生産関数：展望

木　藤　正　典

1．はしがき

生産関数が，経済分析の勝れた道具として位置づけられたのは，1928年のC. W. Cobb と P. H. Douglas との共同論文〔17〕によってである。その後Douglas 等によって多くの測定が行われ，Cobb-Douglas 生産関数（以後 CD生産関数と略記する）の有用性は確固となったのである。しかし理論的研究が進むにつれて，CD 生産関数の不充分性が問題となり，1961年の Arrow, Chenery, Minhas, Solow の四人(以後 ACMS と略称する)の共同論文〔4〕によって CES 生産関数が提案されることとなる。それ以後現在に到るまでには，生産関数に関する数多くの論文が発表されている。

生産関数は生産構造の分析，技術進歩の研究，分配論の研究等において重要な役割を果たすのであるが，Douglas 以来35年以上の月日が経過している現在も，未だに満足すべき決定的な生産関数は発見されていない。CES 生産関数も，代替弾力性が一定であること，或は規模弾力性が一定であることは，理論的には１つの非現実的制限であって，その点をめぐる議論には未だに到達点は見出されていないのである。その意味で，Douglas 以来の生産関数論の進展の歩みを反省することも，将来の発展のために無意味ではないであろう。

生産関数に関する展望論文については，Nerlove (1967,〔701〕), Walters (1963,〔102〕), Solow (1967,〔96〕), 辻村・渡辺をはじめとしていくつかの勝れた論文が発表されている。Walters の論文はＣＤ生産関数に関するもので

あり，Solow のは CES 生産関数以後の技術進歩に関するものであり，辻村・渡辺両氏の論文も技術進歩との関係で考えられている。私は CES 生産関数以後の理論に重点をおきながら生産関数そのものの発展の経過を追って見たいと思う。そのため計量経済学的な問題および工学的生産関数は省略することとし，学習モデル(learning by doing)も省略することとした。

以下2，CD 生産関数，3，CES 生産関数，4，VES 生産関数 (Variable-Elasticity-of-Substitution Production Function)，5，技術進歩と生産関数の順序で述べるのであるが，一般的な記号を次の通りに定めておく。

Y ＝アウトプット，K ＝資本，L ＝労働，t ＝時間

p ＝アウトプット価格，r ＝ 利潤率，w＝賃金率

$y=\dfrac{Y}{L}$，$k=\dfrac{Y}{L}$，$W=Lw$

$\mathrm{R}=\dfrac{dK}{dL}$（限界代替率），$\sigma=-\dfrac{dR}{dk}\dfrac{k}{R}$（代替弾力性）

$\alpha=\dfrac{\partial Y}{\partial L}\dfrac{L}{Y}$，$\beta=\dfrac{\partial Y}{\partial K}\dfrac{K}{Y}$，$m=\alpha+\beta$（規模弾力性）

生産関数（一般）：　$Y=F(K,\ L)$ 又は $F(K,\ L,\ t)$

FA生産関数　：　$Y=F(B(t)K,\ A(t)L)$

CD生産関数　：　$Y=AK^{\beta}L^{\alpha}$，（A，α，β定数）

CES生産関数　：　$Y=\gamma\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$

（γ＝能率パラメーター，

δ＝分配パラメーター，

$\rho=\dfrac{1}{\sigma}-1$＝代替パラメーター）

2．CD生産関数

(1) CD 生産関数の確立

CD 生産関数の輝かしい第1頁は，1928年に発表された C. W. Cobb と P. H. Douglas の共同論文〔17〕に初まる。Douglas は当時生産関係や分配関係の研究に従事していたが，1899-1922年の米国製造工業の固定資本K，労働者数

L，生産数量Y，の対数時系列曲線において，Yの曲線上の点は他の2つの曲線のほぼ1：3の内分点に位する事を発見した。その事実より数学者Cobbによって1次同次生産関数として

$$Y=AL^{\alpha}K^{1-\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

が得られたのである。定数A,αは最小2乗法によって定められ$A=1.01$, $\alpha=0.75$となったのである。そして自由競争前提での限界生産力説の主要定理である「労働限界価値生産力＝賃金率」の成立を確認し，この生産関数の妥当性を示したのである。

その後Douglasはこの生産関数の実測を続けたが，1937年D. Durandの批判により2つの改良が行われた。即ち第1に生産関数を

$$Y=AL^{\alpha}K^{\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

と改めた。第2にはそれまでは時系列データによる測定のみを行っていたが，以後は横断面分析も行うこととなった。前者の改良によって初めて$\alpha+\beta\gtreqless1$の問題，即ちreturns to scaleの問題が提起され，後者からはinter-firm, inter-industry, inter-countryと言う測定方法を生ずるのである。

CD生産関数に関する測定はその後も，Douglasを中心とする人々によって行われたが，その成果は1948年発表のDouglasの論文〔25〕にまとめられている。データは米国，オーストラリヤ，カナダ等の国々の製造工業についての29個の測定値であるが，それらの値は表1の通りである。その結論としては$\alpha+\beta=1$が標準的であり，平均的には$\alpha=0.65$, $\beta=0.35$と考えられている。労働生産弾力性αと労働分配率W/Yとの関係についても表1の示す様に，それらはかなりの一致を示している。この事実より，CD生産関数は生産関数として勝れたものであるとの結論に達している。

表1

データ		α	β	α＋β	W/Y
A．時　系　列		0			
米　国　Ⅰ	1889〜1922	0.81	0.23	1.04	
〃　Ⅱ	〃　〃	0.78	0.15	0.93	
〃　Ⅲ	〃　〃	0.73	0.25	0.98	
〃　Ⅳ	〃　〃	0.63	0.30	0.93	
ビクトリヤ	1907〜29	0.84	0.23	1.07	
ニューサウスウエールズ	1901〜27	0.78	0.20	0.98	
ニュージランド	1915〜16	0.42	0.49	0.91	0.52
B．横　断　面					
米　国	1889	0.51	0.43	0.94	0.60
〃	1899	0.62	0.33	0.95	0.58
〃	1904	0.65	0.31	0.96	0.64
〃	1906	0.63	0.34	0.97	0.63
〃	1914	0.61	0.37	0.98	0.59
〃	1919	0.76	0.25	1.01	0.59
オーストラリヤ	1912	0.52	0.47	0.99	0.54
〃	1922〜23	0.53	0.49	1.02	0.54
〃	1926〜27	0.59	0.34	0.93	0.57
〃	1934〜35	0.64	0.36	1.00	0.61
〃	1936〜37	0.49	0.49	0.98	0.51
ビクトリヤ	1910〜11	0.74	0.25	0.99	0.64
〃	1923〜24	0.62	0.31	0.93	0.65
〃	1927〜28	0.59	0.27	0.86	0.68
ニューサウスウエールズウエー	1933〜34	0.65	0.34	0.99	0.51
南アフリカ	1937〜38	0.66	0.32	0.98	
〃	〃	0.65	0.37	1.02	
カナダ	1923	0.48	0.48	0.96	0.50
〃	1927	0.46	0.52	0.98	0.48
〃	1935	0.50	0.52	1.02	0.40
〃	1937	0.43	0.58	1.01	0.43
ニュージランド	1938〜39	0.46	0.51	0.97	0.57

