概念間の演算と包含関係

橋　本　　　寛

1　まえがき

言語情報の処理において，概念は重要な役割を演じており，従来種々の立場から議論されている。概念に関する基礎的考察はすでに伝統的論理学においてなされているところであるが〔1，2〕，実用上の立場からは別の面からの議論も必要である〔3，4〕。とくに情報検索においては，文献および検索要求の記述のために概念が使用されるため，概念間の包含関係が重視される〔5，6〕。

この概念間の包含関係を表示するために，しばしばベン図表が用いられている。しかし概念の個数が多くなると，特別な場合を除いて，包含関係をベン図表で表示することは困難となる。この困難を切り抜ける一つの方法は，概念間の包含関係を行列表示することである。この行列表示の方法は以前から知られていたが，その行列の実用的な構成手順が確立されていなかった。したがって，その行列の有用性は十分認められていながらも，その行列を具体的な問題に適用することはほとんどなされていなかった。

これに対し筆者らは，概念間の包含関係を表示するものとして，表示行列なるものを文献〔4〕において提案し，またその実際的な構成手順として，2項関係による概念の分割に基く手順を与えている。しかしその文献〔4〕においては，表示行列の構成手順および複合概念に関する種々の判定手順に重点をおいて議論がなされているため，その手順の理論的根拠に関する議論

が一部不十分であった。本論文では，その不備を補うために，概念の分割に関する情報が完全である場合について，表示行列に関する手順の妥当性を示している。さらに文献〔4〕において直観的な説明で議論を終らせていたその他の箇所も，できるだけ論理的な議論に構成しなおしている。

本論文の構成はつぎのようになっている。まず概念は一般に無限の要素をもつ集合であるとして処理することを述べる。つぎにその無限集合に関する演算を有限集合の演算に変換する。この過程を量子化とよぶことにする。この量子化は，概念間の演算を機械的に処理する上で，きわめて有用である。この量子化によって，概念算すなわち無限集合に関する演算を有限集合の演算に置き換えることが可能となるが，さらに有限集合に関する演算を2進ベクトル間の演算に変換する。こうして，結局概念間の演算を有限次元のベクトル間演算として実行することになる。本論文はその正当性について述べている。

表示行列が現実の情報処理において利用可能であると，従来観念的に考えられていた興味深い種々の手法の実現が可能となる。また表示行列は情報検索に関しても，これまでにはなかった新分野を開くものであることが期待される。その概要を述べるとつぎのとおりである。

(1) 表示行列は新しい形式のシソーラスとして使用できる。すなわち表示行列においては上位概念および下位概念が明確に表示されているし，また表示行列を用いることによって，複合された概念間の包含関係，さらにはそれ以上の細部に関する存在性の情報をも完全に知ることができる。概念の広さを定量的に測ることもできる。このようなことは従来の樹枝状の分類表や用語集的シソーラスではできなかったことである。

(2) 包含関係に関する推論がきわめて容易におこなえるので，質問回答や定理の自動証明において都合がよい。

(3) 文献検索において，文献を単なるキーワードの集合として表現するのではなくて，キーワードを含む式で表現しても，文献と検索質問とのマッチングが容易におこなえる。これまで，文献を式で表現することにより，文献の

内容がより正確に記述できることは，観念的にはわかっていたが，文献と検索質問とのマッチングをおこなうための満足な手法がなかった。しかし表示行列を用いれば，文献の示す概念と質問の示す概念とのマッチングは容易にしかも正確におこなえる。

(4) 従来の検索では，検索結果は単に文献の集合で与えられればよかったが，情報がいくつかの文献に分散しているときは，結果は式で表現されねばおかしい。さらに，質問回答系においては，結果は式で表現されるものと考える方がよい。このように結果を式で表現することはこれまでの情報検索ではほとんど考えられておらず，またそのための手法もほとんど出されていないが，表示行列を用いれば，それも簡単に実現できる。

(5) 表示行列によって概念間の類似性を求めることができる。この類似性は，従来の統計的尺度によるものと異なって，相当信頼性の高いものであることが期待できる。

(6) 表示行列の情報が完全でない場合は，現在までの情報では未知の事項を自動的に求めることができる。したがって，質問回答系のような人間機械系においては，表示行列を構成するときに機械側が必要な情報を自動的に要求することや，未知の事項すなわち問題を人間側に提供することが可能になる。

2　概念の量子化

本論文では，概念を集合として扱って議論していく。そのため集合論の用語・記号を借用する。ここで概念と呼ぶものの具体的な例はつぎのようなものである。

正規行列，ユニタリ行列，エルミット行列など

これらの概念は複素正方行列の集合を考えた場合その中の部分集合であって，実在の要素をもつ（図１参照）。すなわちそれぞれの行列の具体例を持って来て示すことができる。このように実在の集合に対応するものだけを，こ

こでは概念と呼び，その他のものは概念と呼ばないことにする。

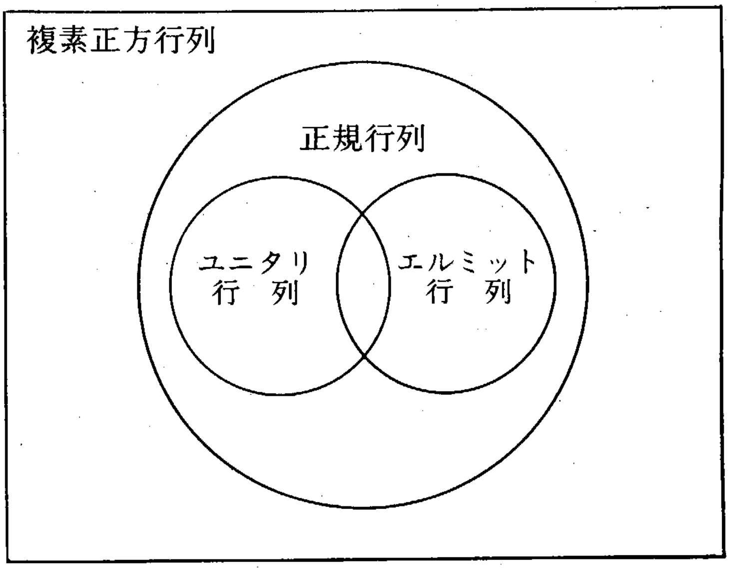

図1

つぎに必要な記号の定義を与える。

〔定義1〕

A，Bを集合するとき，

(1)　$A \cap B$ …A，Bの積集合

(2)　$A \cup B$ …A，Bの和集合

(3)　$\overline{A}$ …… 適当な全体集合に対するAの補集合

(4)　$A-B$ …… Aに属し，Bに属さないすべての要素の集合

(5)　A^1 ……Aのこと

(6)　A^0 …… $\overline{A}$のこと

(7)　ϕ …… 空集合

(8)　$A=B$ ……AとBが集合として等しいことを示す。

(9)　$A \subset B$ ……AがBの真部分集合であることを示す。

(10)　$A \subseteqq B$ ……AがBの部分集合であることを示すを示す。

(11)　$A \neq B$ …… AとBが集合として等しくないことを示す。

つぎの基本的性質は証明なしに使用する。

〔性質1〕

A，B，Cを集合とするとき，

(1) $A = B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi$，$\overline{A} \cap B = \phi$

(2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi$，$\overline{A} \cap B \neq \phi$

(3) $A \subseteqq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi \Leftrightarrow A \cap B = A$

(4) $A \cap B = B \cap A$，$A \cup B = B \cup A$

(5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(7) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(8) $A \cap A = A$，$A \cup A = A$

(9) $A = A \cap (B \cup \overline{B})$

(10) $A \cap \overline{A} = \phi$

(11) $\overline{\overline{A}} = A$

〔定義2〕

空でない集合を考え，それをSで示す。またSのn個の部分集合を

S_1，S_2，……，S_n

で示す。S，S_1，S_2，……，S_nは一般に無限集合である。

この定義の下で，

$$\phi \subseteqq S_i \subseteqq S \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

であり，またS_iの補集合$\overline{S}_i$はSに対して考える。したがって

$$\phi \subseteqq \overline{S}_i \subseteqq S \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

である。なおSの外の領域については何も議論しない。

Sとして複素正方行列をとれば，正規行列，ユニタリ行列，エルミット行列などが，それぞれS_1，S_2，S_3などの例となる(図2)。

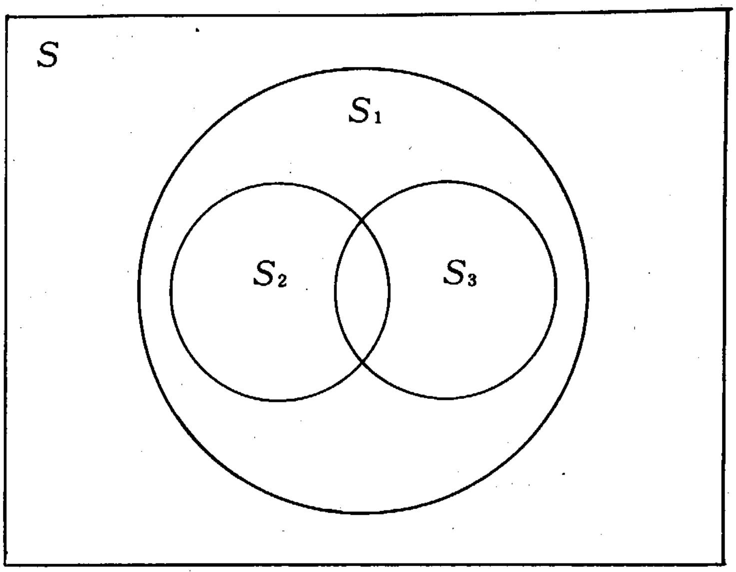

図2

〔定義3〕

Xを有限集合するとき，その要素xに関する条件 $R(x)$を満足するxに対し $r(x)$ で与えられるもののうち，相異なるものを要素にもつ集合Aをつぎの形式で示す。

$$A = \bigcup_{x \in X} \{r(x) | R(x)\}$$

ここに，特定のxに対して

$R(x)$が成立するとき$\{r(x)|R(x)\} = \{r(x)\}$

$R(x)$が成立しないとき$\{r(x)|R(x)\} = \phi$

とする。もし$X = \phi$のときは$A = \phi$と定める。なおxに関する条件$R(x)$ がないときは

$$A = \bigcup_{x \in X} \{r(x)\}$$

と示す。

また，Zを有限の集合または集合族とするとき，Zに属するYに対して定まる集合$F(Y)$ の和を

$$B = \bigcup_{Y \in Z} F(Y)$$

で示す。もし$Z=\phi$のときは$B=\phi$とする。

〔定義4〕

集合$\{0,1\}$からn回の直積によって構成される集合を$\{0,1\}^{(n)}$で示し，つぎのように定義する（$n=1,2,3,\cdots\cdots$）。

