非対称性のもとで推移性と同値な関係条件の階層性

Hierarchy of Relational Conditions Equivalent to Transitivity under Asymmetry

橋　本　　　寛
HASHIMOTO, Hiroshi

Abstract

A set of relational conditions which become equivalent to transitivity under asymmetry is considered and its hierarchy is clarified. First the set of conditions is partitioned into equivalent groups without an assumption of asymmetry, and the hierarchy of the equivalent groups is examined by using implication between conditions. Then under each of irreflexivity, asymmetry, and nilpotency equivalent conditions are obtained.

1．はじめに

よく知られているように，推移関係は選好などの関係構造を取り扱う多くの応用において重要な二項関係であるが［1，2，3，9，10］，非対称性のもとで推移性と同値な関係条件がいくつか知られている［7］。本論文では，非対称性のもとで推移性と同値となることがほとんど自明である条件の集合に関して，これらの条件を非対称性を仮定せずにいくつかの同値なグループに分割し，さらにグループ間の導出関係を，グループを代表する条件間で調べることにより条件集合の階層構造を明らかにしている。また，非反射性，非対称性，べき零性を仮定した場合の同値な条件のグループについても簡単に考察を行っている。

2．定義

本論文で使用する演算や記法に関して，以下のように定義する。0，1の値をとるx, yに対して

$$x \vee y = \max(x, y),$$
$$x \wedge y = \min(x, y),$$
$$\bar{x} = 1 - x$$

と定める。次に，0，1の要素をもつn次ブール行列$R = [r_{ij}]$, $S = [s_{ij}]$に対して

$$R \vee S = [r_{ij} \vee s_{ij}],$$
$$R \wedge S = [r_{ij} \wedge s_{ij}],$$
$$R' = [r_{ji}],$$
$$\bar{R} = [\overline{r_{ij}}],$$
$$\Delta R = R \wedge \overline{R'},$$
$$\nabla R = R \wedge R',$$
$$R \times S = [(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})],$$
$$R^1 = R,$$
$$R^{k+1} = R^k \times R,\ k = 1, 2, \cdots,$$
$$R \leqq S \Leftrightarrow r_{ij} \leqq s_{ij},\ i, j = 1, 2, \cdots, n$$

と定める。なお、演算$\wedge$は$\vee$より優先されるものとする。たとえば，0，1の値をとるx, y, zに関して$x \wedge y \vee z$は（$x \wedge y$）$\vee$ zを意味し，また0，1の要素をもつn次ブール行列R, S, Tに関しても$R \wedge S \vee S \wedge T$は$(R \wedge S) \vee (S \wedge T)$を意味する。

特殊なブール行列として，単位行列を$I = [\delta_{ij}]$（δ_{ij}はクロネッカーのデルタ）で，すべての要素が0である零行列をOで示す。$R \wedge I = O$なるブール行列Rは非反射的関係を表現し，$\nabla R = O$なる行列Rは非対称的関係を表現し，$R^n = O$なるRはべき零であるといわれる。

3．結果

まず，ここでの考察の対象となる条件の集合を示す。これらの条件は，以下で示すように，非対称性のもとで推移性と同値となるものであるが，少数の基本的条件から一定の規則で機械的に構成されたものである。この条件集合の中には一般に同値となるもの，一定の仮定のもとで同値となるものなどが含まれている。まず，これらの条件に関して一般に成立する基本的性質を調べることにより，条件集合の階層性を明らかにする。また，非反射性すなわち $R \wedge I = O$ のとき同値となる条件のグループ，さらに非対称性すなわち $\nabla R = O$ のとき同値となるもの，とくにべき零性すなわち $R^n = O$ のとき同値となるものを示す。

［条件集合１］

(a1) $R^2 \leqq R$

(a2) $R^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(a3) $R^2 \leqq \Delta R$

(a4) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R$

(a5) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

(a6) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R$

(a7) $R \times \Delta R \leqq R$

(a8) $R \times \Delta R \leqq R \wedge \bar{I}$

(a9) $R \times \Delta R \leqq \Delta R$

(a10) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R$

(a11) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$

(a12) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \Delta R$

(a13) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R$

(a14) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(a15) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \Delta R$

(a16) $(R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq R$

(a17) $(R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq R \wedge \bar{I}$