(2) CD 生産関数の問題点

CD 生産関数は Douglas によって価値を認められたのであるが, CD 生産関数をめぐって多くの問題が提起された。それは次の様な問題である。

(i) returns to scale の問題

(ii) 3個以上の変数の生産関数

(iii) 時間的或は場所的な構造変化の問題

(iv) 不完全競争の問題

(v) α＝一定　或は σ＝一定の問題

なお(iv)は(i)と関係があるが, この事は 1965 年 Dhrymes〔22〕が取りあげるまでは論ぜられなかったのである。これらの問題のうち, CD 生産関数に特有な問題は(v)のみであって, 他は次に発見される CED 生産関数についても同様に関係あるものである。

(i)については既に Douglas が取組んだ問題であるが, 現在まで議論の続く問題である。(ii)についてはCD生産関数の場合は全く問題とならない問題である。即ち n 個のインプット $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ に対してアウトプットを Y とすれば

$$Y = AX_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots\cdots X_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_i > 0)$$

とおくだけのことである。(v)は CD 生産関数を特徴づける性質であるが, α＝一定は労働分配率＝一定を意味し, 理論的に適合性に疑問を生ずる。また α＝一定は生産要素の代替弾力性＝1を意味し, 技術進歩の解明に不便となる。それが原因となって CES 生産関数が生ずるのである。

(iii)に関しては, CD 生産関数を計測に用いる場合, 同一企業或は産業が時間的に構造変化がないときのみ時系列に適用できるのであり, また横断面分析に適用できるのは, 各企業或は産業がすべて同一の構造をもつときのみである。この問題は(iv)の不完全競争の問題とからみあって Reder (1943, 〔76〕), Bronfenbrenner (1944, 〔10〕), Marschak and Andrews (1944, 〔59〕) 等によって議論されている。ここで論ぜられているのは主として横断面分析に関するものであって, 時系列に関しては次節以後でのべることとする。次

に Marschak and Andrews の論説の概要をのべる。

先ず仮定として自由競争・不完全競争を綜合した前提に立っている。即ち Y, L, K を物理的量とし，V をアウトプットの価値量，W を労働費用，G を利子費用とし

$$Y=AL^{\alpha}K^{\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.\ 3)$$

$$V=cY^{\lambda_0},\ W=dL^{\lambda_1},\ G=eK^{\lambda_2}\ (\lambda_i\leqq 1)\cdots(2.\ 4)$$

と仮定する。ただし $A, c, d, e, \lambda_o, \lambda_1, \lambda_2$ は定数である。以上から

$$V=cA^{\lambda_0}L^{\lambda_0\alpha}K^{\lambda_0\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.\ 5)$$

を得る。これは CD 生産関数の拡張と考えられる。なほ $\lambda_i=1$ $(i=0, 1, 2)$ なら自由競争の場合であって，$c, d, e,$ は Y, L, K の価格を示す。従って $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ は不完全競争を示すパラメーターである。次に企業は

$$\text{利潤}\ \pi=V-W-G \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 6)$$

を最大ならしめる様に行動するものと仮定されている。

さて各企業はもともと同一生産構造をもつべき筈であるが，技術知識・企業者資源等の差異から時間的に或は場所的に差異を生ずるのであると考えられ，それによる差異を１つ或はいくつかの確率変数で表わすこととする。従って (2・3)，(2・4) と (2・6) の最大条件とより次の１次統計式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} r_0+Z_0-\alpha' Z_1-\beta' Z_2 &= \varepsilon_0 \\ r_1+Z_0-\lambda_1 Z_1 \qquad\quad &= \varepsilon_1 \\ r_2+Z_0 \qquad\quad -\lambda_2 Z_2 &= \varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(2.\ 7)$$

ただし　$Z_0=logV$，　$Z_1=logL$，　$Z_2=logK$，　$\alpha'=\lambda_0\alpha_1$，$\beta'=\lambda_0\beta$，$\gamma_i=$ 定数，　$\varepsilon_i=$ 確率変数

である。(2・7) から明らかな様に，このモデルは連立方程式体系であって，母数の推定には計量経済学的取扱いが必要となる。

(2・5) から明らかな様に，Douglas の主張する「生産弾力性の和」＝１，「労働生産弾力性」＝「労働分配率」は

$$\alpha'+\beta'=(\alpha+\beta)\lambda_0=1, \qquad \alpha'=\alpha\lambda_0=\text{労働分配率}$$

となり $\lambda_0=1$ のときのみ $\alpha+\beta=1$ は constant returus to scale を意味し，ま

たそのときのみ労働分配率に関する法則が成立するのである。

(3) CD 生産関数のその後の計測

1948 年の Douglas の論文発表後も多くの測定が行われ，$\alpha+\beta=1$ か否か，αが労働分配率を表わすか否かが，実証的に研究された。1962 年までの成果は Douglas の従来の研究も含めて，Walters の 1963 年発表の展望論文〔102〕にまとめて報告されている。それには CES 生産関数による結果も含まれているが，CD 生産関数については 100 個以上の観測結果があげられている。それらは時系列の場合，企業間分析の場合，産業間分析の場合に分けて比較検討してあるが，結論として

(イ) $\alpha+\beta$はほぼ 1 に等しい

(ロ) αは概ね労働分配率に等しい

ということがのべられている。なお測定方法としては，時系列の場合にトレンドを除去してあるものもあり，産業によっては説明変数が 3 個以上，5 個までのものもある。

(4) 改良された CD 生産関数による計測

1961 年の ACMS の CES 生産関数の発見以後，Solow 等によって初められた技術進歩論と相まって，生産関数の理論的或は実証的研究は急激に増加した。以下はそのうちで CD 生産関数に関するものについてのべることとする。

M. Brown and J. Popkin (1962,〔13〕)は生産においてアウトプットの変化を，インプットの変化，economies of scale，中立的技術進歩，非中立的技術進歩の 4 つの因子に分けることを試みた。そのため生産関数を

$$Y=AL^{\alpha}K^{\beta}f(t)u \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.9)$$

にて表わす。ただし t は時間を示し，$f(t)$ は技術進歩を，u は確率変数を示す。そして計測の結果として，アウトプットに対して，インプットの変化よりも技術進歩による影響の方が大であることを示し，また$\alpha+\beta$の値に対して

1890—1918 年	1,4695
1919—1937 年	1,0444
1937—1958 年	1,0447

という結果を得ている。従って1890—1918年では明らかに increasing returns to scale となっている。この結果は従来の方法と異り，トレンドと確率変数とが同時に取り入れられたモデルによっていることに注目すべきである。