$n=1$のとき$\{0,1\}^{(1)}=\{(0),(1)\}$

$n=k+1$のとき（$k=1,2,3,\cdots\cdots$），

$$\{0,\ 1\}^{(k+1)}=\bigcup_{(x_{(1)},x_{(2)},\cdots\cdots,x_{(k)})\in\{0,1\}^{(k)}}\{(x_{(1)},x_{(2)},\cdots\cdots,x_{(k)},0),\ (x_{(1)},x_{(2)},\cdots\cdots,x_{(k)},1)\}$$

なお，$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)})$，$(y_{(1)},\ y_{(2)},\ \cdots\cdots,\ y_{(n)})\in\{0,\ 1\}^{(n)}$について，任意の$i$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）に対して$x_{(i)}=y_{(i)}$であるとき

$$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)})=(y_{(1)},\ y_{(2)},\ \cdots\cdots,\ y_{(n)})$$

と示す。また少なくとも1個のj（$1\leqq j\leqq n$）に対し，$x_{(j)}\neq y_{(j)}$であるときは

$$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)})\neq(y_{(1)},\ y_{(2)},\ \cdots\cdots,\ y_{(n)})$$

と示す。

〔定義5〕

$S_1^{x(1)}\cap S_2^{x(2)}\cap\cdots\cdots\cap S_n^{x(n)}$で与えられるものを基本積と呼ぶ。ここに

$$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)})\in\{0,\ 1\}^{(n)}$$

なお，以下において$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)})=\boldsymbol{x}$とおき，$S_1^{x(1)}\cap S_2^{x(2)}\cap\cdots\cdots\cap S_n^{x(n)}$を$E(\boldsymbol{x})$で，また$\boldsymbol{x}$を明示する必要がないときは$E$で示すこともある。

〔性質2〕

$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)})$，$(y_{(1)},\ y_{(2)},\ \cdots\cdots,\ y_{(n)})\in\{0,\ 1\}^{(n)}$に対して

$$S_1^{x(1)}\cap S_2^{x(2)}\cap\cdots\cdots\cap S_n^{x(n)}\neq\phi,$$
$$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)})\neq(y_{(1)},\ y_{(2)},\ \cdots\cdots,\ y_{(n)})$$

ならば

(1)　$S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)} \neq S_1^{y(1)} \cap S_2^{y(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)}$

(2)　$(S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)}) \cap (S_1^{y(1)} \cap S_2^{y(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{y(n)}) = \phi$

（証明）

(1)　$S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)} = S_1^{y(1)} \cap S_2^{y(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{y(n)}$と仮定する。このとき

$$\begin{aligned} & S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)} \\ &= (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots S_n^{x(n)}) \cap (S_1^{y(1)} \cap S_2^{y(2)} \cap \cdots\cdots S_n^{y(n)}) \end{aligned}$$

一方，$(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)}) \neq (y_{(1)},\ y_{(2)},\ \cdots\cdots,\ y_{(n)})$であるから少なくとも1個の$j$（$1 \leqq j \leqq n$）については

$$x_{(j)} \neq y_{(j)}$$

である。

もし，$x_{(j)}=1$で$y_{(j)}=0$であれば

$$\begin{aligned} & (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_j^1 \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)}) \cap (S_1^{y(1)} \cap S_2^{y(2)} \cap \cdots \\ & \qquad \cdots \cap S_j^0 \cap \cdots\cdots \cap S_n^{y(n)}) = \phi \quad (\because\ S_j^0 \cap S_j^1 = \phi) \end{aligned}$$

$x_{(j)}=0$で$y_{(j)}=1$のときも同様である。したがって

$$S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)} = \phi$$

となる。これは矛盾である。

ゆえに，$S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)} \neq S_1^{y(1)} \cap S_2^{y(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{y(n)}$でなければならない。

(2)　(1)の証明より明らかである。

この性質によって，空でない基本積は互いに相異なっており，また排他的であることが保証される。つぎに空でない基本積の集合を考える。

〔定義6〕

空でない基本積$S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)}$の集合を$K$とおく：

$$K = \bigcup_{(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)}) \in \{0,1\}^{(n)}} \{ S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)} | S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)} \neq \phi \}$$

〔性質3〕

(1)　$S = \bigcup_{(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(n)}) \in \{0,1\}^{(n)}} (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_n^{x(n)})$

(2)　$S = \bigcup_{E \in K} E$

（証明）

(1)　(a)　$n = 1$のとき

$$\begin{aligned} S &= S \cap (\bar{S_1} \cup S_1) = (S \cap \bar{S}_1) \cup (S \cap S_1) \\ &= \bar{S_1} \cup S_1 = S_1^0 \cup S_1^1 \\ &= \bigcup_{(x_{(1)}) \in \{0,1\}^{(1)}} S_1^{x(1)} \end{aligned}$$

(b)　$n = k$のとき成立すると仮定する。

$$S = \bigcup_{(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots x_{(k)}) \in \{0,1\}^{(k)}} (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_k^{x(k)})$$

このとき

$$\begin{aligned} S &= S \cap (\overline{S_{k+1}} \cup S_{k+1}) \\ &= [\bigcup_{(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots\cdots, x_{(k)}) \in \{0,1\}^{(k)}} (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_k^{x(k)})] \cap (\overline{S_{k+1}} \cup S_{k+1}) \\ &= \bigcup_{(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots\cdots, x_{(k)}) \in \{0,1\}^{(k)}} [(S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_k^{x(k)} \cap S_{k+1}^0) \cup \\ &\qquad (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_k^{x(k)} \cap S_{k+1}^1)] \\ &= \bigcup_{(x_{(1)},\ x_{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_{(k+1)}) \in \{0,1\}^{(k+1)}} (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_k^{x(k)} \cap S_{k+1}^{x(k+1)}) \end{aligned}$$

したがって，任意の自然数 n に対して

$$S=\bigcup_{(x(1),\,x(2),\,\cdots\cdots,\,x(n))\in\{0,1\}^{(n)}}(S_1^{x(1)}\cap S_2^{x(2)}\cap\cdots\cdots\cap S_n^{x(n)})$$

(2)　$$K=\bigcup_{(x(1),\,x(2),\,\cdots\cdots,\,x(n))\in\{0,1\}^{(n)}}\{S_1^{x(1)}\cap S_2^{x(2)}\cap\cdots\cdots\cap S_n^{x(n)}\mid S_1^{x(1)}\cap S_2^{x(2)}\cap\cdots\cdots\cap S_n^{x(n)}\neq\phi\}$$

であるから，(1)より明らかに

$$S=\bigcup_{E\in K}E$$

が成立する。

〔定義7〕

'S_1'，'S_2'，……，'S_n' および∩，∪，⁻ を用いて，以下のようにして構成される式の集合を $\varGamma(S)$ で示す。

(1)　'S_i' $\in\varGamma(S)$　$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

(2)　'F' $\in\varGamma(S)$ のとき，'$\overline{F}$' $\in\varGamma(S)$。

(3)　'F'，'G' $\in\varGamma(S)$ のとき

'$F\cap G$' $\in\varGamma(S)$，

'$F\cup G$' $\in\varGamma(S)$。

(4)　(1)〜(3)によって構成されるものだけが $\varGamma(S)$ の要素である。

ただし'……'でかこまれたものは式そのもの，または式の集合の中を動く変数であり，式の表わす内容を示すものではない。たとえば，'$S_1\cup S_2$' は集合 S_1 と S_2 の和集合 $S_1\cup S_2$ を示すものではなくて，単に式としての $S_1\cup S_2$ を示すものである。

〔定義8〕

(1)　$\varGamma(S)$ の要素 '$F(S_{i(1)},S_{i(2)},\cdots\cdots,S_{i(k)})$'，'$G(S_{j(1)},S_{j(2)},\cdots\cdots,S_{j(l)})$' をそれぞれ '$F(S_i)$'，'$F(S_j)$' で表わす。

(2)　'$F(S_i)$' $\in\varGamma(S)$ に対して，'$F(S_i)$' 中の演算子∩，∪，⁻ の個数の合計が j 以下である '$F(S_i)$' の集合を $\varGamma_j(S)$ で示す。

$$\Gamma_j(S) = \bigcup_{\text{'}F(S_i)\text{'} \in \Gamma(S)} \{\text{'}F(S_i)\text{'} \mid op(\text{'}F(S_i)\text{'}) \leqq j\}$$

ただし，$op(\text{'}F(S_i)\text{'})$ は'$F(S_i)$'中の演算子 $\cap, \cup, {}^{-}$ の個数の合計である。

この定義の下では明らかに

$$\Gamma_0(S) \subset \Gamma_1(S) \subset \Gamma_2(S) \subset \cdots$$
$$\Gamma(S) = \Gamma_0(S) \cup \Gamma_1(S) \cup \Gamma_2(S) \cup \cdots$$

である。

〔性質４〕

任意の'$F(S_i)$'$\in \Gamma(S)$に対して

$$F(S_i) \subseteqq S$$

（証明）

'$F(S_i)$'中の $\cap, \cup, {}^{-}$ の個数の合計 $op(\text{'}F(S_i)\text{'})$に関して帰納法を用いる。$op(\text{'}F(S_i)\text{'}) = k$ とおく。

(1)　$k = 0$ のとき，S_t の定義によって

$$S_t \subseteqq S \quad (t = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