(a18) $(R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R$

(a19) $\Delta R \times R \leqq R$

(a20) $\Delta R \times R \leqq R \wedge \bar{I}$

(a21) $\Delta R \times R \leqq \Delta R$

(a22) $\Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R$

(a23) $\Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

(a24) $\Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R$

(a25) $(\Delta R)^2 \leqq R$

(a26) $(\Delta R)^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(a27) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$

(b1) $R^2 \leqq R \vee I$

(b2) $R^2 \leqq \Delta R \vee I$

(b3) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \vee I$

(b4) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R \vee I$

(b5) $R \times \Delta R \leqq R \vee I$

(b6) $R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(b7) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \vee I$

(b8) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \Delta R \vee I$

(b9) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee I$

(b10) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \Delta R \vee I$

(b11) $(R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq R \vee I$

(b12) $(R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(b13) $\Delta R \times R \leqq R \vee I$

(b14) $\Delta R \times R \leqq \Delta R \vee I$

(b15) $\Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \vee I$

(b16) $\Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R \vee I$

(b17) $(\Delta R)^2 \leqq R \vee I$

(b18) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \vee I$

(c1) $R^2 \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c2) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c3) $R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c4) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c5) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c6) $(R \wedge \bar{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c7) $\Delta R \times R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c8) $\Delta R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c9) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

上記条件集合において，(a1) の $R^2 \leqq R$ なる R は推移関係を表現するブール行列であり，(a27) の $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$ なる R は quasi- transitive 関係を表現する行列である［9，10］。

3．1　条件集合の階層構造

条件集合1で与えられた各条件について，一般に同値であるものを求めて，条件集合を同値な条件のグループに分割し，さらにその同値なグループ間の導出関係を調べることにより，条件集合の階層構造を明らかにする。

［性質1］［7］次の条件は同値である。

(a2) $R^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(a3) $R^2 \leqq \Delta R$

上記の各条件は $R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$ と同値である［5］。すなわち非反射的推移関係を表現する行列となっている。

［性質2］(a2) $R^2 \leqq R \wedge \bar{I} \Rightarrow$ (a5) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

(証明) $R \wedge \bar{I} \leqq R$ であるから明らかである　(証明終)

［性質3］［7］次の条件は同値である。

(a5) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

(a6) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\Delta R$

(a11) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq R\wedge\overline{I}$

(a12) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\Delta R$

(a14) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$

(a15) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\Delta R$

［性質４］　次の条件は同値である。

(c1) $R^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(c2) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(c4) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(証明) (c1)⇒(c2) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(c1)⇒(c4) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq R^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(c2)⇒(c1) $r_{ik}\wedge r_{kj}=1$とおく。このとき$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee r_{ij}\wedge\delta_{ij}=1$となることを示す。$k\neq j$ならば明らかであるので$k=j$とする。このとき$r_{ij}\wedge r_{jj}=1$。$i=j$であれば明らかであるから$i\neq j$とする。もし$r_{ji}=1$ならば$r_{jj}\wedge r_{ji}\wedge\overline{\delta_{ji}}=1$から$r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}\vee r_{ji}\wedge\delta_{ji}=1$となるが，これは矛盾するので$r_{ji}=0$。したがって$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(c4)⇒(c1) $r_{ik}\wedge r_{kj}=1$とおく。このとき$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee r_{ij}\wedge\delta_{ij}=1$となることを示す。$i\neq k$ならば明らかであるので$i=k$とする。このとき$r_{ii}\wedge r_{ij}=1$。$i=j$であれば明らかであるから$i\neq j$とする。もし$r_{ji}=1$ならば$r_{ji}\wedge\overline{\delta_{ji}}\wedge r_{ii}=1$から$r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}\vee r_{ji}\wedge\delta_{ji}=1$となるが，これは矛盾するので$r_{ji}=0$。したがって$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。　(証明終)

［性質５］　次の条件は同値である。

(a5) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}$

(c1) $R^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(証明) (a5)⇒(c1) $r_{ik}\wedge r_{kj}=1$とおく。このとき$r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee r_{ij}\wedge\delta_{ij}=1$となることを示す。

(1) $k\neq j$のとき

$r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$となるから$r_{ij}=1$，$i\neq j$。もし$r_{ji}=1$ならば$r_{ij}\wedge r_{ji}\wedge$

$\overline{\delta_{ji}}=1$ から $r_{ii}\wedge\overline{\delta_{ii}}=1$ となるが，これは矛盾するので $r_{ji}=0$。したがって $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(2) $k=j$ のとき