M. Nerlove (1963,〔68〕) は

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}M^{\gamma}u$$

なる生産関数を用い，費用 $= L\omega + K\gamma + Ms$ を最小ならしめるとの仮定のもとで1955年の米国の電力業についてα, β, γ 等を測定している。ただし M は燃料を，s はその価格を，u は確率変数を示す。その結果は $\alpha+\beta+\gamma$ は0.94～2.52であるが，平均は1.43となっている。また別のモデルでも計測を行っているが，その結果も$\alpha+\beta+\gamma$ の平均は1.46となり，何れによるも明らかに increasing returns to scale を示している。なおいま1つの結論として，returns to scale はかなり変動しているが，その変動は産出量の大きさと反対方向である。即ち規模弾力性は産出量の増加と共に減少の傾向があるのである。

A.Walters (1963,〔103〕)は Solow の論文〔91〕の再吟味を行って

$$Y = Ae^{rt}L^{\alpha}K^{\beta} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \cdot 10)$$

なる生産関数を用い Solow のデータおよび追加した新しいデータによってα，βを測定して$\alpha+\beta$の値として1.353, 1.625, 1.375の結果を得た。また自己相関を除去した場合についても1.256, 1.220, 1.419の結果を得た。従って increasing returns の可能性を示している。なお1.3位が最もよい推定値であるといっている。

以上 Brown and Popkin, Nerlove, Walters の3人の論文で，技術進歩或は確率変数が考慮されたCD生産関数では increasing returns が結果していることは注目に値する。ただし企業の集りである産業において increasing returns であるからといって，個々の企業についてはそうでないかも知れないのである。何となれば個々の企業の間に外部経済が作用しているかも知れないからである。

(5) CD 生産関数の理論的研究

次に理論的研究にぞくするものを3つのべることとする。第1に M.Frankel (1962, 〔33〕)は成長理論のモデルとしてハロッド・ドマール型の関数 $Y=aK$ と CD 生産関数（ヒックス型）とを綜合するため

$$Y=AHL^{\alpha}K^{\beta}\quad(\alpha+\beta=1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.11)$$

なる生産関数を考えるが，H は経済成長を示す量であって Frankel は $H=(K/L)^{\gamma}$ とおく。

従って

$$Y=AL^{\alpha-\gamma}K^{\beta+\gamma}$$

となり，$\alpha=\gamma$ のとき $Y=AK$ となる。第2は Uzawa (1961, 〔100〕) によるもので，1次同次生産関数

$$Y=F(K,\ L,\ t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.12)$$

において，それが同時にヒックス中立であり又ハロッド中立であるための必要十分な条件は

$$Y=A(t)L^{\alpha}K^{1-\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.13)$$

であることである。従ってそれは CD 生産関数を特徴づける性質なのである。第3は Inada (1967, 〔43〕)によるもので，(2・12) がヒックス中立であって同時に Golden Path が存在するものは (2・13) に限ることである。

さて統計学的方法論としては，Y. Mundlak (1963, 〔66〕) が

$$Y=AH(t)\prod_{i}x_i^{\alpha}M^{\beta}u\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.14)$$

なる生産関数（ただし，$H(t)$ は t 期の生産力，M は技術水準，u は確率変数を示す）について母数の推定方法を論じ，A. Zellner, J. Kmenta, and J. Dreze (1966, 〔19〕)は Marschak and Andrews (1944, 〔59〕)の理論の拡張として

生産関数　$Y=AL^{\alpha}K^{\beta}e^{u}$　(u は確率変数)

利潤　$\pi=p'Y-w'L-r'K$　(p', w', r' は確率変数)

$$log\left(\frac{w'}{p'}\right)=log\frac{w}{p}+u_1\quad(u_1\text{は確率変数})$$

$$log\left(\frac{r'}{p'}\right)=log\frac{r}{p}+u_2 \quad (u_2\text{は確率変数})$$

なる仮定のもとで，πの期待値$E(\pi)$を最大ならしめる場合について母数の推定方法を考察している。その統計式は結局は Marschak and Andrews の連立方程式（2・7）と殆んど同じ式となる。また S. M. Goldfeld and R. E. Quandt（1970, 〔34〕）は

$$Y=AX_1^{a_1}X_2^{a_2}\cdots X_n^{a_n}e^u+v \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.15)$$

なる生産関数，即ち additve error と multicative error を含む生産関数についての推定方法をのべている。更に H.H.Kelejian (1972, 〔49〕)は Goldfeld and Quandt の結果を拡張して(2・15)で multicative error を$e^u=B+\phi$とおいて，その推定方法について論じている。ただし，$B=E(e^u)$, $E(\phi)=0$である。

3．CES 生産関数

(1) CES生産関数の発見

CD生産関数の特色である生産弾力性一定或は代替弾力性が1であるということは，他方では欠点であり，特に後者はヒックスの提唱した技術進歩の分配率にあたえる効果の実証を不可能にした。ところで K.J.Arrow, H.B.Chenery, B.S.Minhas, and R.M.Solow (1961, 〔4〕)の4人が計測的な方面からCES生産関数を発見して，CD生産関数の欠点を補ったのである。

ACMSは 19 ヶ国のデータにより国際間横断面分析によって

$$log\frac{Y}{L}=loga+blogw+u \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

なる統計式がよく適合することを知り，これにもとずいて，自由競争下の1次同次生産関数としてCES生産関数を得たのである。その方法は求める1次同次関数を

$$Y=F(K,\ L),\quad y=F\left(\frac{K}{L},\ 1\right)=f(k)$$

とすれば仮定より

$$w=\frac{\partial Y}{\partial L}=y-k\frac{dy}{dk}$$

故に（3・1）より

$$logy=loga+blog\left(y-k\frac{dy}{dk}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.2)$$

となる。この微分方程式を解けば

$$y=(\beta k^{-\rho}+\alpha)^{-\frac{1}{\rho}}$$

或は　$Y=\gamma(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$ ……….(3.4)

を得るのである。

ACMSは（3・4）より種々の関係式を導き，多くの性質のテストを行ってCES生産関数の妥当性を主張している。その内容をのべれば

(a)　$0<\sigma<1$である。$\sigma=0$はハロッド・ドマール型の固定生産係数生産関数であり，$\sigma=1$はCD生産関数である。

(b)　$\delta/(1-\delta)=(r/w)(K/L)^{1+\rho}$ なる関係式よりδが一定であることを実証した。

(c)　3つのパラメーターのうちδ, ρは各国の間で差異はないが，γは各国の技術水準によって異ることが明らかとなった。

(d)　$wL/Y=(1-\delta)^{\sigma}(w/r)^{1-\sigma}$ ……….(3.5)

なる関係式が成立するが，これによれば，$\sigma<1$ならwの増加率が技術進歩の増加率より大きいときには労働の分配率が上昇する。また両者の増加率が等しいときは労働の分配率は不変となる。歴史的に労働分配率が，不変であることはこれによっても説明できるであろう。

(e)　（3・5）式は中立的技術進歩$\gamma=\gamma_0 10^{\lambda t}$を仮定すれば

$$log\frac{wL}{Y}=a_0+a_1 logw+a_2 t \quad \cdots\cdots\cdots(3.6)$$

$$a_0=\sigma log(1-\delta)+(\sigma-1)log\gamma_0,\quad a_1=1-\sigma,\quad a_2=-\lambda(1-\sigma)$$

