\overline{R}\Diamond R')'=E$

(5) $(R'\Diamond\overline{R})^2\leqq R'\Diamond\overline{R}$, $(R'\Diamond\overline{R})\vee(R'\Diamond\overline{R})'=E$

(証明) (1) ⇔ (2) 性質38(1)(2)，性質27(1)(5)による。

(1) ⇔ (3) 性質39(1)(2)，性質27(1)(7)による。

(1) ⇔ (4) 性質18(4)によって $(\overline{R}\Diamond R')^2\leqq\overline{R}\Diamond R'$は一般に成立する。また性質32(1)(3)によって$R\times\overline{R'}\times R\leqq R \;\Leftrightarrow\; (\overline{R}\Diamond R')\vee(\overline{R}\Diamond R')'=E$となる。

(1) ⇔ (5) 上の(1) ⇔ (4)の場合と同様である。 (証明終)

[性質41] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$

(2) $(R'\times\overline{R})^2\leqq R'\times\overline{R}$, $\triangledown(R'\times\overline{R})=O$

(3) $(\overline{R}\times R')^2\leqq\overline{R}\times R'$, $\triangledown(\overline{R}\times R')=O$ 　[20]

(4) $(\overline{R}'\diamond R)^2\leqq\overline{R}'\diamond R$, $(\overline{R}'\diamond R)\vee(\overline{R}'\diamond R)'=E$

(5) $(R\diamond\overline{R}')^2\leqq R\diamond\overline{R}'$, $(R\diamond\overline{R}')\vee(R\diamond\overline{R}')'=E$

(証明) (1) ⇔ (2) 性質40(1)(2)において R を R' とおけば

$$R'\times\overline{R}\times R'\leqq R' \quad\Leftrightarrow\quad (R'\times\overline{R})^2\leqq R'\times\overline{R},\ \triangledown(R'\times\overline{R})=O$$

性質25(1)(2)によって，$R\times\overline{R}'\times R\leqq R \Leftrightarrow R'\times\overline{R}\times R'\leqq R'$ であるから

$$R\times\overline{R}'\times R\leqq R \quad\Leftrightarrow\quad (R'\times\overline{R})^2\leqq R'\times\overline{R},\ \triangledown(R'\times\overline{R})=O$$

(1) ⇔ (3) 性質40(1)(3)を用いて上の(1) ⇔ (2)と同様にすればよい。

(1) ⇔ (4) 性質40(1)(4)を用いて同様にすればよい。

(1) ⇔ (5) 性質40(1)(5)を用いて同様にすればよい 。 (証明終)

[性質42] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$

(2) $\overline{R}\leqq\overline{R}\diamond R'\diamond\overline{R}$

(3) $\overline{R}'\leqq\overline{R}'\diamond R\diamond\overline{R}'$

(4) $R\leqq R\diamond\overline{R}'\diamond R$

(5) $R'\leqq R'\diamond\overline{R}\diamond R'$

(証明) $R\times\overline{R}'\times R\leqq R \quad\Leftrightarrow\quad \overline{R}\diamond R'\diamond\overline{R}\geqq\overline{R}$

であるから性質25(1)－(4)による。 (証明終)

[性質43] [18] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$ 　　(2) $(\overline{R}'\times R)\times\overline{(\overline{R}'\times R)}'\times(\overline{R}'\times R)\leqq\overline{R}'\times R$

(証明) (1)⇒(2) $(\overline{R}'\times R)\times\overline{(\overline{R}'\times R)}'\times(\overline{R}'\times R)=(\overline{R}'\times R)\times(\overline{R}'\diamond R)\times(\overline{R}'\times R)$

$$\begin{aligned}
&=\overline{R}'\times(R\times(\overline{R}'\diamond R))\times\overline{R}'\times R\\
&=\overline{R}'\times R\times\overline{R}'\times R \qquad (\text{性質}24(2))\\
&=\overline{R}'\times(R\times\overline{R}'\times R)\\
&\leqq\overline{R}'\times R
\end{aligned}$$

(2)⇒(1) 性質16(1)によって $\overline{(\overline{R}'\times R)}'=\overline{R}'\diamond R\geqq I$ であるから

$$(\overline{R}'\times R)^2\leqq(\overline{R}'\times R)\times\overline{(\overline{R}'\times R)}'\times(\overline{R}'\times R)\leqq\overline{R}'\times R$$