$r_{ij}\wedge r_{jj}=1$ となる。$i=j$ のときは $r_{ij}\wedge\delta_{ij}=r_{ij}\wedge\delta_{ii}=1$ となる。また $i\neq j$ のときは，もし $r_{ji}=1$ ならば $r_{ij}\wedge r_{ji}\wedge\overline{\delta_{ji}}=1$ から $r_{ii}\wedge\overline{\delta_{ii}}=1$ となり，これは矛盾するので $r_{ji}=0$。したがって $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(c1)⇒(a5) $r_{ik}\wedge r_{kj}\wedge\overline{\delta_{kj}}=1$ とおく。このとき $r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$ となることを示す。$r_{ik}\wedge r_{kj}=1$ から $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee r_{ij}\wedge\delta_{ij}=1$ となり，$r_{ij}=1$。もし $r_{ji}=1$ であれば $r_{ji}\wedge r_{ik}=1$ から $r_{jk}\wedge\overline{r_{kj}}\vee r_{jk}\wedge\delta_{jk}=1$ となるが $r_{kj}=1$ だから $r_{jk}\wedge\delta_{jk}=1$ となり，$\delta_{jk}=1$，$j=k$ となる。しかし，これは矛盾する。したがって $r_{ji}=0$ となり，$r_{ij}=1$ だから $i\neq j$ となる。よって $r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$。　(証明終)

なお，次の性質も知られている。

[性質6] [4]　次の条件は同値である。

(a14) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$

(c1) $R^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

[性質7]　次の条件は同値である。

(a5) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}$

(a6) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\Delta R$

(a11) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq R\wedge\overline{I}$

(a12) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\Delta R$

(a14) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge\overline{I}$

(a15) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\Delta R$

(c1) $R^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(c2) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(c4) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(証明) 性質3，性質4，性質5による。　(証明終)

なお，上記の各条件は $R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I$ と同値である [4]。すなわち，R

は反対称的推移関係を表現する行列となっている。

［性質8］(a5) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}\Rightarrow$(c5) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I$

(証明) 性質7 (a5) (a15) によって，$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}$ のとき

$$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\Delta R\leqq\Delta R\vee R\wedge I$$

(証明終)

［性質9］(a5) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}\Rightarrow$(b2) $R^2\leqq\Delta R\vee I$

(証明) 性質7 (a5) (c1) によって，$R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R\wedge\overline{I}$ のとき

$$R^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I\leqq\Delta R\vee I$$

(証明終)

［性質10］ 次の条件は同値である。

(b2) $R^2\leqq\Delta R\vee I$

(b4) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq\Delta R\vee I$

(b8) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq\Delta R\vee I$

(証明) (b2)⇒(b4) $R\times(R\wedge\overline{I})\leqq R^2\leqq\Delta R\vee I$

(b2)⇒(b8) $(R\wedge\overline{I})\times R\leqq R^2\leqq\Delta R\vee I$

(b4)⇒(b2) $r_{ik}\wedge r_{kj}=1$ とおく。このとき $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}=1$ となることを示す。$k\neq j$ ならば明らかであるから $k=j$ とする。このとき $r_{ij}\wedge r_{jj}=1$。$i=j$ のときは明らかであるから $i\neq j$ とする。もし $r_{ji}=1$ であれば $r_{jj}\wedge r_{ji}\wedge\overline{\delta_{ji}}=1$ から $r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}\vee\delta_{ji}=1$ となり，$r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}=1$ となるが，これは矛盾するので $r_{ji}=0$。したがって $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。

(b8)⇒(b2) $r_{ik}\wedge r_{kj}=1$ とおく。このとき $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}\vee\delta_{ij}=1$ となることを示す。$i\neq k$ ならば明らかであるから $i=k$ とする。このとき $r_{ii}\wedge r_{ij}=1$。$i=j$ のときは明らかであるから $i\neq j$ とする。もし $r_{ji}=1$ とすれば $r_{ji}\wedge\overline{\delta_{ji}}\wedge r_{ii}=1$ から $r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}\vee\delta_{ji}=1$ となり，$r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}=1$ となるが，これは矛盾するので $r_{ji}=0$。したがって $r_{ij}\wedge\overline{r_{ji}}=1$。 (証明終)