となる。実測の結果は$a_1=0.43$, $a_2=0.003$であるが，これよりCD生産関数の仮説：$a_1=0$かつ$a_2=0$, 或は固定生産係数の仮説：$a_1=1$は何れも棄却される。

(f)　米国の1929-49年のデータについて

$$Y=0.584(1.0183)^{t}(0.519K^{-0.756}+0.481L^{-0.756})^{-1.322}$$

を得ているが，これはかなりよく適合する。

CES生産関数の発見はDouglasのCD生産関数に次ぐ大きな貢献であって，これによって生産関数論の第2期が初まり，多くの論議を呼び起した。しかしその論議は既にCD生産関数の問題として提起された範囲を出ていない。即ち

(i)　returns to scale の問題

(ii)　3個以上の変数の問題

(iii)　時間的な構造変化の問題

(iv)　不完全競争の問題

である。ただし(iii)の問題は以後は非中立的技術進歩の問題として取り上げられるのである。なお(i)についてはACMSも体系がconstant returnsであるかどうかというテストには失敗している。またACMSでは δ =一定であるため中立的技術進歩のみを取扱う結果となったのである。

ACMSとは別にM. Brown and J. S. Cani (1963,〔14〕)はK，Lの代替弾力性の定義式から微分方程式を解くことにより

$$Y=\gamma_1(K^{-\rho}+\gamma_2L^{-\rho})^{-\frac{h}{\rho}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.7)$$

なる非1次同時CES生産関数を得ている。これは生産における労働の分配率に対する(a)非中立的技術進歩，(b)要素代替弾力性の変化，(c)要素価格の変化の3つのものの影響を調べるために案出されたものである。ACMSと異り，数学的に導入されたこと，constant returnsを仮定しないこと，更に要素代替弾力性の変化を考慮している点において勝れた考察である。

C. E. Ferguson (1963,〔30〕)は米国の製造工業の1927, 1954, 1958年のデータにより(3.4)，(3.1)なるCES生産関数を用いて実測を行い，生産要素の分配率と相対価格との相関関係に関するヒックスの命題の検討を行い，CES生産関数の妥当性を認めている。既ち129の場合のうち，$0 < b < 1$が有意である17の産業について賃金率と労働分配率との順位相関係数を計算すると

正の相関 (0.3〜0.6程度) となり, $b>1$ が有意である20の産業については負の相関 (—0.3〜—0.6程度) となる。また $b>0$ が有意で $b=1$ に近い12の産業については正負ほぼ半数 (—0.3〜0.2程度) である。

また J. R. Moroney (1967, 〔54〕) も米国の製造工業1954, 1958年のデータについて同様な測定を行い, 賃金率と労働分配率との順位相関係数を計算し, Ferguson と全く同じ結論に達している。

(2) 非1次同次 CES 生産関数

非1次同次 CES 生産関数は Brown and Cani によって発見されているが, returns to scale の問題をめぐってそれが多く利用される様になった。

先づ Ferguson (1965, 〔31〕) は技術進歩がヒックス的中立かハロッド的中立かということを調べるため2つの生産関数

$$Y=Ae^{\lambda t}\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\}^{-\frac{m}{\rho}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.8)$$

$$Y=A\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)(e^{\alpha t}L)^{-\rho}\}^{-\frac{m}{\rho}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.9)$$

について実測を行っている。そして1929—63年のデータではヒックス的中立 (3.8) が, 1948—63年ではハロッド的中立 (3.9) が適合するといっている。何れの場合も $m=1$ が適当であるといっている。

P. J. Dhrymes (1965, 〔22〕) は ACMS の論文を批判し, (3.4) によれば

$$Y/L=A_1w^{\sigma}, \quad Y/K=A_2r^{\sigma} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.10)$$

でなければならないが, それによる σ の測定値 (1957年米国製造工業) はかなり異り, 何れも後の式による方が大きい値となり, 適合度もこの方がよい。そのため constant returns の CES 生産関数は適当でないとして, 次の様な生産関数を考える。それは (3.10) のかわりに

$$w=A_1(Y/L^m)^{\beta}L^{m-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.11)$$

とおき, 生産関数は m 次同次関数として

$$Y=F(K,\ L)=L^mF\left(\frac{K}{L},\ 1\right)=L^mf(k) \quad \cdots(3.12)$$

とし, 市場は必ずしも自由競争ではなく, 均衡条件として

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=w\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\eta}\right), \quad \frac{\partial Y}{\partial K}=r\left(\frac{1+\varepsilon_1}{1+\eta}\right) \quad \cdots(3.13)$$

とおく。ただし η, ε, ε_1 はアウトプットの供給弾力性の逆数，労働供給弾力性の逆数，資本供給弾力性の逆数である。それらの関係式から ACMS と同様な計算により

$$Y=C(t)\{\alpha_1(t)K^{m\delta}+\alpha_2(t)L^{m\delta}\}^{\frac{1}{\delta}} \quad \cdots\cdots(3.14)$$

なる非1次同次 CES 生産関数を得る。なお

$$代替弾力性\ \sigma=\frac{1}{1-m\delta}$$

である。この式による測定の結果は（3,11）の後の式の測定値に近い値となる。なお m の値は18個のデータのうち2つをのぞけば何れも $1.0<m<1.10$ の間にあり，弱い increasing returns が認められる。

また σ については消費財製造工業では比較的大きい値をもち（1,0程度），投資財製造工業では比較的小さい値（1.0以下平均的には0.5程度）をもつことが示されている。なお市場の不完全性については，消費財製造工業では市場不完全性は比較的少ないが，投資財製造工業ではそうでないことを示している。

CES 生産関数による σ の測定は多くの人々によって行なわれたが， M, Nerlove (1967, 〔70〕) はそれらの測定値の検討を行っている。産業が異なれば勿論であるが，同一産業でも年次の違い，データの処理法の違い，推計方式の違い等から σ の測定値にかなりの差異を生ずる。極端な例は表2の通りである。差異の原因については Nerlove は種々考察しているのであるが，決定的な対策は結局のところ不明のままである。

表2

産　　業	Minasian (1957)	Solow (1956)
タ　バ　コ	3.46	1.96
石　油・石　炭	− 0.54	1.45
ゴム・合成樹脂	0.82	1.48
一次金属製品	0.92	1.87
非電気機械	0.31	0.64
電気機械	1.26	0.37
輸送設備	1.04	2.04

(3) CES 生産関数のその後の改良

Nerlove の研究によるまでもなく，CES 生産関数には不充分な点があり，returns to scale や不完全競争の問題の他にも解明すべきことがあって，新しい推定方法が種々提案されている。

J.Kmenta (1967, 〔47〕)は *log* (Y/L) と *log w* との回帰関係によらず，非1次同次 CES 生産関数

$$Y=\gamma\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\}^{-\frac{m}{\rho}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.15)$$