(2)　$k \leqq j$のとき成立しているものとする。すなわち任意の'F'$\in \Gamma_j(S)$に対して

$$F \subseteqq S$$

ここで'G'$\in \Gamma_{j+1}(S) - \Gamma_j(S)$について考えると定義７の$\Gamma(S)$に関する構成法によって'$G$'は

$$\text{'}G\text{'} = \text{'}F \cap H\text{'}$$
$$\text{'}G\text{'} = \text{'}F \cup H\text{'}$$
$$\text{'}G\text{'} = \text{'}\overline{F}\text{'}$$

のいずれかで表わされる。

ただし $op(\text{`}F\text{'}) \leqq j$, $op(\text{`}H\text{'}) \leqq j$, すなわち‘$F$’, ‘$H$’ $\epsilon \Gamma_j(S)$。

(a) ‘G’ = ‘$F \cap H$’ のとき

F, H については $F \subseteqq S$, $H \subseteqq S$ であって

$$\begin{aligned} F \cap S &= F \\ H \cap S &= H \\ (F \cap H) \cap S &= (F \cap H) \cap S \cap S \\ &= (F \cap S) \cap (H \cap S) \\ &= F \cap H \end{aligned}$$

ゆえに

$$F \cap H \subseteqq S$$

(b) ‘G’ = ‘$F \cup H$’ のとき

F, H については $F \subseteqq S$, $H \subseteqq S$ であって

$$\begin{aligned} F \cap S &= F \\ H \cap S &= H \\ (F \cup H) \cap S &= (F \cap S) \cup (H \cap S) \\ &= F \cup H \end{aligned}$$

ゆえに

$$F \cup H \subseteqq S$$

(c) ‘G’ = ‘$\overline{F}$’ のとき

(i) ‘F’ = ‘$H_1 \cap H_2$’ のとき

$$\text{`}\overline{H_1 \cap H_2}\text{'} \epsilon \Gamma_{j+1}(S), \quad \text{`}H_1 \cap H_2\text{'} \epsilon \Gamma_j(S)$$

したがって

$$`H_1' \in \boldsymbol{\Gamma}_{j-1}(\boldsymbol{S}), \quad `H_2' \in \boldsymbol{\Gamma}_{j-1}(\boldsymbol{S}),$$
$$`\overline{H}_1' \in \boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{S}), \quad `\overline{H}_2' \in \boldsymbol{\Gamma}_j(\boldsymbol{S})$$

このとき

$$\begin{aligned}\overline{H_1 \cap H_2} \cap S &= (\overline{H}_1 \cup \overline{H}_2) \cap S \\ &= (\overline{H}_1 \cap S) \cup (\overline{H}_2 \cap S) \\ &= \overline{H}_1 \cup \overline{H}_2 \\ &= \overline{H_1 \cap H_2}\end{aligned}$$

ゆえに

$$G = \overline{F} = \overline{H_1 \cap H_2} \subseteqq S$$

(ii) $`F' = `H_1 \cup H_2'$ のとき

$$\begin{aligned}\overline{H_1 \cup H_2} \cap S &= (\overline{H}_1 \cap \overline{H}_2) \cap S \\ &= (\overline{H}_1 \cap S) \cap (\overline{H}_2 \cap S) \\ &= \overline{H}_1 \cap \overline{H}_2 \\ &= \overline{H_1 \cup H_2}\end{aligned}$$

ゆえに

$$G = \overline{F} = \overline{H_1 \cup H_2} \subseteqq S$$

(iii) $`F' = `\overline{H}'$ のとき

$$G = \overline{F} = \overline{\overline{H}} = H, \quad `H' \in \boldsymbol{\Gamma}_{j-1}(\boldsymbol{S})$$

したがって

$$H \subseteqq S$$

ゆえに

$$G = \overline{F} = \overline{\overline{\overline{H}}} \subseteqq S$$

(iv)　とくに‘F’＝‘S_t’　($t = 1, 2, \cdots\cdots, n$) のとき

$$G = \overline{F} = \overline{S_t}$$

S_t の補集合 $\overline{S_t}$ は Sに対して考えるから，当然

$$\overline{S_t} \subseteqq S$$

となる(定義2)。したがって

$$G = \overline{F} \subseteqq S$$

こうして，任意の‘G’$\epsilon \Gamma_{j+1}(S) - \Gamma_j(S)$に対して

$$G \subseteqq S$$

よって任意の‘F’$\epsilon \Gamma(S)$に対して

$$F \subseteqq S$$

〔性質5〕

任意の‘$F(S_i)$’$\epsilon \Gamma(S)$，任意の$E \epsilon K$に対して

$$F(S_i) \cap E = \begin{cases} E \\ \phi \end{cases}$$

(証明)

‘$F(S_i)$’中の $\cap$, $\cup$, $^-$ の個数の合計op(‘$F(S_i)$’)に関して，帰納法を用いる。op(‘$F(S_i)$’) = kとおく。

(1)　$k=0$ のとき

$$`F(S_i)' = `S_t' \quad (t = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$
$$\begin{aligned} F(S_i) \cap E &= S_t \cap E \\ &= S_t \cap (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots \cap S_t^{x(t)} \cap \cdots \cap S_n^{x(n)}) \end{aligned}$$

$x_{(t)}=0$ のとき

$$F(S_i) \cap E = \phi \quad (\because\ S_t \cap S_t^0 = S_t \cap \overline{S}_t = \phi\ )$$

$x_{(t)}=1$ のとき

$$F(S_i) \cap E = E \quad (\because\ S_t \cap S_t^1 = S_t^1 \cap S_t^1 = S_t^1)$$

(2)　$k \leqq j$ のとき与式が成立すると仮定する。すなわち，任意の $`F' \in \Gamma_j(S)$ に対して

$$F \cap E = \begin{cases} E \\ \phi \end{cases}$$

ここで $`G' \in \Gamma_{j+1}(S) - \Gamma_j(S)$ について考えると，定義7の $\Gamma(S)$ に関する構成法によって $`G'$ は

$$`G' = `F \cap H'$$
$$`G' = `F \cup H'$$
$$`G' = `\overline{F}'$$

のいずれかで表わされる。

ただし，$op(`F') \leqq j$，$op(`H') \leqq j$ すなわち

$$`F', `H' \in \Gamma_j(S)$$

(a)　$`G' = `F \cap H'$ のとき

$$G \cap E = (F \cap H) \cap E = (F \cap E) \cap (H \cap E)$$

$F\cap E$, $H\cap E$はそれぞれEかϕである。したがって$G\cap E$はEかϕである。

(b)　'G' = '$F\cup H$' のとき

$$G\cap E=(F\cup H)\cap E=(F\cap E)\cup(H\cap E)$$

$F\cap E$, $H\cap E$はそれぞれEかϕである。したがって$G\cap E$はEかϕである

(c)　'G' = '$\overline{F}$' のとき 'F' $\epsilon\Gamma_j(S)$

（i）'F' = '$H_1\cap H_2$' のとき

$$G\cap E=\overline{F}\cap E=\overline{H_1\cap H_2}\cap E=(\overline{H}_1\cup\overline{H}_2)\cap E$$
$$=(\overline{H}_1\cap E)\cup(\overline{H}_2\cap E)$$

ここで

$$\text{'}G\text{'}\,\epsilon\Gamma_{j+1}(S),\qquad \text{'}F\text{'}\,\epsilon\Gamma_j(S)$$
$$\text{'}H_1\text{'},\text{'}H_2\text{'}\,\epsilon\Gamma_{j-1}(S)$$

よって

$$\text{'}\overline{H}_1\text{'},\ \text{'}\overline{H}_2\text{'}\,\epsilon\Gamma_j(S)$$

したがって

$$\overline{H}_1\cap E,\qquad \overline{H}_2\cap E$$

は，それぞれEかϕである。ゆえに$G\cap E$もEかϕである

（ii）'F' = '$H_1\cup H_2$' のとき

$$G\cap E=\overline{F}\cap E=\overline{H_1\cup H_2}\cap E=(\overline{H}_1\cap\overline{H}_2)\cap E$$
$$=(\overline{H}_1\cap E)\cap(\overline{H}_2\cap E)$$

ここで

$$`G\,' \in \Gamma_{j+1}(S),\quad `F\,' \in \Gamma_j(S)$$
$$`H_1',\ `H_2' \in \Gamma_{j-1}(S)$$

よって

$$`\overline{H}_1',\ `\overline{H}_2' \in \Gamma_j(S)$$

したがって，$\overline{H}_1 \cap E$, $\overline{H}_2 \cap E$ はそれぞれ E か ϕ である。

ゆえに $G \cap E$ も E か ϕ である。

（iii） $`F\,' = `\overline{H}\,'$ のとき

$$G \cap E = \overline{F} \cap E = \overline{\overline{H}} \cap E = H \cap E$$

ここで

$$`G\,' \in \Gamma_{j+1}(S),\ `F' \in \Gamma_j(S),\quad `H' \in \Gamma_{j-1}(S)$$

したがって，$H \cap E$ は E か ϕ である。

ゆえに $G \cap E$ も E か ϕ である。

（iv） とくに $`F\,' = `S_t'\,(t = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ のとき

$$\begin{aligned} G \cap E &= \overline{F} \cap E = \overline{S}_t \cap E \\ &= S_t^0 \cap (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_t^{x(t)} \cap \cdots\cdots S_n^{x(n)}) \end{aligned}$$

$x_{(t)} = 0$ のとき

$$G \cap E = E \quad (\because\ S_t^0 \cap S_t^0 = S_t^0)$$

$x_{(t)} = 1$ のとき

$$G \cap E = \phi \quad (\because\ S_t^0 \cap S_t^1 = \phi)$$

したがって，$`G\,' = `\overline{F}'$ のとき $G \cap E$ は E か ϕ である。

〔定義9〕

任意の ‘$F(S_i)$’$\epsilon\Gamma(S)$ に対して

$$C(F(S_i)) \equiv \bigcup_{E\epsilon K}\{E|F(S_i)\cap E=E\}$$

と定める。

すなわち，$C(F(S_i))$ は $F(S_i)$ に含まれるすべての空でない基本積の集合である。

〔性質6〕

任意の ‘$F(S_i)$’$\epsilon\Gamma(S)$ に対して

$$F(S_i)=\bigcup_{E\epsilon C(F(S_i))}E$$

（証明）

$$\begin{aligned}F(S_i) &= F(S_i)\cap S = F(S_i)\cap(\bigcup_{E\epsilon K}E)\\ &= \bigcup_{E\epsilon K}(F(S_i)\cap E)\end{aligned}$$