性質15(3)から $(\overline{R}'\times R)\wedge I=O$ だから性質37によって $\nabla(\overline{R}'\times R)=O$ となる。したがって性質27(7)(1)から $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$ となる。　(証明終)

[性質44] [18]

$$R\times\overline{R}'\times R\leqq R\ \Leftrightarrow\ (R\times\overline{R}')\times\overline{(R\times\overline{R}')}'\times(R\times\overline{R}')\leqq R\times\overline{R}'$$

(証明) 性質43において R を R' とおけば

$$R'\times\overline{R}\times R'\leqq R'\ \Leftrightarrow\ (\overline{R}\times R')\times\overline{(\overline{R}\times R')}'\times(\overline{R}\times R')\leqq\overline{R}\times R'$$

転置して

$$R\times\overline{R}'\times R\leqq R\ \Leftrightarrow\ (R\times\overline{R}')\times\overline{(R\times\overline{R}')}'\times(R\times\overline{R}')\leqq R\times\overline{R}'$$

(証明終)

[性質45] [20] 次の条件は同値である。

(1) $R\times\overline{R}'\times R\leqq R$

(2) $(R'\times\overline{R})\times\overline{(R'\times\overline{R})}'\times(R'\times\overline{R})\leqq R'\times\overline{R}$

(3) $(\overline{R}\times R')\times\overline{(\overline{R}\times R')}'\times(\overline{R}\times R')\leqq\overline{R}\times R'$

(証明) (1) ⇔ (2) 性質44において R を R' とおけば

$$R'\times\overline{R}\times R'\leqq R'\ \Leftrightarrow\ (R'\times\overline{R})\times\overline{(R'\times\overline{R})}'\times(R'\times\overline{R})\leqq R'\times\overline{R}$$

ところで 性質25(1)(2)によって $R\times\overline{R}'\times R\leqq R\ \Leftrightarrow\ R'\times\overline{R}\times R'\leqq R'$ であるから

$$R\times\overline{R}'\times R\leqq R\ \Leftrightarrow\ (R'\times\overline{R})\times\overline{(R'\times\overline{R})}'\times(R'\times\overline{R})\leqq R'\times\overline{R}$$

(1) ⇔ (3) 性質43から上の(1) ⇔ (2)と同様にして示される。　(証明終)

[性質46] $S\times R\leqq R$のとき

(1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}\Rightarrow R^2\leqq R\diamond R$

(2) $\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'\Rightarrow R\times S\leqq R$

(3) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}\Rightarrow R\times\overline{R}'\times R\leqq R$

(証明) 性質6(1)(6)により，$S\times R\leqq R\ \Leftrightarrow\ (R\times\overline{R}')\wedge S'\leqq I$となる。また，性質11(1)(13)によって，$R^2\leqq R\diamond R\ \Leftrightarrow\ R^2\times\overline{R}'\leqq R$であり，性質19(3)(1)によって

$$\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'\ \Leftrightarrow\ \overline{R}\times(\overline{R}\diamond R')\leqq\overline{R}$$

であるから，性質3(1)(2)(3)による。　(証明終)

上記の性質46は次のようにして直接示すこともできる。

まず，(1)については $S\times R\leqq R$ から $R\leqq\overline{S}'\diamond R$となり，$\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$ から $\overline{S}\leqq R'$

$\Diamond\overline{R}$となる。したがって，転置して$\overline{S}'\leqq\overline{R}'\Diamond R$であるから$R\leqq\overline{S}'\Diamond R\leqq\overline{R}'\Diamond R\Diamond R$となり，$R\leqq\overline{R}'\Diamond R\Diamond R$すなわち$R^2\leqq R\Diamond R$が得られる。

同様に(2)については，$S\times R\leqq R$から$S\leqq R\Diamond\overline{R}'$となり，$\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$から$R'\Diamond\overline{R}\geqq\overline{R}\Diamond R'$となる。したがって，転置して$R\Diamond\overline{R}'\leqq\overline{R}'\Diamond R$となるので，$S\leqq R\Diamond\overline{R}'\leqq\overline{R}'\Diamond R$となり$R\times S\leqq R$が得られる。