を直接測定する方法を考えるのである。従って自由競争の仮定とは無関係に測定されるのである。その方法は (3,15) の対数統計式

$$logY=log\gamma-\frac{m}{\rho}log\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\}+u_0 \cdots(3.16)$$

はパラメーターについて1次式でないため最小2乗法が適用できないので，(3,16)を ρ について $\rho=0$ のまわりにテーラー展開して得られる1次近似式

$$\begin{aligned}logY=&log\gamma+m\delta logK+m(1-\delta)logL\\&-\frac{1}{2}\rho m\delta(1-\delta)(logK-logL)^2+u_0 \cdots(3.17)\end{aligned}$$

に最小2乗法を適用するのである。この式のみにても母数の測定は可能であるが，更に自由競争の仮定を取り入れるならば，利潤最大の条件より

$$\left(\frac{\rho}{m}+1\right)logY-(\rho+1)logK=log\{r\gamma^{\frac{\rho}{m}}(pm\delta)^{-1}\}R_1+u_1 \quad \cdots\cdots(3.18)$$

$$\left(\frac{\rho}{m}+1\right)logY-(\rho+1)logL=log\{w\gamma^{\frac{\rho}{m}}(pm)^{-1}(1-\delta)^{-1}\}R_2+u_2 \quad \cdots\cdots(3.19)$$

を得る。ただし R_1, R_2 は母数であって通常は $R_1=R_2=1$ である。Kmenta は (3.17), (3.18), (3.19) を連立方程式体系として最尤法によって ρ, m, δ, γ の推定を行っている。

なお M. D. McCarthy (1967, 〔61〕)によって，(3.17) は (3.15) の1次近似式であるのみでなく，更に一般な生産関数

$$Y=\gamma\{aK^{\alpha}+bK^{\beta}L^{\alpha-\beta}+cL^{\alpha}\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad \cdots\cdots(3.20)$$

の α, β に関する1次近似式であることが示されている。(3.20) は一般にはCES 生産関数ではないが，$b=0$ 又は $\alpha=\beta$ なら CES 生産関数となるのである。従って (3.17) によるテストはCES関数によるテストではなくて，(3.20) を前提とすることとなる。また1次近似式によるテストは厳密なテストにならないことも注意すべきであらう。

1967 年頃までの CES 生産関数の計測は殆んど米国製造工業についてであったが，M. S. Feldstein (1967, 〔28〕)が初めて 1954, 1957, 1960 年の 24 の英国産業について横断面分析を行った。しかしながら Feldstein は，constant returns の仮定，労働限界生産力＝賃金率，賃金率の外生変数の仮定の何れも成立しがたいことをのべて，ACMS と異る他の方法を案出している。それは $0<\sigma\leqq 3$，$0<m\leqq 2$ の範囲で 0.1 飛びに σ について 30 個，m について 20 個の値を作り，σ, m の仮想的な組合せを 600 個作る。それらの各組に対して非1次同次 CES 生産関数

$$Y^{-\frac{\rho}{m}}=\gamma^{-\frac{\rho}{m}}\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.21)$$

に最小2乗法を適用して γ, δ の値を定める。

そして Y の実測値とその推定値 $\hat{Y}$ との相関係数を計算する。600 個のその様な相関係数のうち最大値をあたえる σ, m を求める推定値とするのである。その結果は表3の通りである。また ACMS の方法で測定した値，および前述の Kmenta の方法で測定した値も表3に記されているが，Kmenta の方法は不安定な数値であって Feldstein は Kmenta の方法に疑問を持っている。

表3

年次	$\hat{\sigma}$	$\hat{m}$	$\hat{\sigma}$ (ACMS)	$\hat{\sigma}$ (Kmenta)
1954	1.5	1.0	0.640	− 0.326
1957	1.9	1.1	0.940	2.409
1960	1.6	1.1	1.103	− 0.018

D.J.Hodges (1969, 〔40〕)はCD生産関数に対する Zellner, Kmenta, Preze (1966, 〔109〕)の測定方法をそのままCES生産関数に適用して

$$\left.\begin{aligned} &Y=\gamma\{\delta L^{-\rho}+(1-\delta)K^{-\rho}\}^{-\frac{m}{\rho}}e^{u_0} \\ &\left(1+\frac{\rho}{m}\right)logY-(1+\rho)logL=C_1+\left(1+\frac{\rho}{m}\right)u_0+u_1 \\ &\left(1+\frac{\rho}{m}\right)logY-(1+\rho)logK=C_2+\left(1+\frac{\rho}{m}\right)u_0+u_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3.22)$$

なる連立方程式体系を得た。また更に完全独占の場合にも(3・22)とほぼ同じ方程式体系を得ている。

G.Szakolczai and J.Stahl (1969, 〔99〕)は操業度と体化された技術進歩を取り入れたCES生産関数によって測定を行っている。即ち

$$Y=e^{a+bu+cu^2}e^{\lambda t}\gamma\{\delta J^{-\rho}+(1-\delta)M^{-\rho}\}^{-\frac{m}{\rho}} \cdots\cdots(3.23)$$

なる生産関数を案出している。ただしuはtの関数であり，$e^{a+bu+cu}$は現実産出量と可能産出量との比を示し，λ は体化されない技術進歩を示し，J,Mは技術進歩が体化された資本と労働とを示す。1929–58年の米国製造工業のデータによる測定の結果は $m\fallingdotseq 1.5$, $\lambda=0.014$, 体化された技術進歩＝0.05, σ は0.5〜0.9である。

U.Sankar (1970, 〔82〕)は 1953–58年のインドの製造工業の σ とmとの測定にあたり，地域による生産条件の差異を考慮し，地域差を示すための dummy variable を含むCES生産関数を利用している。それは

$$Y_i=\{exp(\sum_i\gamma_i Z_i+gt)\}\{\delta K_i^{-\rho}+(1-\delta)L_i^{-\rho}\}^{-\frac{m}{\rho}}\cdots(3.24)$$

であり，iは地域差を示し，Z_iは地域差を示す dummy variable である。Sankar はインドでは自由競争下の利潤最大条件は成立しがたいと見て，wを用いず直接に(3.24)に最尤推定法或はベイズの方法を適用する。結果はσは $0.3<\sigma<1.7$ の範囲であるが，一般にベイズの方法によった方が値が大きく，また消費財製造工業の方が資本財製造工業よりも値が大きい。mについては $0.5<m<1.5$ の範囲であるが，多くの値は1より大きく，increasing returns が認められる。なほ m については最尤推定法によっても，ベイズの方法によってもその値は殆んど差異はない。

最近 R. D. Blair and J. Kraft (1974, 〔9〕)は Kmenta (1971, 〔48〕)が cross-sectionally heteroscedastic and time-wise autoregressive model と称した方法によって，1954, 1958, 1963, 1967 年の米国製造工業についての時系列と横断面との混合されたデータを用いて σ の測定を行っている。生産関数は自由競争下の利潤最大条件仮定のもとでの 1 次同次CES生産関数であるが，その対数形を

$$log\left(\frac{Y}{L}\right)=loga+blogw+c_2T_1+c_3T_3+c_4T_4+u \cdots (3.25)$$

とおく。ただし T_2, T_3, T_4, は 1958, 1963, 1967 年に対する dummy variable である。これは技術進歩を除去するための手段である。その測定の結果は 17 の産業の平均値は 1.5 位である。またそれらの値のテストの結果は有意でないものが 1，有意であって $0<b<1$ のものが 2，$b>0$ のものが 1，$b>1$ のものが 13 であって，$b>1$ が妥当な結論であるとしている。