$F(S_i)\cap E$ は E か ϕ であるから，つぎのように定義する。

$$K_1=\bigcup_{E\epsilon K}\{E|F(S_i)\cap E=E\}$$
$$K_2=\bigcup_{E\epsilon K}\{E|F(S_i)\cap E=\phi\}=\bigcup_{E\epsilon K}\{E|F(S_i)\cap E\neq E\}$$

このとき，あきらかに

$$K_1\cap K_2=\phi$$
$$K_1\cup K_2=K$$

この K_1，K_2 を用いると

$$\begin{aligned}F(S_i) &= \bigcup_{E\epsilon K}(F(S_i)\cap E)\\ &= (\bigcup_{E\epsilon K_1}(F(S_i)\cap E))\cup(\bigcup_{E\epsilon K_2}(F(S_i)\cap E))\end{aligned}$$

$$=\bigcup_{E\in K_1}(F(S_i)\cap E))\cup\phi$$

$$=\bigcup_{E\in K_1}(F(S_i)\cap E)=\bigcup_{E\in K_1}E$$

ところで，$K_1=C(F(S_i))$ であるから

$$F(S_i)=\bigcup_{E\in C(F(S_i))}E$$

なお $C(F(S_i))=\phi$ のときも

$$F(S_i)=\bigcup_{E\in C(F(S_i))}E$$

の成立することはつぎのようにしてわかる。

$C(F(S_i))=\phi$ のとき，定義により

$$\bigcup_{E\in C(F(S_i))}E=\phi$$

また，$C(F(S_i))=\phi$ となるときは，$C(F(S_i))$ が

$$C(F(S_i))=\bigcup_{E\in K}\{E|F(S_i)\cap E=E\}$$

と定義されているので，すべての $E\in K$ について

$$F(S_i)\cap E\neq E$$

すなわち

$$F(S_i)\cap E=\phi$$

でなければならない。

ところで，

$$F(S_i)=F(S_i)\cap S=F(S_i)\cap(\bigcup_{E\in K}E)$$

$$=\bigcup_{E\in K}(F(S_i)\cap E)=\phi$$

したがって，$C(F(S_i)) = \phi$ならば$F(S_i) = \phi$となる。

〔性質7〕

任意の'$F(S_i)$'$\epsilon\Gamma(S)$に対して

(1)　$F(S_i) = \phi \Leftrightarrow C(F(S_i)) = \phi$

(2)　$F(S_i) \neq \phi \Leftrightarrow C(F(S_i)) \neq \phi$

（証明）

(1)　(a)　$F(S_i) = \phi$のとき

任意の$E \epsilon K$に対して$F(S_i) \cap E = \phi$すなわち$F(S_i) \cap E \neq E$。したがって

$$C(F(S_i)) = \bigcup_{E \epsilon K} \{E | F(S_i) \cap E = E\} = \phi$$

ゆえに，$F(S_i) = \phi$ならば$C(F(S_i)) = \phi$

(b)　$C(F(S_i)) = \phi$のとき

このとき$F(S_i) = \phi$となることは性質6によって明らかである。

(2)　(1)より自明。

〔性質8〕

任意の'$F(S_i)$'$\epsilon\Gamma(S)$に対して

$$C(F(S_i)) = F(C_i)$$

ここに，$F(C_i)$は$F(C(S_{i(1)}), C(S_{i(2)}), \cdots\cdots, C(S_{i(k)}))$を表わす（以下同様）。

（証明）

'$F(S_i)$'中の$\cap, \cup, ^{-}$の個数の合計op('$F(S_i)$')に関して帰納法を用いる。op('$F(S_i)$')$= r$とおく。

(1)　$r = 0$のとき

$$\text{'}F(S_i)\text{'} = \text{'}S_t\text{'} \quad (t = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

このときは

$$C(F(S_i)) = C(S_t)$$
$$F(C_i) = C(S_t)$$

となり，明らかに成立する。

(2) $r \leqq j$ のとき与式が成立するとする。すなわち，任意の'F'$\epsilon \Gamma_j(S)$ に対して

$$C(F) = F(C)$$

ただし，$F(C)$ は'F'$\epsilon \Gamma_j(S)$ に含まれる S_1, S_2, ……, S_n をそれぞれ $C(S_1)$, $C(S_2)$, ……, $C(S_n)$ で置き換えることによって得られるものである。以下 $G(C)$, $H(C)$ についても同様。

ここで'G'$\epsilon \Gamma_{j+1}(S) - \Gamma_j(S)$ について考えると，Γ に関する定義7の構成法によって，'G'は

$$\text{‘}G\text{’} = \text{‘}F \cap H\text{’}$$
$$\text{‘}G\text{’} = \text{‘}F \cup H\text{’}$$
$$\text{‘}G\text{’} = \text{‘}\overline{F}\text{’}$$

のいずれかで表わされる。ただし op('F') $\leqq j$, op('H') $\leqq j$, すなわち

$$\text{‘}F\text{’}, \text{‘}H\text{’} \in \Gamma_j(S)$$

(a) 'G' = '$F \cap H$' のとき

$$C(G) = C(F \cap H) = \bigcup_{E \in K}\{E | (F \cap H) \cap E = E\}$$
$$= \bigcup_{E \in K}\{E | (F \cap E) \cap (H \cap E) = E\}$$

$F \cap E$, $H \cap E$ はそれぞれ E か ϕ であるから，$(F \cap E) \cap (H \cap E) = E$ となるのは，$F \cap E = E$ でかつ $H \cap E = E$ のときである。よって

$$C(F) = \bigcup_{E \in K}\{E | F \cap E = E,\ H \cap E = E\ )\}$$

$$= (\bigcup_{E\epsilon K}\{E|F\cap E = E\}\cap(\bigcup_{E\epsilon K}\{E|H\cap E = E\})$$
$$= C(F)\cap C(H)$$
$$= F(\boldsymbol{C})\cap H(\boldsymbol{C})$$

ゆえに

$$C(G) = C(F\cap H) = C(F)\cap C(H)$$
$$= F(\boldsymbol{C})\cap H(\boldsymbol{C}) = G(\boldsymbol{C})$$

（b）‘G’＝‘$F\cup H$’のとき

$$C(G) = C(F\cup H) = \bigcup_{E\epsilon K}\{E|(F\cup H)\cap E = E\}$$
$$= \bigcup_{E\epsilon K}\{E|(F\cap E)\cup(H\cap E) = E\}$$

$F\cap E$，$H\cap E$はそれぞれEかϕであるから

$$(F\cap E)\cup(H\cap E) = E$$

となるのは，$F\cap E=E$または$H\cap E=E$のときである。よって

$$C(G) = \bigcup_{E\epsilon K}\{E|F\cap E=E \text{または} H\cap E=E\}$$
$$= (\bigcup_{E\epsilon K}\{E|F\cap E = E\})\cup(\bigcup_{E\epsilon K}\{E|H\cap E = E\})$$
$$= C(F)\cup C(H) = F(\boldsymbol{C})\cup H(\boldsymbol{C})$$

ゆえに

$$C(G) = C(F\cup H) = C(F)\cup C(H)$$
$$= F(\boldsymbol{C})\cup H(\boldsymbol{C}) = G(\boldsymbol{C})$$

（c）‘G’＝‘$\overline{F}$’　のとき

$$\text{‘}F\text{’}\epsilon\Gamma_j(\boldsymbol{S})$$

(i)　'F' = '$H_1 \cap H_2$' のとき

$$G = \bar{F} = \overline{H_1 \cap H_2} = \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2$$

$$\begin{aligned} C(G) &= \bigcup_{E \in K}\{E \mid G \cap E = E\} \\ &= \bigcup_{E \in K}\{E \mid \overline{H_1 \cap H_2} \cap E = E\} \\ &= \bigcup_{E \in K}\{E \mid (\bar{H}_1 \cup \bar{H}_2) \cap E = E\} \\ &= \bigcup_{E \in K}\{E \mid (\bar{H}_1 \cap E) \cup (\bar{H}_2 \cap E) = E\} \end{aligned}$$

$\bar{H}_1 \cap E$，$\bar{H}_2 \cap E$ はそれぞれ E か ϕ であるから，$(\bar{H}_1 \cap E) \cup (\bar{H}_2 \cap E)$ が E となるのは，$\bar{H}_1 \cap E = E$ または $\bar{H}_2 \cap E = E$ のときである。よって

$$\begin{aligned} C(G) &= \bigcup_{E \in K}\{E \mid \bar{H}_1 \cap E = E \text{ または } \bar{H}_2 \cap E = E\} \\ &= \Big(\bigcup_{E \in K}\{E \mid \bar{H}_1 \cap E = E\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{E \in K}\{E \mid \bar{H}_2 \cap E = E\}\Big) \\ &= C(\bar{H}_1) \cup C(\bar{H}_2) \\ &= \bar{H}_1(\boldsymbol{C}) \cup \bar{H}_2(\boldsymbol{C}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\because\ & \text{'}G\text{'} \in \Gamma_{j+1}(\boldsymbol{S}),\ \text{'}F\text{'} \in \Gamma_j(\boldsymbol{S})。 \\ & \text{'}H_1\text{'}, \text{'}H_2\text{'} \in \Gamma_{j-1}(\boldsymbol{S})。 \\ & \text{'}\bar{H}_1\text{'}, \text{'}\bar{H}_2\text{'} \in \Gamma_j(\boldsymbol{S})\ ) \end{aligned}$$

$$C(G) = \overline{H_1(\boldsymbol{C}) \cap H_2(\boldsymbol{C})}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} C(G) &= C(\bar{F}) = C(\overline{H_1 \cap H_2}) \\ &= \overline{H_1(\boldsymbol{C}) \cap H_2(\boldsymbol{C})} \\ &= \bar{F}(\boldsymbol{C}) = G(\boldsymbol{C}) \end{aligned}$$