［性質11］(c5) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\Delta R\vee R\wedge I\Rightarrow$(a1) $R^2\leqq R$

(証明) $r_{ik}\wedge r_{kj}=1$ とおく。このとき $r_{ij}=1$ となることを示す。

(1) $i=k$ のとき：$r_{ij}=r_{kj}=1$

(2) $k=j$ のとき：$r_{ij}=r_{ik}=1$

(3) $i\neq k,\ k\neq j$ のとき

$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee r_{ij} \wedge \delta_{ij} = 1$ となり，$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee r_{ij} \wedge \delta_{ij} \leqq r_{ij}$ であるから，$r_{ij} = 1$。（証明終）

［性質12］（c5）$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \Delta R \vee R \wedge I \Rightarrow$（b10）$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \Delta R \vee I$

（証明）$R \wedge I \leqq I$ であるから明らかである。（証明終）

［性質13］（b2）$R^2 \leqq \Delta R \vee I \Rightarrow$（b10）$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \Delta R \vee I$

（証明）$R \wedge \overline{I} \leqq R$ であるから明らかである。（証明終）

［性質14］［6］　次の条件は同値である。

（a1）$R^2 \leqq R$

（a4）$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$

（a10）$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R$

（a13）$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R$

［性質15］（a1）$R^2 \leqq R \Rightarrow$（b1）$R^2 \leqq R \vee I$

（証明）$R \leqq R \vee I$ であるから明らかである。（証明終）

［性質16］（b10）$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \Delta R \vee I \Rightarrow$（b1）$R^2 \leqq R \vee I$

（証明）　$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。このとき $r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。

（1）$i = k$ のとき：$r_{ij} = r_{kj} = 1$

（2）$k = j$ のとき：$r_{ij} = r_{ik} = 1$

（3）$i \neq k$，$k \neq j$ のとき

$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$ となり，したがって $r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$。（証明終）

［性質17］［8］　次の条件は同値である。

（b1）$R^2 \leqq R \vee I$

（b3）$R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \vee I$

（b7）$(R \wedge \overline{I}) \times R \leqq R \vee I$

（b9）$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \vee I$

［性質18］（b1）$R^2 \leqq R \vee I \Rightarrow$（a9）$R \times \Delta R \leqq \Delta R$

（証明）$r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$ とおく。このとき，$i \neq j$，$k \neq j$。また $r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ から $r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$。$i \neq j$ だから $r_{ij} = 1$。もし $r_{ji} = 1$ であれば，$r_{ji} \wedge r_{ik} = 1$ から $r_{jk} \vee \delta_{jk} = 1$ となり，$k \neq j$ であるから $r_{jk} = 1$ となるが，これは矛盾

するので $r_{ji}=0$。したがって $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}=1$。　(証明終)

［性質19］ (b1) $R^2 \leqq R \vee I \Rightarrow$(a21) $\Delta R \times R \leqq \Delta R$

(証明) $r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj}=1$ とおく。このとき，$i \neq j$，$i \neq k$。また $r_{ik} \wedge r_{kj}=1$ から $r_{ij} \vee \delta_{ij}=1$。$i \neq j$ だから $r_{ij}=1$。もし $r_{ji}=1$ であれば，$r_{kj} \wedge r_{ji}=1$ から $r_{ki} \vee \delta_{ki}=1$ となり，$i \neq k$ であるから $r_{ki}=1$ となるが，これは矛盾するので $r_{ji}=0$。したがって $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}=1$。　(証明終)

［性質20］［7］ 次の条件は同値である。

(a9) $R \times \Delta R \leqq \Delta R$

(a18) $(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R$

［性質21］ 次の条件は同値である。

(b6) $R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(b12) $(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(証明) (b6)$\Rightarrow$(b12) $(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(b12)$\Rightarrow$(b6) $r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}}=1$ とおく。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij}=1$ となることを示す。$i \neq k$ のときは明らかであるから $i=k$ とする。このとき $r_{ii} \wedge r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}=1$ となり，$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}=1$。　(証明終)

［性質22］ 次の条件は同値である。

(c3) $R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c6) $(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(証明) (c3)$\Rightarrow$(c6) $(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c6)$\Rightarrow$(c3) $r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}}=1$ とおく。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee r_{ij} \wedge \delta_{ij}=1$ となることを示す。$i \neq k$ のときは明らかであるから $i=k$ とする。このとき $r_{ii} \wedge r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}=1$ となり，$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}=1$。　(証明終)