(4)　3 変数以上への拡張

CES生産関数は種々の論議を引起したが，今までのべたのは主として観測データとの関係において起った問題であるが，理論的な問題も展開されている。その主要なものは 4 節，5 節でのべるのであるが，ここでは 3 変数以上への拡張についてのべる。この問題はCD生産関数の場合と異りかなり復雑である。以後は 3 変数以上の関数の場合は，生産関数を

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n) \cdots\cdots\cdots\cdots (3.26)$$

にて表わし

$$\left.f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i},\ f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ F=\begin{vmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}\ \right\} \cdots\cdots\cdots (3 \cdot 27)$$

F_{ij}=Fの余因数

とおく。

H. Uzawa (1962, 〔101〕)は R. G. D. Allen (1938, 〔2〕)による要素代替

弾力性の定義

$$\sigma_{ij}^{*}=\frac{x_1f_1+\cdots+x_nf_n}{x_ix_j}\cdot\frac{F_{ij}}{F} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot28)$$

を用いて，$\sigma^{*}{}_{ij}$ = 一定 = σ であるための必要十分条件として

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i^{-\rho}\}^{-\frac{1}{\rho}}\ (\rho=\frac{1}{\sigma}-1) \quad \cdots\cdot(3\cdot29)$$

を得ているが更に一般の関係として次の定理を得ている。

〔定理１〕 $\{N_1,N_2,\cdots\cdots,N_s\}$ が，自然数 $(1,2,\cdots\cdot,n)$ の１つの分割を示すとき

$$f(x)=\prod_{s=1}^{S}[\{\sum_{i\in N_s}\alpha_ix_i^{-\rho_s}\}^{-\frac{1}{\rho_s}}]^{\beta_s} \quad (\beta_s>0,\ \sum_s\beta_s=1) \quad \cdots\cdot(3\cdot30)$$

であれば

$$\sigma^{*}{}_{ij}=\begin{Bmatrix}1,\ \text{if}\ \ i\epsilon N_s,\ j\epsilon N_t,\ s\neq t\\ \\ \sigma_s,\ \text{if}\ \ i,\ j\epsilon N_s\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdot(3.31)$$

である。ただし$\sigma_s=\dfrac{1}{1+\rho_s}$ である。

〔定理２〕 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdot,\ x_n)$ が１次同次で stricktly quasi-concave で，３次までの偏導関数が存在して連続であれば，(3.31) を満足する (3.30) の形の分割 $\{N_1,\ N_2,\ \cdots\cdot,\ N_s\}$ が存在する。

なお (3.30) は

$$f(x)=\prod_{s=1}^{S}Z_s^{\beta_s}\ ,\qquad Z_s=\left\{\sum_{i\in N_s}\alpha_ix_i^{-\rho_s}\right\}^{-\frac{1}{\rho_s}}$$

と表され，各グループ内ではCES生産関数，グループ間ではCD生産関数を示すtwo-levelの生産関数である。

D. McFadden (1963, 〔62〕)は代替弾力性の３通りの定義の場合の各々について吟味している。先づ直接定義によるもの，Allenの定義によるもの，shadow price によるものをそれぞれσ_{ij}, σ_{ij}^{*}, σ_{ij}^{**}で表わすとすれば

$$\sigma_{ij}=\ dlog(\frac{x_i}{x_j})/dlog(\frac{f_j}{f_i})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot(3\cdot33)$$

$$或は\ \sigma_{ij} = \frac{\dfrac{1}{x_i f_i} + \dfrac{1}{x_j f_j}}{-\dfrac{f_{ij}}{f_i^2} + 2\dfrac{f_{ij}}{f_i f_j} - \dfrac{f_{jj}}{f_j^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot33)$$

$$\sigma_{ij}^{**} = \frac{-\dfrac{f_{ii}}{\lambda_i^2} + 2\dfrac{f_{ij}}{\lambda_i\lambda_j} - \dfrac{f_{jj}}{\lambda_j^2}}{\dfrac{1}{p_i\lambda_i} + \dfrac{1}{p_j\lambda_j}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot34)$$

である。ただし $C=\lambda(y, p_1, p_2, \cdots\cdot, p_n)$ は費用関数であって，$\lambda_i = \dfrac{\partial\lambda}{\partial p_i}$，$\lambda_{ij} = \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial p_i \partial p_j}$ である。そして Mc Fadden は σ_{ij}^* に関する Uzawa の定理と同様な次の定理を得ている。

〔定理3〕 $y=f(x_1, x_2, \cdots\cdot x_n)$ が stricktly quasi-concave であれば，σ_{ij}がすべて定数であるための必要十分条件は次の(i)(ii)が成立することがある。

(i) $(1, 2, \cdots, n)$ の分割 $\{N_1, N_2, \cdots\cdots, N_s\}$ が存在して

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & for\ \ i,\ j \in N_s,\ \ i \neq j \\ \sigma, & for\ \ i \in N_r,\ j \in N_s,\ \ r \neq s \end{cases}$$

である。ただしσは定数である。

(ii) $x_i f_i = x_j f_j \quad for \quad i, j \in N_s,\ i \neq j$

〔定理4〕 $y=f(x_1 \cdots\cdot, x_n)$ が，stricktly concave で1次同次であるとする。σ_{ij} がすべて定数であるための必要十分条件は，分割 $\{N_1, N_2, \cdots, N_s\}$，定数 ρ，および正の実数 $a_i (i=1, 2, \cdots\cdot, S)$ が存在して

$$\rho > -\frac{1}{m}, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdot + \alpha_s = 1$$

であって等量曲線が

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \alpha_0 \sum_{s=1}^{S} \alpha_s \left\{ \prod_{k \in N_s} \left(\frac{x_k}{y} \right)^{-\rho} \right\}, && for\ \ \rho \neq 0 \\ y &= \alpha_0 \prod_{s=1}^{S} \left\{ \prod_{k \in N_s} x_k \right\}^{\alpha_s / m_s}, && for\ \ \rho = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (3.35)$$

で定められることである。なほ $\sigma = \dfrac{1}{1+\rho}$ である。

次に σ_{ij}^{**} についても〔定理3〕,〔定理4〕と類似の定理が，成立するとのべられている。

V. Mukerji (1963, 〔65〕) は

$$y=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{-\rho_i}\right)^{-\frac{1}{\rho}} \quad (\alpha_i,\ \rho_i,\ \rho\text{は定数}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.36)$$

なる生産関数を考え，

$$\alpha_{rs}^{*}=\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}f_i x_i\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i x_i}{1+\rho_i}\right)\right\}\Big/\left\{(1+\rho_r)(1+\rho_s)\right\} \cdots\cdots (3.37)$$