(ii)　'F' = '$H_1 \cup H_2$' のとき

$$G = \bar{F} = \overline{H_1 \cup H_2} = \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2$$

$$\begin{aligned} C(G) &= \bigcup_{E\in K}\{E|G\cap E = E\} \\ &= \bigcup_{E\in K}\{E|\overline{H_1\cup H_2}\cap E = E\} \\ &= \bigcup_{E\in K}\{E|(\bar{H}_1\cap\bar{H}_2)\cap E = E\} \\ &= \bigcup_{E\in K}\{E|(\bar{H}_1\cap E)\cap(\bar{H}_2\cap E) = E\} \end{aligned}$$

$\bar{H}_1\cap E$，$\bar{H}_2\cap E$ はそれぞれ E か ϕ であるから，$(\bar{H}_1\cap E)\cap(\bar{H}_2\cap E)$ が E となるのは，$\bar{H}_1\cap E = E$ でかつ $\bar{H}_2\cap E = E$ のときである。よって

$$\begin{aligned} C(G) &= \bigcup_{E\in K}\{E|\bar{H}_1\cap E = E,\ \bar{H}_2\cap E = E\} \\ &= (\bigcup_{E\in K}\{E|\bar{H}_1\cap E = E\})\cap(\bigcup_{E\in K}\{E|\bar{H}_2\cap E = E\}) \\ &= C(\bar{H}_1)\cap C(\bar{H}_2) = \bar{H}_1(\boldsymbol{C})\cap\bar{H}_2(\boldsymbol{C}) \\ &= \overline{H_1(\boldsymbol{C})\cup H_2(\boldsymbol{C})} = \overline{F(\boldsymbol{C})} = G(\boldsymbol{C}) \end{aligned}$$

(iii)　'F' = '$\bar{H}$' のとき

このとき $G = \bar{F} = \bar{\bar{H}} = H$，'$G$'$\in\Gamma_{j+1}$ であるから

$$'H'\in\Gamma_{j-1}$$

したがって

$$\begin{aligned} C(G) &= \bigcup_{E\in K}\{E|G\cap E = E\} \\ &= \bigcup_{E\in K}\{E|H\cap E = E\} \\ &= C(H) = H(\boldsymbol{C}) \\ &= \bar{\bar{H}}(\boldsymbol{C}) = G(\boldsymbol{C}) \end{aligned}$$

(iv)　とくに 'F' = S_t　(t = 1, 2, ……, n)　のとき

このとき

$$G = \bar{F} = \bar{S}_t$$

証明すべきことは

$$C(\bar{S}_t) = \overline{C(S_t)} \qquad (t = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

である。

$$\begin{aligned} C(\bar{S}_t) &= \bigcup_{E \in K} \{E | \bar{S}_t \cap E = E\} \\ &= \bigcup_{E \in K} \{E | S_t^0 \cap E = E\} \end{aligned}$$

ここで

$$S_t^0 \cap E = S_t^0 \cap (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_t^{x(t)} \cap \cdots\cdots S_n^{x(n)})$$

もし $x_{(t)} = 1$ であれば

$$S_t^0 \cap E = \phi \neq E \quad (E \in K)$$

であるから，$S_t^0 \cap E = E$ なるとき

$$x_{(t)} = 0$$

逆に $x_{(t)} = 0$ であれば $S_t^0 \cap E = E$ である。

したがって

$$S_t^0 \cap E = E \Leftrightarrow x_{(t)} = 0$$

また $\overline{C(S_t)}$ についても同様に

$$C(S_t) = \bigcup_{E \in K} \{E | S_t \cap E = E\}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overline{C(S_t)} &= \bigcup_{E \in K} \{E | S_t \cap E \neq E\} \\ &= \bigcup_{E \in K} \{E | S_t \cap E = \phi\} \end{aligned}$$

ここで

$$S_t \cap E = S_t \cap (S_1^{x(1)} \cap S_2^{x(2)} \cap \cdots\cdots \cap S_t^{x(t)} \cap \cdots\cdots S_n^{x(n)})$$

もし $x_{(t)}=1$ であれば

$$S_t \cap E = E \neq \phi \quad (E \epsilon K)$$

となるから，$S_t \cap E = \phi$ なるとき

$$x_{(t)} = 0$$

また逆に $x_{(t)}=0$ であれば $S_t \cap E = \phi$
したがって

$$S_t \cap E = \phi \Leftrightarrow x_{(t)} = 0$$

以上をまとめて

$$S_t^0 \cap E = E \Leftrightarrow x_{(t)} = 0 \Leftrightarrow S_t \cap E = \phi$$

よって

$$\bigcup_{E\epsilon K}\{E | S_t^0 \cap E = E\} = \bigcup_{E\epsilon K}\{E | S_t \cap E = \phi\}$$

したがって

$$C(\bar{S}_t) = \overline{C(S_t)}$$

こうして，任意の ‘$F(S_i)$’$\epsilon \Gamma(S)$ に対して

$$C(F(S_i)) = F(C_i)$$

〔性質9〕

任意の ‘$F(S_i)$’，‘$G(S_j)$’$\epsilon \Gamma(S)$ に対して

(1) (a) $F(S_i)=\phi \Leftrightarrow F(C_i)=\phi$

(b) $F(S_i)\neq\phi \Leftrightarrow F(C_i)\neq\phi$

(2) (a) $F(S_i)\subset G(S_j) \Leftrightarrow F(C_i)\subset G(C_j)$

(b) $F(S_i)\subseteqq G(S_j) \Leftrightarrow F(C_i)\subseteqq G(C_j)$

(c) $F(S_i)=G(S_j) \Leftrightarrow F(C_i)=G(C_j)$

(d) $F(S_i)\neq G(S_j) \Leftrightarrow F(C_i)\neq G(C_j)$

ただし

$$G(C_j)=G(C(S_{j(1)}),C(S_{j(2)}),\cdots\cdots,C(S_{j(l)}))$$

(証明)

(1) (a) (b)

性質7によって

$$F(S_i)=\phi \Leftrightarrow C(F(S_i))=\phi$$
$$F(S_i)\neq\phi \Leftrightarrow C(F(S_i))\neq\phi$$

また，性質8によって

$$C(F(S_i))=F(C_i)$$

よって証明された。

(2) (a)

$$F(S_i)\subset G(S_j) \Leftrightarrow F(S_i)\cap\bar{G}(S_j)=\phi \text{ でかつ}$$
$$\bar{F}(S_i)\cap G(S_j)\neq\phi$$

ここで

$$F(S_i)\cap\bar{G}(S_j)=\phi \Leftrightarrow F(C_i)\cap\bar{G}(C_j)=\phi$$
$$\bar{F}(S_i)\cap G(S_j)\neq\phi \Leftrightarrow \bar{F}(C_i)\cap G(C_j)\neq\phi$$

ゆえに

$$F(\boldsymbol{S}_i) \subset G(\boldsymbol{S}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{C}_i) \subset G(\boldsymbol{C}_j)$$

(b)　(a)の証明より明らか。

(c)

$$F(\boldsymbol{S}_i) = G(\boldsymbol{S}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{S}_i) \cap \bar{G}(\boldsymbol{S}_j) = \phi \text{ でかつ } \bar{F}(\boldsymbol{S}_i) \cap G(\boldsymbol{S}_j) = \phi$$

ここで

$$F(\boldsymbol{S}_i) \cap \bar{G}(\boldsymbol{S}_j) = \phi \Leftrightarrow F(\boldsymbol{C}_i) \cap \bar{G}(\boldsymbol{C}_j) = \phi$$
$$\bar{F}(\boldsymbol{S}_i) \cap G(\boldsymbol{S}_j) = \phi \Leftrightarrow \bar{F}(\boldsymbol{C}_i) \cap G(\boldsymbol{C}_j) = \phi$$

上の２つの関係の右の式は

$$F(\boldsymbol{C}_i) = G(\boldsymbol{C}_j)$$

を意味するから

$$F(\boldsymbol{S}_i) = G(\boldsymbol{S}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{C}_i) = G(\boldsymbol{C}_j)$$

(d)　(c)より明らかである。

3　集合算のベクトル演算への変換

前節において，概念すなわち無限集合に関する演算を有限集合の演算に置換できることについて述べた。ここでは有限集合に関する集合算を２進ベクトルに関する演算として実行することについて述べる。

〔定義10〕

(1)　$x, y \in \{0, 1\}$ に対して

$$x \wedge y \equiv \min\{x, y\}$$
$$x \vee y \equiv \max\{x, y\}$$
$$\bar{x} \equiv 1 - x$$

と定義する。

(2)　$x_i, y_i \in \{0, 1\}$　$(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$

$$\boldsymbol{x} \equiv [x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_m]$$
$$\boldsymbol{y} \equiv [y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_m]$$

に対して

$$\boldsymbol{x} \cap \boldsymbol{y} \equiv [x_1 \wedge y_1,\ x_2 \wedge y_2,\ \cdots\cdots,\ x_m \wedge y_m]$$
$$\boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{y} \equiv [x_1 \vee y_1,\ x_2 \vee y_2,\ \cdots\cdots,\ x_m \vee y_m]$$
$$\bar{\boldsymbol{x}} \equiv [\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots\cdots,\ \bar{x}_m]$$

と定義する。

(3)　m次元零ベクトル（行ベクトル）を以下$\mathbf{0}$で示す。

〔定義11〕

ベクトル間の２項関係をつぎのように定める。$\boldsymbol{x} \equiv [x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_m]$, $\boldsymbol{y} \equiv [y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_m]$，$x_i, y_i \in \{0, 1\}$　$(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ に対して

(1)　$x_i \leqq y_i$　$(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ であって，少なくとも１つの j　$(1 \leqq j \leqq m)$ について，$x_j < y_j$ のとき

$$\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y}$$

(2)　$x_i \leqq y_i$　$(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ のとき

$$\boldsymbol{x} \subseteqq \boldsymbol{y}$$

(3)　$x_i = y_i$　$(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ のとき

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

(4)　少なくとも1つの j（$1 \leqq j \leqq m$）について $x_j \neq y_j$ のとき

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$$

〔性質10〕

定義11の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ および m 次元零ベクトル $\mathbf{0}$ に対して