［性質23］ 次の条件は同値である。

(a9) $R \times \Delta R \leqq \Delta R$

(b6) $R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(証明) (a9)$\Rightarrow$(b6) $R \times \Delta R \leqq \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(b6)$\Rightarrow$(a9) $r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}}=1$ とおく。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}}=1$ となることを

示す。仮定から $i \neq j$ で $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$ となる。$i \neq j$ だから $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。（証明終）

［性質24］　次の条件は同値である。

(a9)　$R \times \Delta R \leqq \Delta R$

(c3)　$R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

（証明）(a9)⇒(c3)　$R \times \Delta R \leqq \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c3)⇒(a9)　$r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$ とおく。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$ となることを示す。仮定から $i \neq j$ で $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee r_{ij} \wedge \delta_{ij} = 1$ となる。$i \neq j$ だから $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。（証明終）

［性質25］　次の条件は同値である。

(a9)　$R \times \Delta R \leqq \Delta R$

(a18)　$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R$

(b6)　$R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(b12)　$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(c3)　$R \times \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c6)　$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

（証明）性質20，性質21，性質22，性質23，性質24による。（証明終）

［性質26］［7］　次の条件は同値である。

(a21)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$

(a24)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R$

［性質27］　次の条件は同値である。

(b14)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R \vee I$

(b16)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R \vee I$

（証明）(b14)⇒(b16)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R \times R \leqq \Delta R \vee I$

(b16)⇒(b14)　$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$k \neq j$ のときは明らかであるから $k = j$ とする。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \wedge r_{jj} = 1$ となり，$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。（証明終）

［性質28］　次の条件は同値である。

(c7)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c8)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(証明)　(c7)⇒(c8)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R \times R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c8)⇒(c7)　$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee r_{ij} \wedge \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$k \neq j$ のときは明らかであるから $k = j$ とする。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \wedge r_{jj} = 1$ となり，$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。　(証明終)

[性質29]　次の条件は同値である。

(a21)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$

(b14)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R \vee I$

(証明)　(a21)⇒(b14)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R \leqq \Delta R \vee I$

(b14)⇒(a21)　$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$ となることを示す。$\overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ から $i \neq j$ となり，また $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$ となるが，$i \neq j$ だから $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。　(証明終)

[性質30]　次の条件は同値である。

(a21)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$

(c7)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(証明)　(a21)⇒(c7)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c7)⇒(a21)　$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$ となることを示す。$\overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ から $i \neq j$ となり，また $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee r_{ij} \wedge \delta_{ij} = 1$ となるが，$i \neq j$ だから $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。　(証明終)

[性質31]　次の条件は同値である。

(a21)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R$

(a24)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R$

(b14)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R \vee I$

(b16)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R \vee I$

(c7)　$\Delta R \times R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c8)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(証明)　性質26，性質27，性質28，性質29，性質30による。　(証明終)

［性質32］（a9）$R \times \Delta R \leqq \Delta R \Rightarrow$（a7）$R \times \Delta R \leqq R$

（証明）$\Delta R \leqq R$であるから明らかである。（証明終）

［性質33］（a21）$\Delta R \times R \leqq \Delta R \Rightarrow$（a19）$\Delta R \times R \leqq R$

（証明）$\Delta R \leqq R$ であるから明らかである。（証明終）

［性質34］［7］次の条件は同値である。

（a7）$R \times \Delta R \leqq R$

（a8）$R \times \Delta R \leqq R \wedge \overline{I}$

（a16）$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R$

（a17）$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R \wedge \overline{I}$

［性質35］次の条件は同値である。

（b5）$R \times \Delta R \leqq R \vee I$

（b11）$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R \vee I$

（証明）（b5）$\Rightarrow$（b11）$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R \times \Delta R \leqq R \vee I$

（b11）$\Rightarrow$（b5）$r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$ とおく。$i \neq k$ のときは明らかだから $i = k$ とする。このとき $r_{ii} \wedge r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$ となり，$r_{ij} = 1$。（証明終）

［性質36］次の条件は同値である。

（a7）$R \times \Delta R \leqq R$

（b5）$R \times \Delta R \leqq R \vee I$

（証明）（a7）$\Rightarrow$（b5）$R \times \Delta R \leqq R \leqq R \vee I$

（b5）$\Rightarrow$（a7）$r_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$ とおく。このとき $i \neq j$ で $r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$ となり，$r_{ij} = 1$ となる。（証明終）