を得た。従って

$$\frac{\sigma^{*}_{rs}}{\sigma^{*}_{uv}}=\frac{(1+\rho_u)(1+\rho_v)}{(1+\rho_r)(1+\rho_s)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 38)$$

であり，σ_{rs}^{*}は定数ではないが，それらの比は一定となり，(3・36) は constant-ratio-of-elasticity-of-substitution production function （以後CRES生産関数と略記する）である。一般にはCRES生産関数はCES生産関数でないのみでなく，同次関数でもなく，また homothetic でもないことに注意すべきである。

また W. M. Gorman (1965, 〔35〕)は Mukerji の定理の逆として，σ_{ij}^{*}の比が定数であるための必要十分な条件は，生産関数が Mukerji 型か Uzawa 型かであることを証明している。

K. Sato (1967, 〔83〕) は Uzawa の生産関数(3・30) を拡張した形の生産関数

$$\left.\begin{aligned} &y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\{\sum_{s=1}^{S}\beta_s Z_s^{-\rho}\}^{-\frac{1}{\rho}} \\ &Z_s=\left\{\sum_{i\in N_s}\alpha_i x_i^{-\rho_s}\right\}^{-\frac{1}{\rho_s}} \quad \left(\rho_s=\frac{1-\sigma_s}{\sigma_s}\right)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3.39)$$

を考察している。これは two-level のCES生産関数である。σ, σ_s は定数であるが，σ_{ij} 或は σ_{ij}^{*} は必ずしも定数ではない。従って (3・39) はCES生産関数ではない。σ_{ij}, σ^{*}_{ij} の値は

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_s, & if \quad i, j \in N_s \\ \dfrac{a+b+c}{\dfrac{a}{\sigma_r}+\dfrac{b}{\sigma_s}+\dfrac{c}{\sigma}}, & if \quad i \in N_r, j \in N_s, \gamma \neq s \end{cases}$$

$$\sigma^*_{ij} = \begin{cases} \sigma+\dfrac{1}{\theta^{(s)}}(\sigma_s-\sigma), & if \quad i, j \in N_s \\ \sigma, & if \quad i \in N_r, j \in N_s, r \neq s \end{cases}$$

ただし　$a=\dfrac{1}{\theta_i^{(r)}}-\dfrac{1}{\theta^{(r)}}$, $b=\dfrac{1}{\theta_i^{(s)}}-\dfrac{1}{\theta^{(s)}}$

$$c=\frac{1}{\theta^{(r)}}+\frac{1}{\theta^{(s)}},\ \theta^{(s)}=\frac{Z_s}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Z_s},\ \theta_j^{(s)}=\frac{Z_s}{y}\frac{\partial y}{\partial Z_s}\frac{\partial Z_s}{\partial x_j}\quad (j \in N_s)$$

である。なほ $\sigma_{ij}=$ 定数 $=a_{ij}$ なら

$$y=a\left\{\sum_{s=1}^{S}\alpha_s\prod_{i\in N_s}x_i^{-\rho}\right\}^{-\frac{1}{\rho}}$$

となり，これは Mc Fadden の生産関数（3・35）の特別な場合と一致する。また σ^*_{ij} =定数$=a_{ij}$ なら Uzawa の生産関数（3・30）となる。その意味では Mc Fadden の生産関数と Uzawa の生産関数との綜合的拡張であるともいうことができる。

CES生産関数の最も直接的な拡張方法として，σ_{ij} に関して K. Ara (1967,〔3〕)は生産関数　$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$が

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{i}) & f_i>0,\ (i=1, 2, \cdots, n) \\ (\text{ii}) & a_i f_i^{\sigma} x_i = a_j f_j^{\sigma} x_j,\ (i, j=1, 2, \cdots, n) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 40)$$

を満足すれば次の定理が成立することを証明した。ただし a_i, σ は定数で $a_i>0$, $\sigma \geqq 0$ である。

〔定理5〕　$\sigma \neq 1$ であれば生産関数は

$$y=\Psi\left\{B\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\rho}\right\},\ (B,\ \alpha_i \text{ は定数},\ \alpha_i>0,\ \sum_i \alpha_i=1)\cdots\cdots(3\cdot 41)$$

なる形である。ただしΨは任意の微分可能な関数を示す。なお $\sigma=\dfrac{1}{1+\rho}$ である。

〔定理6〕 $\sigma \neq 1$のとき$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$がm次同次関数であれば(3・41)は

$$y = \gamma \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 x_i^{-\rho}\}^{-\frac{m}{\rho}} \quad (\gamma \text{ は定数}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3 \cdot 42)$$

となる。

〔定理7〕 (3・42) に対して

$$\lim_{\rho \to 0} y = \gamma^* \prod_{i=1}^{n} x_i^{m\alpha} \quad (\text{CD生産関数})$$

$$\lim_{\rho \to \infty} y = \gamma^{**} \min \{x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m\} \quad (\text{Harrod-Domar 型関数})$$

である。ただし γ^*, γ^{**}は定数である。

Mukerji のCRES生産関数は一般には同次関数でもなく，homothetic でもないが，G.Hanoch (1971, 〔38〕)はCRES であって同次関数で homothetic な生産関数を案出した。それは

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{\frac{x_i}{h(y)}\right\}^{-\rho} - 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.43)$$

によって定義される関数であって，関数 $h(y)$ は連続的微分可能で $h(0)=0$, $h'(y) > 0$ である。

明らかに $h(y)$ は $x_1 \cdots, x_n$ に関して1次同次であり，従って生産関数は1次同次関数の関数となる。故に生産関数は homothetic である。(4節(3)参照) 従ってもし $h(y) = y^{\frac{1}{m}}$ とおけば生産関数は m 次同次関数となる。$y=1$の Mukerji の CES 生産関数の等量曲面は(3.43)の $y=1$の等量曲面と同一となる。また (3.43) に対しては費用最小条件とより

$$\sigma^*_{ij} = \frac{a_i a_j}{\sum_{k=1}^{n} s_k a_k}, \quad a_i = \frac{1}{1+\rho_i}, \quad s_i = \frac{p_i x_i}{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}$$

となることが示され，(3,38) より (3,43) は CRES生産関数であることがわかる。なお (3,43) の母数の推定法についても論じている。

4　VES 生産関数

(1)　VES 生産関数

CES 生産関数の研究が進むにつれて，定数でない代替弾力性を考えざるを得なくなって来た。従って当然のことながら代替弾力性が定数でない生産関数の研究に入ることとなる。その様な生産関数を VES 生産関数（variable-elasticity-of-substitution production function）と総称することとする。

生産関数（1次同次）

$Y = F(K, L)$ ……………………………（4．1）

或は $y = f(k)$，$(f(k) = F(\frac{K}{L}, 1))$ ……（4．2）

において代替弾力性 σ は

$$\sigma = -\frac{f'(f-kf')}{kff''} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.3)$$