(1)　$\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} \cap \overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0},\ \overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$

(2)　$\boldsymbol{x} \subseteqq \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} \cap \overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}$

(3)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} \cap \overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0},\ \overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$

(4)　$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} \cap \overline{\boldsymbol{y}} \neq \mathbf{0}$ または $\overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$

（証明）

(1)　$\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y}$ であれば，任意の i（$i = 1, 2, \cdots\cdots, m$）について

$$x_i \leqq y_i$$

である。$x_i \wedge \overline{y_i}$ について考えると，$x_i = 0$ であれば，明らかに $x_i \wedge \overline{y_i} = 0$ また $x_i = 1$ であれば $x_i \leqq y_i$ によって $y_i = 1$ 。したがって $x_i \wedge \overline{y_i} = 0$。

$$\therefore \quad \overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y}$ のときは，さらに少なくとも1つの j（$1 \leqq j \leqq m$）について $x_j < y_j$ であるが，$x_j, y_j \in \{0, 1\}$ であることから

$$x_j = 0\ ,\ \ y_j = 1$$

したがって

$$\overline{x_j} \wedge y_j = 1 \neq 0\ 。$$

ゆえに

$$\overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$$

逆に $\boldsymbol{x} \cap \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ であれば，任意の i（$i = 1, 2, \cdots\cdots, m$）について

$$x_i \wedge \bar{y}_i = 0$$

この式が成立するのは $x_i = 0$ のときか，または $\overline{y_i} = 0$ のときである。

$x_i = 0$ のときは y_i の値にかかわらず

$$x_i \leqq y_i$$

$\overline{y_i} = 0$ のときは $y_i = 1$ で，x_i の値にかかわらず

$$x_i \leqq y_i$$

ゆえに任意の i について $x_i \leqq y_i$ 。

また $\overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ であるから，$\overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y}$ の要素には少なくとも 1 つは 0 でない要素すなわち 1 が存在する。それを j 番目の要素（$1 \leqq j \leqq m$）とすれば，

$$\overline{x_j} \wedge y_j = 1$$

したがって，この式が成立するのは，$x_j = 0$ ，$y_j = 1$ のときである。明らかに $x_j < y_j$ である。

ゆえに，このとき

$$\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y}$$

(2) (1)の証明より明らかである。

(3) 任意の i（$i = 1, 2, \cdots\cdots, m$）について $x_i = y_i$ であるから

$$x_i \wedge \overline{y_i} = x_i \wedge \overline{x_i} = 0$$
$$\overline{x_i} \wedge y_i = \overline{y_i} \wedge y_i = 0$$

ゆえに

$$\boldsymbol{x} \cap \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0},\ \overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

逆に $\boldsymbol{x}\cap\overline{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{0}$, $\overline{\boldsymbol{x}}\cap\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$であれば，任意の i ($i=1,2,\cdots\cdots,m$) について

$$x_i\wedge\overline{y_i}=0\ ,\ \overline{x_i}\wedge y_i=0$$

もし $x_i=1$ であれば第1式より $y_i=1$ 。また $x_i=0$ であれば，第2式より $y_i=0$ 。したがって，つねに $x_i=y_i$。

$$\therefore\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$$

(4) 少なくとも1つの j ($1\leqq j\leqq m$)について $x_j\neq y_j$ であるから,このとき $x_j=0$ で $y_j=1$ であるか，または $x_j=1$ で $y_j=0$ のいずれかである。前者の場合は $\overline{x_j}\wedge y_j=1$ であって，$\overline{\boldsymbol{x}}\cap\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$となり，後者の場合は $x_j\wedge\overline{y_j}=1$ であって $\boldsymbol{x}\cap\overline{\boldsymbol{y}}\neq\boldsymbol{0}$となる。

逆に，$\boldsymbol{x}\cap\overline{\boldsymbol{y}}\neq\boldsymbol{0}$であれば少なくとも1つの j ($1\leqq j\leqq m$)について，$x_j\wedge\overline{y_j}=1$ 。したがって $x_j\neq y_j$。$\overline{\boldsymbol{x}}\cap\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$のときも同様。

ゆえに

$$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$$

〔定義12〕

(1) m個の要素からなる集合 $D=\{E_1,\ E_2,\ \cdots\cdots,\ E_m\}$の部分集合を $D_1,D_2,\ \cdots\cdots,\ D_n$ で示す。

(2) 'D_1', 'D_2', ……, 'D_n' から$\cap$, $\cup$, $^-$ を用いて定義7と同様にして構成される式 '$F(D_{i(1)},D_{i(2)},\cdots\cdots,D_{i(k)})$' の集合を $\Gamma(\boldsymbol{D})$で示す。以下 '$F(D_{i(1)},D_{i(2)},\cdots\cdots,D_{i(k)})$' を '$F(\boldsymbol{D}_i)$' で，同様に $\Gamma(\boldsymbol{D})$ の要素 '$G(D_{j(1)},D_{j(2)},\cdots\cdots,D_{j(l)})$' を$G(\boldsymbol{D}_j)$ で示す。

(3) '$F(\boldsymbol{D}_i)$' 中の $\cap$, $\cup$, $^-$ の個数の合計を op('$F(\boldsymbol{D}_i)$') で表わし，さらに op('$F(\boldsymbol{D}_i)$') $\leqq j$ なる '$F(\boldsymbol{D}_i)$'$\in\Gamma(\boldsymbol{D})$ の集合を $\Gamma_j(\boldsymbol{D})$ で示す。

〔性質11〕

任意の '$F(\boldsymbol{D}_i)$'$\in\Gamma(\boldsymbol{D})$ に対して

$$F(\boldsymbol{D}_i) \subseteqq D$$

（証明）

性質４によって明らかである。

〔定義 13〕

任意の‘$F(\boldsymbol{D}_i)$’$\epsilon\Gamma(\boldsymbol{D})$ に対して，m次元ベクトル $v(F(\boldsymbol{D}_i))$をつぎのように定める。

$$v(F(\boldsymbol{D}_i)) = [f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots,\ f_m]$$

ここに

$$f_u = \begin{cases} 0 \cdots\cdots E_u \notin F(\boldsymbol{D}_i) \text{ のとき} \\ 1 \cdots\cdots E_u \epsilon F(\boldsymbol{D}_i) \text{ のとき} \end{cases}$$
$$(u = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

〔性質 12〕

‘$F(\boldsymbol{D}_i)$’$\epsilon\Gamma(\boldsymbol{D})$ に対して，

(1)　$F(\boldsymbol{D}_i) = \phi \Leftrightarrow v(F(\boldsymbol{D}_i)) = \boldsymbol{0}$

(2)　$F(\boldsymbol{D}_i) \neq \phi \Leftrightarrow v(F(\boldsymbol{D}_i)) \neq \boldsymbol{0}$

（証明）

$v(F(\boldsymbol{D}_i))$ の定義から明らかである。

〔性質 13〕

‘$F(\boldsymbol{D}_i)$’$\epsilon\Gamma(\boldsymbol{D})$ に対して，

$$v(F(\boldsymbol{D}_i)) = F(\boldsymbol{v}_i)$$

ただし，$F(\boldsymbol{v}_i)$ は $F(v(D_{i(1)}), v(D_{i(2)}), \cdots\cdots, v(D_{i(k)}))$ を示す（以下同じ）。

（証明）

‘$F(\boldsymbol{D}_i)$’中の $\cap$, $\cup$, $^{-}$ の個数の合計 op(‘$F(\boldsymbol{D}_i)$’) $= r$ に関して帰納法

を用いる。以下の証明中において，‘$F(\boldsymbol{D}_i)$’を‘F’と，$F(\boldsymbol{v}_i)$ を $F(\boldsymbol{v})$ と略記する。‘G’,‘H’$\epsilon\ \Gamma(\boldsymbol{D})$ についても同様。したがって，たとえば $v(F)$ は $v(F(\boldsymbol{D}_i))$ を示す。

(1)　$r=0$ のとき

$$‘F’=‘D_p’\ (p=1,2,\cdots\cdots,n)$$

このときは

$$v(F)=v(D_p)$$
$$F(\boldsymbol{v})=F(v(D_p))=v(D_p)$$

となり，明らかに成立する。

(2)　$r \leqq t$　$(t=1,2,3,\cdots\cdots)$　のとき，与式が成立するとする。すなわち，任意の‘F’$\epsilon\Gamma_t(\boldsymbol{D})$ に対して

$$v(F)=F(\boldsymbol{v})$$

ここで，‘G’$\epsilon\Gamma_{t+1}(\boldsymbol{D})-\Gamma_t(\boldsymbol{D})$’について考えると，$F(\boldsymbol{D})$ に関する定義12の構成法によって，‘G’は

$$‘G’=‘F\cap H’$$
$$‘G’=‘F\cup H’$$
$$‘G’=‘\overline{F}’$$

のいずれかで表わされる。ただし，$op(‘F’)\leqq t$，$op(‘H’)\leqq t$，すなわち‘F’，‘H’$\epsilon\Gamma_t(D)$，$op(‘G’)=t+1$ 。

(a)　‘G’＝‘$F\cap H$’のとき

$F\cap H \subseteqq D$ であるから，

$$v(F\cap H)=[g_1,\ g_2,\ \cdots\cdots,\ g_m]$$

とおくと，g_uは定義13により

$$g_u = \begin{cases} 0 \cdots\cdots E_u \notin F \cap H \\ 1 \cdots\cdots E_u \in F \cap H \end{cases}$$
$$(u = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

また

$$v(F) = [f_1, \ f_2, \ \cdots\cdots, \ f_m]$$
$$v(H) = [h_1, h_2, \ \cdots\cdots, \ h_m]$$

とおけば，証明すべきことは

$$v(F \cap H) = v(F) \cap v(H)$$

すなわち

$$g_u = f_u \wedge h_u \quad (u = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