(3)については，$S\times R\leqq R$から$R\times\overline{R}'\leqq\overline{S}'$となり，$\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$から転置して$\overline{R}'\times\overline{S}'\leqq\overline{R}'$となるので，これから$\overline{S}'\times R\leqq R$となり，$R\times\overline{R}'\times R\leqq R$が得られる。

［注意3］上記の性質46(2)において，$\overline{R}'\times R\leqq R\times\overline{R}'$を$R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$で置き換えて得られる命題は一般には成立しない。すなわち，一般には，「$S\times R\leqq R,\ R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R\Rightarrow R\times S\leqq R$」とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$S\times R\leqq R,\ R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R$であるが，$R\times S\leqq R$とはならない。

［性質47］$R\times S\leqq R$のとき

(1) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}\Rightarrow R^2\leqq R\Diamond R$

(2) $R\times\overline{R}'\leqq\overline{R}'\times R\Rightarrow S\times R\leqq R$

(3) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}\Rightarrow R\times\overline{R}'\times R\leqq R$

（証明）性質46においてRをR'，SをS'とおいて転置すればよい。（証明終）

［性質48］$R^2\leqq R$のとき

(1) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\Rightarrow R^2\leqq R\Diamond R$

(2) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\Rightarrow R\times\overline{R}'\times R\leqq R$

（証明）性質46または性質47において$S=R$とおけばよい。（証明終）

上記の性質48における$R^2\leqq R$，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$を，性質8や性質9で示すような同値な条件で置き換えることができる。また，$R^2\leqq R$，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$を以下の性質68や性質63に示すような$R^2\leqq R$，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$となる条件で置き換えれば，性質64，性質65，性質69，性質70などのような性質を得ることができる。

なお，上記の性質48においてRを$\overline{R}$とおけば

$$(\overline{R})^2\leqq\overline{R},\ R^2\leqq R\Rightarrow(\overline{R})^2\leqq\overline{R}\Diamond\overline{R},\ \overline{R}\times R'\times\overline{R}\leqq\overline{R}$$

となるが，すでに 性質11(4)(1)，性質25(3)(1)で示しているように

$$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R} \Leftrightarrow R^2 \leqq R \Diamond R\ ;\ \overline{R} \times R' \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times \overline{R'} \times R \leqq R$$

であるので，性質48で R を $\overline{R}$ とおいて得られた上の命題は結局その性質48と同一の性質となる。

［注意４］一般には，「$R^2 \leqq R$，$R^2 \leqq R \Diamond R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$」とはいえない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R^2 \leqq R$ かつ $R^2 \leqq R \Diamond R$ であるが，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ とはならない。

［注意５］一般には，「$R^2 \leqq R$，$R \times \overline{R'} \times R \leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R^2 \leqq R$ かつ $R \times \overline{R'} \times R \leqq R$ であるが，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ とはならない。

［性質49］(1) $R^2 \leqq R,\quad R \times \overline{R'} \leqq R^2 \quad \Rightarrow \quad (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2) $R^2 \leqq R,\quad \overline{R'} \times R \leqq R^2 \quad \Rightarrow \quad (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

（証明）(1) $R \times \overline{R'} \leqq R^2 \leqq R$ だから $R \times \overline{R'} \leqq R$ となり，性質10(3)(1a)によって $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ となる。

(2) 上の(1)と同様である。　（証明終）

［性質50］$R^2 \leqq R \Diamond R,\ (\overline{R})^2 \geqq \overline{R} \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）$(\overline{R})^2 \geqq \overline{R}$ から $R \Diamond R \leqq R$ となるので，$R^2 \leqq R \Diamond R \leqq R$ となる。（証明終）

［注意６］一般には，「$R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\ (\overline{R})^2 \geqq \overline{R} \Rightarrow R^2 \leqq R$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,1\,1 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R \times \overline{R'} \times R \leqq R$，$(\overline{R})^2 \geqq \overline{R}$ であるが，$R^2 \leqq R$とはならない。

［性質51］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R,\ R \leqq R \times \overline{R'} \quad \Rightarrow \quad R^2 \leqq R$