［性質37］次の条件は同値である。

（a7）$R \times \Delta R \leqq R$

（a8）$R \times \Delta R \leqq R \wedge \overline{I}$

（a16）$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R$

（a17）$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R \wedge \overline{I}$

（b5）$R \times \Delta R \leqq R \vee I$

（b11）$(R \wedge \overline{I}) \times \Delta R \leqq R \vee I$

（証明）性質34，性質35，性質36による。（証明終）

［性質38］［7］　次の条件は同値である。

(a19)　$\Delta R \times R \leqq R$

(a20)　$\Delta R \times R \leqq R \wedge \overline{I}$

(a22)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$

(a23)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$

［性質39］　次の条件は同値である。

(b13)　$\Delta R \times R \leqq R \vee I$

(b15)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \vee I$

（証明）(b13)⇒(b15)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq \Delta R \times R \leqq R \vee I$

(b15)⇒(b13)　$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。このとき $r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$k \neq j$ のときは明らかだから $k = j$ とする。このとき $r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \wedge r_{jj} = 1$ となり，$r_{ij} = 1$。（証明終）

［性質40］　次の条件は同値である。

(a19)　$\Delta R \times R \leqq R$

(b13)　$\Delta R \times R \leqq R \vee I$

（証明）(a19)⇒(b13)　$\Delta R \times R \leqq R \leqq R \vee I$

(b13)⇒(a19)　$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。このとき $i \neq j$ で，$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$ となり，$r_{ij} = 1$。（証明終）

［性質41］　次の条件は同値である。

(a19)　$\Delta R \times R \leqq R$

(a20)　$\Delta R \times R \leqq R \wedge \overline{I}$

(a22)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R$

(a23)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \wedge \overline{I}$

(b13)　$\Delta R \times R \leqq R \vee I$

(b15)　$\Delta R \times (R \wedge \overline{I}) \leqq R \vee I$

（証明）性質38，性質39，性質40による。（証明終）

［性質42］［7］(a7)　$R \times \Delta R \leqq R$ ⇒(a27)　$(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$

[性質43] [7] (a19) $\Delta R \times R \leqq R \Rightarrow$ (a27) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$

[性質44] 次の条件は同値である。

(a27) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R$

(b18) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \vee I$

(c9) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(証明) (a27)⇒(c9)⇒(b18) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \leqq \Delta R \vee R \wedge I \leqq \Delta R \vee I$

(b18)⇒(a27) $r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$ とおく。このとき $i \neq j$ で，$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} \vee \delta_{ij} = 1$ となり，$r_{ij} \wedge \overline{r_{ji}} = 1$。(証明終)

[性質45] (a27) $(\Delta R)^2 \leqq \Delta R \Rightarrow$ (a25) $(\Delta R)^2 \leqq R$

(証明) $\Delta R \leqq R$ であるから明らかである。(証明終)

[性質46] [7] 次の条件は同値である。

(a25) $(\Delta R)^2 \leqq R$

(a26) $(\Delta R)^2 \leqq R \wedge \overline{I}$

[性質47] 次の条件は同値である。

(a25) $(\Delta R)^2 \leqq R$

(b17) $(\Delta R)^2 \leqq R \vee I$

(証明) (a25)⇒(b17) $(\Delta R)^2 \leqq R \leqq R \vee I$

(b17)⇒(a25) $r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$ とおく。このとき $i \neq j$ で，$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$ となり，$r_{ij} = 1$。(証明終)

[性質48] 次の条件は同値である。

(a25) $(\Delta R)^2 \leqq R$

(a26) $(\Delta R)^2 \leqq R \wedge \overline{I}$

(b17) $(\Delta R)^2 \leqq R \vee I$

(証明) 性質46，性質47による。(証明終)

条件集合1の各条件間の導出関係を図示すると次の図1のようになる。同一の長方形の中にあるものは互いに同値であり，有向グラフでいえば強連結成分に相当している。図中の矢印（枝）はその方向で導出できることを示しているが，冗長な枝は推移簡約されており，ハッセ線図の形式で示されてい