である。

（i） $g_u = 1$ であるのは，E_u が $F \cap H$ に属するとき，すなわち F に属し，かつ同時に H にも属するときである。

したがって

$$f_u = 1 \ , \ \ h_u = 1$$

であって，このとき

$$f_u \wedge h_u = 1$$

逆に $f_u \wedge h_u = 1$ であれば，$f_u = 1$ ，$h_u = 1$ であるから，E_u は F に属し，かつ H にも属する。

$$\therefore \quad g_u = 1$$

（ii） $g_u = 0$ であるのは，つぎの(イ)(ロ)(ハ)のいずれかの場合である。

(イ)　E_u が F に属していて，H には属さないとき

このときは $f_u=1$，$h_u=0$ であって

$$f_u \wedge h_u = 0$$

(ロ)　E_u が F には属さないが，H には属するとき

このときは $f_u=0$，$h_u=1$ であって

$$f_u \wedge h_u = 0$$

(ハ)　E_u が F にも属さず，H にも属さないとき

このときは $f_u=0$，$h_u=0$ であって

$$f_u \wedge h_u = 0$$

こうして $g_u = f_u \wedge h_u$ は成立する。

逆に，$f_u \wedge h_u = 0$ であるのは

(イ)′　$f_u=1$　$h_u=0$

(ロ)′　$f_u=0$　$h_u=1$

(ハ)′　$f_u=0$　$h_u=0$

のいずれかであって，これらの場合には，いずれの場合にも，E_u は $F \cap H$ には属さない。たとえば(イ)′ の場合には，E_u は F には属するが，H には属さない。このとき $g_u=0$。

$$\therefore \quad g_u = f_u \wedge h_u$$

したがって

$$v(F \cap H) = v(F) \cap v(H) = F(\boldsymbol{v}) \cap H(\boldsymbol{v})$$
$$\therefore \quad v(G) = G(\boldsymbol{v})$$

(b)　‘G’ = ‘$F \cup H$’ のとき

このときも(a)と同様にして

$$v(F \cup H) = v(F) \cup v(H) = F(\boldsymbol{v}) \cup H(\boldsymbol{v})$$
$$\therefore \quad v(G) = G(\boldsymbol{v})$$

(c)　'G' = '$\bar{F}$'のとき

$\bar{F} \subseteqq D$ であるから，$v(\bar{F}) = [g_1,\ g_2,\ \cdots\cdots,\ g_m]$ とおく。g_uは定義13により，

$$g_u = \begin{cases} 0 \cdots\cdots E_u \notin \bar{F} \text{ のとき} \\ 1 \cdots\cdots E_u \in \bar{F} \text{ のとき} \end{cases}$$
$$(u = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

(i)　$g_u = 1$ であるのは，E_u が $\bar{F}$ に属するとき，すなわち F に属さないときである。したがって

$$v(F) = [f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots,\ f_m]$$

とおくとき

$$f_u = 0$$

である。このとき

$$g_u = \bar{f}_u$$

逆に $f_u = 0$ であれば，$E_u \in D$ は F に属さず，したがって $\bar{F}$ に属するから

$$g_u = 1$$

となり，$g_u = \bar{f}_u$ は成立する。

(ii)　$g_u = 0$ であるのは，E_u が $\bar{F}$ に属さないとき，すなわち F に属するときである。したがって

$$f_u = 1$$

このとき

$$g_u = \overline{f_u}$$

逆に $\overline{f_u} = 0$ であれば，$f_u = 1$ であるから，E_u は F に属する。したがって $\overline{F}$ には属さないので，$g_u = 0$ となり，

$$g_u = \overline{f_u}$$

こうして

$$v(\overline{F}) = \bar{v}(F) = \overline{F}(\boldsymbol{v}) \quad (\because \quad `F\,' \in \Gamma_t(\boldsymbol{D}))$$
$$\therefore \quad v(G) = G(\boldsymbol{v})$$

〔性質 14〕

任意の‘$F(\boldsymbol{D}_i)$’，‘$G(\boldsymbol{D}_j)$’$\in \Gamma(\boldsymbol{D})$ に対して

(1)　(a)　$F(\boldsymbol{D}_i) = \phi \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{0}$

　　(b)　$F(\boldsymbol{D}_i) \neq \phi \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \neq \boldsymbol{0}$

(2)　(a)　$F(\boldsymbol{D}_i) \subset G(\boldsymbol{D}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \subset G(\boldsymbol{v}_j)$

　　(b)　$F(\boldsymbol{D}_i) \subseteqq G(\boldsymbol{D}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \subseteqq G(\boldsymbol{v}_j)$

　　(c)　$F(\boldsymbol{D}_i) = G(\boldsymbol{D}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) = G(\boldsymbol{v}_j)$

　　(d)　$F(\boldsymbol{D}_i) \neq G(\boldsymbol{D}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \neq G(\boldsymbol{v}_j)$

ただし，$G(\boldsymbol{v}_j)$ は

$$G(\ v(D_{j(1)}), v(D_{j(2)}), \cdots\cdots, v(D_{j(l)})\ )$$

を表わす（以下同じ）。

（証明）

(1)　性質 12 によって

$$F(\boldsymbol{D}_i) = \phi \ \Leftrightarrow \ v(F(\boldsymbol{D}_i)) = \boldsymbol{0}$$

$$F(\boldsymbol{D}_i) \neq \phi \Leftrightarrow v(F(\boldsymbol{D}_i)) \neq \mathbf{0}$$

である。また性質 13 によって

$$v(F(\boldsymbol{D}_i)) = F(\boldsymbol{v}_i)$$

である。したがって

$$F(\boldsymbol{D}_i) = \phi \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0}$$
$$F(\boldsymbol{D}_i) \neq \phi \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \neq \mathbf{0}$$

(2)　(a)　性質 1 によって

$$F(\boldsymbol{D}_i) \subset G(\boldsymbol{D}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{D}_i) \cap \overline{G}(\boldsymbol{D}_j) = \phi,\ \overline{F}(\boldsymbol{D}_i) \cap G(\boldsymbol{D}_j) \neq \phi$$

上記(1)によって

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{D}_i) \cap \overline{G}(\boldsymbol{D}_j) = \phi \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \cap \overline{G}(\boldsymbol{v}_j) = \mathbf{0} \\ \overline{F}(\boldsymbol{D}_i) \cap G(\boldsymbol{D}_j) \neq \phi \Leftrightarrow \overline{F}(\boldsymbol{v}_i) \cap G(\boldsymbol{v}_j) \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

一方性質 10 によれば

$$\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \cap \overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0},\ \overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$$

であるから

$$F(\boldsymbol{v}_i) \cap \overline{G}(\boldsymbol{v}_j) = \mathbf{0},\ \overline{F}(\boldsymbol{v}_i) \cap G(\boldsymbol{v}_j) \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \subset G(\boldsymbol{v}_j)$$
$$\therefore\quad F(\boldsymbol{D}_i) \subset G(\boldsymbol{D}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \subset G(\boldsymbol{v}_j)$$

(b)　(a)の証明から明らかである。

(c)　性質 1 によって

$$F(\boldsymbol{D}_i) = G(\boldsymbol{D}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{D}_i) \cap \overline{G}(\boldsymbol{D}_j) = \phi,\ \overline{F}(\boldsymbol{D}_i) \cap G(\boldsymbol{D}_j) = \phi$$

上記(1)によって

$$F(\boldsymbol{D}_i) \cap \overline{G}(\boldsymbol{D}_j) = \phi,\ \overline{F}(\boldsymbol{D}_i) \cap G(\boldsymbol{D}_j) = \phi$$
$$\Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) \cap \overline{G}(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0},\ \overline{F}(\boldsymbol{v}_i) \cap G(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}$$

一方性質10によって

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \cap \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0},\ \overline{\boldsymbol{x}} \cap \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

であるから

$$F(\boldsymbol{v}_i) \cap \overline{G}(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0},\ \overline{F}(\boldsymbol{v}_i) \cap G(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}$$
$$\Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) = G(\boldsymbol{v}_j)$$
$$\therefore\ F(\boldsymbol{D}_i) = G(\boldsymbol{D}_j) \Leftrightarrow F(\boldsymbol{v}_i) = G(\boldsymbol{v}_j)$$

(d)　(c)より明らかである。

〔定義14〕

'$F(\boldsymbol{S}_i)$' = '$F(S_{i(1)}, S_{i(2)}, \cdots\cdots, S_{i(k)})$' $\in \Gamma(\boldsymbol{S})$ に対して

$$F(vC \cdot \boldsymbol{S}_i) = F(vC \cdot S_{i(1)},\ vC \cdot S_{i(2)}, \cdots\cdots, vC \cdot S_{i(k)})$$

ここに

$$vC \cdot S_j = v(C(S_j)) \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

'$G(\boldsymbol{S}_j)$' $\in \Gamma(\boldsymbol{S})$ に対しても同様に定める。

〔性質15〕

任意の'$F(\boldsymbol{S}_i)$', '$G(\boldsymbol{S}_j)$' $\in \Gamma(\boldsymbol{S})$ に対して

(1)　(a)　$F(\boldsymbol{S}_i) = \phi \Leftrightarrow F(vC \cdot \boldsymbol{S}_i) = \boldsymbol{0}$

　　(b)　$F(\boldsymbol{S}_i) \neq \phi \Leftrightarrow F(vC \cdot \boldsymbol{S}_i) \neq \boldsymbol{0}$

(2)　(a)　$F(\boldsymbol{S}_i) \subset G(\boldsymbol{S}_j) \Leftrightarrow F(vC \cdot \boldsymbol{S}_i) \subset G(vC \cdot \boldsymbol{S}_j)$

　　(b)　$F(\boldsymbol{S}_i) \subseteqq G(\boldsymbol{S}_j) \Leftrightarrow F(vC \cdot \boldsymbol{S}_i) \subseteqq G(vC \cdot \boldsymbol{S}_j)$

　　(c)　$F(\boldsymbol{S}_i) = G(\boldsymbol{S}_j) \Leftrightarrow F(vC \cdot \boldsymbol{S}_i) = G(vC \cdot \boldsymbol{S}_j)$

　　(d)　$F(\boldsymbol{S}_i) \neq G(\boldsymbol{S}_j) \Leftrightarrow F(vC \cdot \boldsymbol{S}_i) \neq G(vC \cdot \boldsymbol{S}_j)$