(2) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $R \leqq \overline{R}' \times R \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）(1) $R^2 \leqq R \Diamond R \Leftrightarrow R^2 \times \overline{R}' \leqq R$ であるから

$$R^2 = R \times R \leqq R \times (R \times \overline{R}') \leqq R$$

(2) $R^2 \leqq R \Diamond R \Leftrightarrow \overline{R}' \times R^2 \leqq R$ であるから

$$R^2 = R \times R \leqq (\overline{R}' \times R) \times R \leqq R$$

（証明終）

［性質52］(1) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $R \leqq R \times \overline{R}' \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $R \leqq \overline{R}' \times R \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）(1) $R^2 = R \times R \leqq (R \times \overline{R}') \times R \leqq R$

(2) $R^2 = R \times R \leqq R \times (\overline{R}' \times R) \leqq R$　（証明終）

［性質53］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $I \leqq \overline{R}' \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $I \leqq \overline{R}' \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）$I \leqq \overline{R}'$のとき $R \leqq R \times \overline{R}'$ となるから性質51(1)，性質52(1)による。

（証明終）

［性質54］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $I \leqq \overline{R} \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $I \leqq \overline{R} \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）$I \leqq \overline{R} \Leftrightarrow I \leqq \overline{R}'$ であるから性質53による。　（証明終）

［性質55］［2,7］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $R \wedge I = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $R \wedge I = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

（証明）$R \wedge I = O \Leftrightarrow I \leqq \overline{R}$ であるから性質54による。　（証明終）

以下の性質56から性質62までは上の性質55によって明らかである。

［性質56］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $\nabla R = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $\nabla R = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

［性質57］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $R^m \wedge I = O$（mは自然数）$\Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $R^m \wedge I = O$（mは自然数）$\Rightarrow R^2 \leqq R$

［性質58］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $R^2 \wedge I = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $R^2 \wedge I = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

［性質59］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $R^3 \wedge I = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $R^3 \wedge I = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

［性質60］(1) $R^2 \leqq R \Diamond R$, $R^n = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$, $R^n = O \Rightarrow R^2 \leqq R$

［注意７］一般には,「$R^2 \leqq R$, $R^n = O \Rightarrow R^2 \leqq R \Diamond R$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

とおけば, $R^2 \leqq R$, $R^n = O$ であるが, $R^2 \leqq R \Diamond R$ とはならない。

［注意８］一般には,「$R^2 \leqq R$, $R^n = O \Rightarrow R \times \overline{R}' \times R \leqq R$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{bmatrix}$$

とおけば $R^2 \leqq R$, $R^n = O$ であるが, $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$ とはならない。

［性質61］(1) $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq (R \wedge \overline{I}) \Diamond (R \wedge \overline{I}) \Rightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$

(2) $(R \wedge \overline{I}) \times \overline{(R \wedge \overline{I})}' \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I} \Rightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$

［性質62］(1) $(\triangle R)^2 \leqq (\triangle R) \Diamond (\triangle R) \Rightarrow (\triangle R)^2 \leqq \triangle R$

(2) $(\triangle R) \times \overline{(\triangle R)}' \times (\triangle R) \leqq \triangle R \Rightarrow (\triangle R)^2 \leqq \triangle R$

［性質63］[8, 23] $R^2 \leqq R$, $R \vee R' \vee I = E \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

［性質64］[11] $R^2 \leqq R$, $R \vee R' \vee I = E \Rightarrow R^2 \leqq R \Diamond R$

(証明) 性質63によって,「$R^2 \leqq R$, $R \vee R' \vee I = E \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$」となるので, 性質48(1)によって $R^2 \leqq R \Diamond R$ となる。　(証明終)

［注意９］一般には,「$R^2 \leqq R \Diamond R$, $R \vee R' \vee I = E \Rightarrow R^2 \leqq R$」とはならない。たとえば

$$R = \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,1\,1 \end{bmatrix}$$

とおけば, $R^2 \leqq R \Diamond R$, $R \vee R' \vee I = E$ となるが, $R^2 \leqq R$ とはならない。

なお，性質66で示すように次の命題は成立する。

$$R^2 \leqq R \Diamond R,\quad R \wedge R' \leqq I \quad \Rightarrow \quad R^2 \leqq R$$

[性質65] $R^2 \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E \Rightarrow R \times \overline{R}' \times R \leqq R$

(証明) 性質63によって，「$R^2 \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E \quad \Rightarrow \quad (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$」となるので，性質48(2)によって $R \times \overline{R}' \times R \leqq R$となる。(証明終)