る。

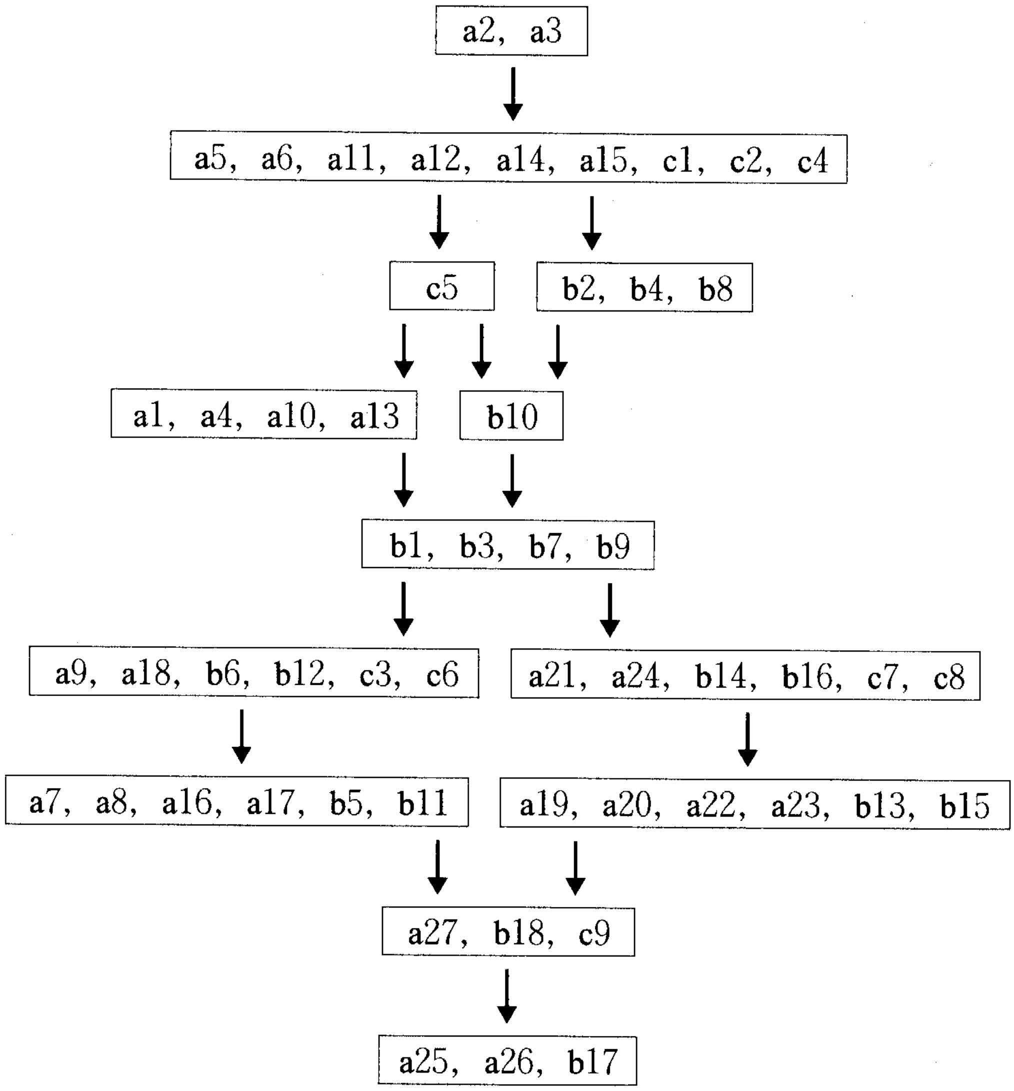

図１　条件集合の階層構造

3．2　非反射性のもとでの条件の同値性

非反射性すなわち$R \wedge I = O$のもとで同値となる条件を示す。

［性質49］ $R \wedge I = O$のとき次の条件は同値である。

(a1) $R^2 \leqq R$

(a2) $R^2 \leqq R \wedge \overline{I}$

(a3) $R^2 \leqq \Delta R$

(a4) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R$

(a5) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq R \wedge \bar{I}$

(a6) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R$

(a10) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R$

(a11) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq R \wedge \bar{I}$

(a12) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \Delta R$

(a13) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R$

(a14) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq R \wedge \bar{I}$

(a15) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \Delta R$

(c1) $R^2 \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c2) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c4) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(c5) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \Delta R \vee R \wedge I$

(証明) $R \wedge I = O$のとき$R = R \wedge \bar{I}$であり，また性質1により

$$R^2 \leqq R \wedge \bar{I} \Leftrightarrow R^2 \leqq \Delta R$$

であるから，明らかである。　(証明終)