（証明）

性質9および性質14によって明らかである。すなわち性質14のD_1，D_2，……，D_nとして性質9の$C(S_1)$，$C(S_2)$，……，$C(S_n)$（定義9参照）をとり，Dに対して基本積の集合Kを対応させればよい。

4　応用例

性質15によって，概念すなわち無限集合に関する演算をベクトル間の演算として実行することの妥当性が示されたわけである。無限集合に関する集合算の結果が空であるかどうかを判定するには，それに対応する結果のベクトルが零ベクトルであるかどうかを調べればよい。この性質15を示すことが本論文の目的の1つであった。

本論文で示したいくつかの性質が，実際の問題に対してどのように関係してくるかを見るために，筆者が現在試みている数学の定理の検索，具体的には行列論の定理の検索を例にとって説明したい。

そのために，まず与えられた概念をベクトル表示し，ついで表示行列なるものを導入する。与えられた概念S_1，S_2，……，S_nを表示するベクトルを求めるには，それらn個の間の基本積をつくり，その中で空でない基本積の集合を考え，その集合の部分集合として，概念を定義13のようにベクトル表示すれば原理的には求められる。

この概念S_1，S_2，……，S_nに対応するベクトルを並べたものを表示行列とよぶ。以下に表示行列の例を示す。いま，Sとして複素正方行列をとり，それの部分集合として図3に示すような5個の行列を考える。表示行列がこれらの行列の間の包含関係を示していることは，ベン図表を参照すれば明らかである。

S　：　複素正方行列　　S_3　：　スカラ行列

S_1　：　対称行列　　S_4　：　単位行列

S_2 ： 対角行列　　　S_5 ： 実正方行列

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{array} \\
\begin{array}{c} vC\cdot S_1 \\ vC\cdot S_2 \\ vC\cdot S_3 \\ vC\cdot S_4 \\ vC\cdot S_5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

表示行列

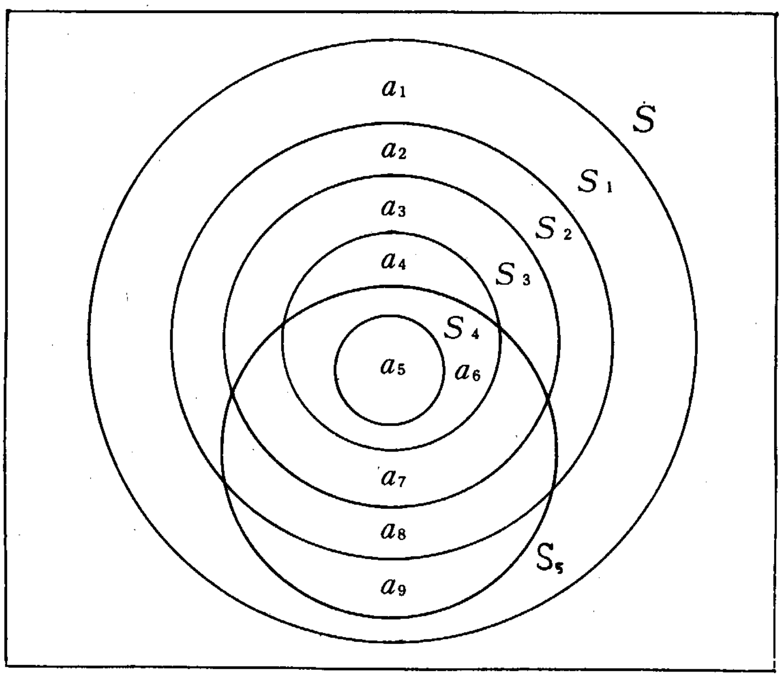

図3

表示行列が得られると，これを使って種々の操作が可能になることは，すでにまえがきにおいて述べたとおりである。ここでは簡単な例として

$$S_1 \cap \overline{S}_2 \cap S_5$$

なる領域（複合概念）が存在するかどうか，すなわち空かどうかを判定してみる。性質 15 によれば

$$F(S_i) \neq \phi \Leftrightarrow F(vC\cdot S_i) \neq \mathbf{0}$$

であるから

$$(vC\cdot S_1)\cap(\overline{vC\cdot S_2})\cap(vC\cdot S_5)$$

を計算して，それが零ベクトルになるかどうかを調べる。表示行列によれば

$$\begin{aligned} vC\cdot S_1 &= [\,0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\,] \\ vC\cdot S_2 &= [\,0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,] \\ \overline{vC\cdot S_2} &= [\,1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\,] \\ vC\cdot S_5 &= [\,0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,] \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} &(vC\cdot S_1)\cap(\overline{vC\cdot S_2})\cap(vC\cdot S_5) \\ &= [\,0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\,] \end{aligned}$$

であって，零ベクトルではない。ゆえに $S_1\cap\overline{S_2}\cap S_5$ は存在する。実際，対称行列 (S_1) であって，対角行列 (S_2) でない実正方行列 (S_5) は存在し，容易にその例を挙げることができる。

存在性の判定は種々の判定の基礎となるものである。たとえば関係式 $F\subset G$ (‘F’,‘G’$\epsilon\Gamma(S)$) が成立するかどうかを調べたいときは，$F\cap\overline{G}$ および $\overline{F}\cap G$ がそれぞれ空かどうかを調べればよい。$F\cap\overline{G}=\phi$, $\overline{F}\cap G\neq\phi$ であれば，$F\subset G$ である。そうでなければ $F\subset G$ とはいえない。なお関係式が成立するかどうかは性質 15 の (2) を用いて，ベクトル間の関係として直接判定してもよい。

数学の定理は $F\subset G$ または $F\subseteqq G$ のような形に表現できることが多い。たとえば行列論において

「$A^p=O$ なる自然数 p があれば，A は正則ではない」

という性質があるが，これはつぎのように表現できる。

$S_1 = \{$適当な自然数 p に対して $A^p = O$ なる正方行列 $A\}$
$S_2 = \{$正則でない正方行列$\}$

S_1 は通常冪零行列，S_2 は特異行列とよばれている。このとき上の性質は

$$S_1 \subseteqq S_2$$

と表現できる。すなわち

「冪零行列ならば特異行列」

であるということになる。

このように数学の定理の中には，２項関係の情報，すなわち結局は存在性の情報を示す定理であると解釈できるものが多い。

通常の自然語では，多くの場合概念の定義を明確に与えることは困難であるが，数学上の概念であれば，定義を厳格に与えることができる。またその定義を形式的に与えれば，それらの概念間の包含関係を自動的に決定することも，ある程度可能であって，概念に関する基礎的研究を行なう上で都合がよい。

定義の形式的表現の例を挙げるとつぎのとおりである。

ユニタリ行列	$\{U \mid U^* = U^{-1}\}$
直交行列	$\{A \mid A' = A^{-1}\}$
実正方行列	$\{A \mid A = \bar{A}\}$
反エルミット行列	$\{X \mid X^* = -X\}$
実直交行列	$\{A \mid A' = A^{-1},\ A = \bar{A}\}$
正規行列	$\{A \mid AA^* = A^*A\}$
エルミット行列	$\{H \mid H^* = H\}$
射影行列	$\{P \mid P^2 = P,\ P^* = P\}$
対称行列	$\{A \mid A = A'\}$
正則行列	$\{A \mid \det(A) \neq 0\}$

冪等行列　$\{A|A^2=A\}$

以上は複素正方行列の中で定義されるものをいくつか列挙したもので，これらはいずれも簡単な定義のものばかりである。このような定義のもとで

射影行列 $\subsetneqq$ エルミット行列

射影行列 $\subsetneqq$ 冪等行列

などの包含関係を自動的に判定することは容易である。さらには

エルミット行列 $\subsetneqq$ 正規行列

などの関係も判定可能であろう。

このような概念間の包含関係を自動的に判定することは興味あることであり，このためには上のような概念の形式的定義を与える必要があるが，まだ検討すべき問題も多く，今後の問題としたい。またこの定義の集合は概念の定義の辞書と見ることができるから，辞書の機械的処理と関連している。この場合には，自然語の辞書で機械処理の壁となる意味の問題を，かなりうまくとらえることができる。すなわち行列の集合の上で概念を論ずるときは，意味とはその部分集合そのものと考えれば，同義語，同形異義語，関連語の問題を簡単に処理できる。なお，概念間の包含関係を自動的に判定することは，定理の自動証明とも関連しており，その点からも興味深い。

5　まとめ

本論文のおもな主張はつぎのとおりである。

(1)　概念に関する処理を無限集合の演算として考えた。

(2)　無限集合に関する演算を有限集合の演算におきかえることの根拠を示した。

(3)　有限集合の演算をベクトル演算として実行することの正当性を示した。

(4)　概念間の包含関係を示す表示行列は種々の利用が可能であることを論じた。

(5)　概念の形式的定義について述べた。

前半においては，直観的にはほぼ自明とおもわれることを，表示行列の基礎を明確にするために論じた。

なお，ここでの議論は最初に与えられる情報が完全である場合，すなわちすべての基本積に関する存在性の情報が明確に与えられる場合についておこなっているものであって，情報が完全でない場合，すなわちあいまいさのある場合については議論していない。実際の場合には，後者のあいまいさのある場合の方が重要であって，そのとき構成される表示行列の基本的性質を明確にすることは，表示行列の正当性を保証する上で重要である。これについては別の機会に述べる。

また，情報が完全でない場合の例として，２項関係の情報のみが与えられる場合が考えられるが，この場合の表示行列の構成方法については文献〔４〕において述べている。

文　献

〔１〕須藤：“論理学綱要”，内田老鶴圃新社，昭49。

〔２〕上田：“論理学”，創文社，昭42。

〔３〕栗原，吉田，鶴丸：“概念構成に関する一考察”，九大工学集報第43巻第３号，p.338–p.343（昭和45年６月）。

〔４〕橋本，福村：“二項関係による概念の分割”，電子通信学会オートマトンと言語研究会資料AL72–135（1973. 3）。

〔５〕Salton, G.：“*Automatic Information Organization and Retrieval*”，McGraw-Hill, 1968。

〔６〕Laus, K., Dabrowski, M.：“A Model of Information Retrieval Process for Hierarchical Set of Descriptors”, *Inform. Stor. Retr.* Vol. 10, pp.261-265（1974）。