[注意10] 一般には，「$R \times \overline{R}' \times R \leqq R,\quad R \vee R' \vee I = E \Rightarrow R^2 \leqq R$」とはならない。いま注意9の R を用いれば $R \times \overline{R}' \times R \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E$ となるが，$R^2 \leqq R$ とはならない。

[性質66] [11]　$R^2 \leqq R \Diamond R,\quad R \wedge R' \leqq I \quad \Rightarrow \quad R^2 \leqq R$

[注意11] 一般には，「$R \times \overline{R}' \times R \leqq R,\quad R \wedge R' \leqq I \quad \Rightarrow \quad R^2 \leqq R$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R \times \overline{R}' \times R \leqq R,\quad R \wedge R' \leqq I$ であるが，$R^2 \leqq R$ とはならない。

[性質67] $R^2 \leqq R \Diamond R,\quad R \vee R' \vee I = E \quad \Rightarrow \quad (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質11(1)(4)によって，$R^2 \leqq R \Diamond R \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Diamond \overline{R}$であり，また

$$R \vee R' \vee I = E \quad \Leftrightarrow \quad \overline{R} \wedge \overline{R}' \leqq I$$

であるから，性質66において R を $\overline{R}$ とおけばよい。(証明終)

[注意12] 一般には，「$R \times \overline{R}' \times R \leqq R,\quad R \vee R' \vee I = E \quad \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$」とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R \times \overline{R}' \times R \leqq R,\quad R \vee R' \vee I = E$ であるが，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$ とはならない。

[性質68] [12]　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R},\quad R \wedge R' \leqq I \Rightarrow R^2 \leqq R$

[性質69]　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R},\quad R \wedge R' \leqq I \Rightarrow R^2 \leqq R \Diamond R$

(証明) 性質68によって，「$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R},\quad R \wedge R' \leqq I \Rightarrow R^2 \leqq R$」となるので，性

質48(1)によって$R^2 \leqq R \diamondsuit R$となる。　(証明終)

上記の性質69においてRを$\overline{R}$とおけば，「$R^2 \leqq R,\ \overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq I \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \diamondsuit \overline{R}$」となるが，$\overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq I \Leftrightarrow R \vee R' \vee I = E$であり，また性質11(4)(1)によって$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \diamondsuit \overline{R} \Leftrightarrow R^2 \leqq R \diamondsuit R$であるから，「$R^2 \leqq R,\ R \vee R' \vee I = E \Rightarrow R^2 \leqq R \diamondsuit R$」となる。これはすでに示している性質64である。

[注意13]　一般には，「$R^2 \leqq R \diamondsuit R,\quad R \wedge R' \leqq I \quad \Rightarrow \quad (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$」とはならない。

いま

$$R = \begin{bmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R^2 = O \leqq R \diamondsuit R$，$R \wedge R' = O \leqq I$であるが，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$とはならない。

なお，すでに性質66で示しているように次の性質は成立する。

$$R^2 \leqq R \diamondsuit R, \quad R \wedge R' \leqq I \quad \Rightarrow \quad R^2 \leqq R$$

[性質70]　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R},\quad R \wedge R' \leqq I \quad \Rightarrow \quad R \times \overline{R'} \times R \leqq R$

(証明)　性質68によって，「$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R},\quad R \wedge R' \leqq I \quad \Rightarrow \quad R^2 \leqq R$」となるので，性質48(2)によって$R \times \overline{R'} \times R \leqq R$となる。　(証明終)

上記の性質70についても，性質69のときと同様に，Rを$\overline{R}$とおけば

$$R^2 \leqq R, \quad \overline{R} \wedge \overline{R'} \leqq I \quad \Rightarrow \quad \overline{R} \times R' \times \overline{R} \leqq \overline{R}$$

となり，性質25(3)(1)によって$\overline{R} \times R' \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times \overline{R'} \times R \leqq R$であるから

$$R^2 \leqq R, \quad R \vee R' \vee I = E \Rightarrow R \times \overline{R'} \times R \leqq R$$

が得られるが，これはすでに示している性質65である。

[注意14]　一般には，「$R \times \overline{R'} \times R \leqq R,\quad R \wedge R' \leqq I \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$」とはならない。いま注意13の$R$を用いれば$R \times \overline{R'} \times R \leqq R$，$R \wedge R' \leqq I$であるが，$(\overline{R})^2 = E$であって，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$とはならない。