上記の性質の一部はすでに知られている［6］。なお，上記の条件は，図1からわかるように，無条件で同値となる条件の次の4つのグループから構成されている。

{a2, a3}

{a5, a6, a11, a12, a14, a15, c1, c2, c4}

{c5}

{a1, a4, a10, a13}

$R \wedge I = O$であれば，これらのグループは合併されて単一の同値な条件のグループとなる。

[性質50]　$R \wedge I = O$のとき次の条件は同値である。

(b2) $R^2 \leqq \Delta R \vee I$

(b4) $R \times (R \wedge \bar{I}) \leqq \Delta R \vee I$

(b8) $(R \wedge \bar{I}) \times R \leqq \Delta R \vee I$

(b10) $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq \Delta R \vee I$

(証明) $R \wedge I = O$ のとき $R = R \wedge \bar{I}$ であるから，明らかである。

(証明終)

なお，すでに性質10で示しているように，(b2)，(b4)，(b8) は $R \wedge I = O$ でなくても，一般に同値である。

3．3　非対称性のもとでの条件の同値性

非対称性すなわち $\nabla R = O$ のもとで同値となる条件を示す。

[性質51] [6]　$\nabla R \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(a1) $R^2 \leqq R$

(b1) $R^2 \leqq R \vee I$

[性質52]　$\nabla R = O$ のとき，条件 (a1)，(a2)，…，(c9) は同値である。

(証明) $\nabla R = O$ のとき，$R \wedge I = O$ であり，また $R = R \wedge \bar{I} = \Delta R$ であるから，条件 (a1)，…，(a27)，(c1)，…　(c9) は同値となる。さらに性質51によって，$\nabla R = O$ のとき $R^2 \leqq R \Leftrightarrow R^2 \leqq R \vee I$ であるから，条件 (a1)，…，(b18) は同値となる。　(証明終)

上記の性質の一部はすでに知られている [7，8]。

[性質53]　$R^n = O$ のとき，条件 (a1)，(a2)，…，(c9) は同値である。

(証明) $R^n = O$ のとき $\nabla R = O$ であるから性質52による。　(証明終)

4．まとめ

非対称性のもとで推移性と同値となる条件について考察を行い，条件の階層性を明らかにした。すなわち，まず非対称性を仮定せずに，条件集合を同値なグループに分割し，導出関係をもとにしてグループ間の階層構造を調べた。次に，非反射性，非対称性，べき零性の各場合における条件の同値性を調べた。ここで示された性質の多くは自明であるが，これらの条件の中には様々な応用において興味あるものも含まれているので，多少の有用性をもつ

ものもあるであろう。

今後の問題として，本論文で示した性質に関しては若干一般化できる場合があり，それらについてさらに考察を行い，一般化された性質を求めることがある。また，本論文では，べき零性のもとで同値となる条件は非対称性の場合と全く同一となっているが，べき零性は非対称性よりも強い条件であるから，べき零性のもとで同値となる新たな条件を調べることも興味ある問題と思われる。

文　献

[1] Arrow, K. J.："Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

[2] Chipman, J. S.："The foundations of utility," Econometrica, Vol. 28, 2, pp.193-224 (1960).

[3] Fishburn, P. C.："The Theory of Social Choice," Princeton University Press, New Jersey (1973).

[4] 橋本　寛："変更された推移性と連結的関係行列"，山口経済学雑誌，第39巻，第3・4号，pp.397-416（平成2年11月）。

[5] 橋本　寛："非反射的推移関係"，山口経済学雑誌，第46巻，第4号，pp.479-498（平成10年7月）。

[6] 橋本　寛："非反射的推移関係に関する同値条件"，山口経済学雑誌，第48巻，第2号，pp.257-285（平成12年3月）。

[7] 橋本　寛："非対称性のもとでの推移関係"，山口経済学雑誌，第49巻，第2号，pp.81-110（平成13年3月）。

[8] 橋本　寛："一般化された推移性のもとでの非対称関係"，山口経済学雑誌，第50巻，第3号，pp.283-293（平成14年5月）。

[9] Sen, A. K.："Collective Choice and Social Welfare," Holden-Day, San Francisco (1970).

[10] Suzumura, K.："Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare," Cambridge

University Press, Cambridge (1983).