4．まとめ

推移性および negative transitivity のもとでの semitransitive 関係および Ferrers 関係の初等的な性質を得た。また semitransitive 関係および Ferrers 関係の同値条件について考察をおこない，自明なもの，よく知られていると思われるものも含めて整理した。これらはほとんど明らかであるが，semitransitive 関係や Ferrers 関係は 様々な応用においてその形をかえて出現することがあり，同値な定義の条件を整理しておくことは有意義なことであると考えられる。

本論文で議論した semitransitive 関係や Ferrers 関係 については，negatively transitive 関係の性質の一般化との関連でさらに考察を進めることによりいくつかの興味深い性質が得られそうである。これについて調べることは今後の課題の１つである。

文　献

[1] Chipman, J. S.: "The foundations of utility," Econometrica, Vol. 28, 2, pp.193-224 (1960).

[2] Doignon, J.-P., Ducamp, A., and Falmagne, J.-C.: "On realizable biorders and the biorder dimension of a relation," Journal of Mathematical Psychology, 28, pp.73-109 (1984).

[3] Doignon, J.-P. and Falmagne, J.-C.: "Matching relations and the dimensional structure of social choices," Mathematical Social Sciences 7, pp.211-229 (1984).

[4] Doignon, J.-P., Monjardet, B., Roubens, M., and Vincke, Ph.: "Biorder families, valued relations, and preference modelling," Journal of Mathematical Psychology, 30, pp.435-480 (1986).

[5] Ducamp, A. and Falmagne, J.-C.: "Composite Measurement," Journal of Mathematical Psychology, 6, pp.359-390 (1969).

[6] Fishburn, P.C. "Intransitive indifference in preference theory: A survey," Operations Research, 18, pp.207-228 (1970).

[7] Fodor, J. and Roubens, M.: "Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision

Support," Kluwer Academic Pub., Dordrecht (1994).

[8]橋本　寛: "連結的推移関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第34巻, 第3・4号, pp.387-405 (昭和60年6月).

[9]橋本　寛: "非反射的推移関係に関する同値条件", 山口経済学雑誌, 第48巻, 第2号, pp.257-285 (平成12年3月).

[10]橋本　寛: "非対称性のもとでの推移関係", 山口経済学雑誌, 第49巻, 第2号, pp.81-110 (平成13年3月).

[11]Hashimoto, H.: "Equivalent definitions of Luce's semiorders," 山口経済学雑誌, 第52巻, 第2号, pp.123-137(平成16年1月).

[12]橋本　寛: "Negatively Transitive 関係に関する性質の一般化", 山口経済学雑誌, 第52巻, 第4号, pp.595-620 (平成16年3月).

[13]Jamison, D.T., and Lau, L. J.: "Semiorders and the theory of choice," Econometrica, Vol. 41, No.5, pp.901-912 (1973).

[14]柏木芳美: "関係代数的証明", 山口経済学雑誌, 第46巻, 第3号, pp.259-269(平成10年5月).

[15]Kim, K.H. and Roush, F. W.: "Enumeration of isomorphism classes of semiorders," Journal of Combinatorics, Information & System Sciences, Vol. 3, No.2, pp.58-61(1978).

[16]Luce, R.D.: "A note on Boolean matrix theory," Proc. Amer. Math. Soc. 3, pp.382-388 (1952).

[17]Peirce, C.S.: "The logic of quantity," in: C. Hartshorne, P. Weiss, eds., Collected Papers of Charles Sanders Peirce (The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1961).

[18]Riguet, J.: "Les relations de Ferrers," C. R. Acad. Sci. Paris 232, pp.1729-1730 (1951).

[19]Roubens, M. and Vincke, Ph. : "Preference Modelling," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[20]Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).

[21]Schröder, E.: "Algebra der Logik. Vol.3, "Teubner, Leipzig (1895)(Chelsea Publishing, New York, 1966).

[22]Scott, D. and Suppes, P.: "Foundational aspects of theories of measurement," The Journal

of Symbolic Logic, 23, pp.113-128 (1958).

[23] Tarski, A.: "Introduction to Logic," Oxford University Press, New York (1965).