となる。さて R. Sato (1967,〔84〕) は σ を k の関数として与えて生産関数を求める問題を考える。$\sigma = \sigma(k)$ として微分方程式 (4.3) を f について解けばよいのである。先づ (4.3) より

$$\frac{f}{f'} - k = A\int\frac{dlogk}{\sigma(k)}$$

を得る。更にこれを積分することにより

$$f = Bexp\left[\int\frac{dk}{k + A\,exp\int\frac{dlogk}{\sigma(k)}}\right] \quad \cdots\cdots (4.4)$$

を得る。ただし A,B は積分定数で $A>0$，$B>0$ である。具体的な例として $\sigma(k) = a + bk$（a は有理数）の場合，或は資本分配率 $\beta(k) = ak + b$ の場合について生産関数が求められている。

Y. Lu and L. B. Fletcher (1968,〔56〕)は ACMSと同様に

$$log\frac{Y}{L} = loga + b\,logw + c\,log\frac{K}{L} + u \quad \cdots\cdots\cdots (4.5)$$

とおいて，自由競争の仮定より1次同次生産関数

$$Y = \gamma\left\{\delta K^{-\rho}+(1+\delta)\eta\left(\frac{K}{L}\right)^{-c(1+\rho)}\cdot L^{-\rho}\right\}^{-\frac{1}{\rho}} \quad \cdots\cdots (4.\ 6)$$

を得た。ただし $\gamma, \eta, \delta, \rho$ は定数で $\rho = \frac{1}{b} - 1$ である。その代替弾力性は

$$\sigma = b/\left\{1 - c\frac{f}{kf'}\right\}$$

である。1957年の米国製造工業についての測定の結果によれば，仮説 $c = 0$ は棄却され，VES 生産関数の正当性が認められている。

N. S. Revanker (1971, 〔77〕)は CES 生産関数よりはむしろ CD 生産関数の直接の拡張としてある種の VES 生産関数を求めている。即ち

$\sigma(k) = 1 + \beta k$, (β は定数)

の形の代替弾力性を想定して

$$Y = \gamma K^{\alpha(1-\delta\rho)}\{L+(\rho-1)K\}^{\alpha\delta\rho} \quad (0<\delta<1,\ 0\leqq\delta\rho\leqq 1)\cdots(4.\ 7)$$

を得ている。なお

$$\sigma = 1 + \frac{\rho-1}{1-\delta\rho}\cdot\frac{K}{L}$$

である。

ヒックス中立の技術進歩をなす1次同次生産関数

$$Y = A(t)F(K, L) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4,8)$$

を考えると，その K,L の限界代替率は k のみの関数であるから

$$R = \frac{dK}{dL} = g(k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.\ 9)$$

と表わされる。そこで $g(k)$ の関数を定めることにより等量曲線が定まり，従って生産関数が定まることとなる。C. A. K. Lovell (1973, 〔55〕)はこの方法によって生産関数を得ている。即ち

(a)　$R = -\frac{1-\delta}{\delta}k^{1+\rho}$ $(0<\delta<1,\ \rho>-1)$

(b)　$R = -(\alpha + \beta k)$ $(\beta>0,\ -\frac{\alpha}{\beta}<k)$

(c)　$R = -k\left(\frac{1}{\alpha+\beta k}-1\right)$ $(0<\alpha<1,\ 0<\alpha+\beta k<1)$

の3つの関係からそれぞれ

$$Y = Ae^{\lambda t}\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)^{-\rho}\}^{-\frac{1}{\rho}},\quad \text{(CES)}$$

$$Y = Ae^{\lambda t}\{(1+\beta)KL^{\beta}+\alpha L^{1+\beta}\}^{\frac{1}{1+\beta}},\quad \text{(VES)}$$

$$Y = Ae^{\lambda t}K^{\alpha}L^{1-\alpha}e^{\beta k},\quad \text{(VES)}$$

を得ている。それらの代替弾力性はそれぞれ

$$\frac{1}{1+\rho},\ 1+\frac{\alpha}{\beta k},\ 1-\frac{\beta k}{(\alpha+\beta k)^2-\alpha}$$

である。なお1947-68年の米国製造工業のデータを用いて母数の推定および予測を行っている。σ の値の平均的な値は何れの場合も0.47位である。

(2)　VRS 生産関数

Douglas の CD 生産関数発見以来 returns to scale の問題の解答は未だに確定していない。代替弾力性 σ が CD 生産関数の $\sigma=1$ から $\sigma=$定数の CES 生産関数に移り、終には$\sigma=$変数のVES生産関数となった様に，規模弾力性 m も $m=1$ から $m=$定数（$\neq 1$）へ移ったのであるが，これもついに $m=$変数という生産関数に発展したのである。その様な生産関数を VRS 生産関数(variable-returns-to-scale production function))と呼ぶこととする。なおこの生産関数では一般には $\sigma=$変数である。既に Nerlove〔68〕は returns to scale は産出量の増加と共に減少することを報告している。

D. Soskice (1968, 〔97〕)は CES 生産関数を returns to scale が産出量の関数となる生産関数に拡張した。既ち生産関数

$$Y = F(K, L) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.10)$$

において

$$m(Y)=\frac{\partial Y}{\partial K}\cdot\frac{K}{Y}+\frac{\partial Y}{\partial L}\cdot\frac{L}{Y} \quad \cdots\cdots\cdots(4.11)$$

とおく。以後$m(Y)$ を規模関数 (returns to scale function) と呼ぶことする。$m(Y)$が定数であればそれは従来の規模弾力性であり，生産関数は m 次同次関数である。さて (4.10) を CES 生産関数の拡張とするため

$$g=\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.12)$$

$$Y=\varphi(g) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.13)$$

とおけば

$$m(Y)=-\rho\frac{\partial Y}{\partial g}\cdot\frac{g}{Y}$$

となる。従って規模関数 $m(Y)$ を定めることにより (4.14) より (4.13) が定まる。Soskiceは

$$m(Y)=a_0+a_1Y+a_2Y^2 \quad (a_1^2>4a_2a_0\neq 0,\ a_0>0) \quad \cdots\cdots (4.15)$$

とおき

$$Y(Y-p)^{b_0}(Y-q)^{b_1}=\gamma\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\}^{-\frac{a_0}{\rho}} \quad \cdots\cdots\cdots (4,16)$$

を得ている。ただし p,q は (4.15) の右辺＝0の2根であって, $b_0=\dfrac{q}{p-q}$, $b_1=\dfrac{p}{q-p}$である。また $m(Y)=a_0$ であれば (4.14) より

$$Y=\gamma\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\}^{-\frac{a_0}{\rho}}, \quad \text{(CES)}$$

を得る。なお (4,16) の母数の推定は

$$\log\frac{Y}{L}=\sigma\log w+\frac{(1-\sigma)(a_0-1)}{a_0}\log Y+\sigma\log\frac{df}{dY}+\left\{\frac{(1-\sigma)(a_0-1)}{a_0}-1\right\}\log\frac{f(Y)}{Y}+u$$

によればよい。ただし $f(Y)$ は (4,16) の左辺を示す。

A. Zellner and N. S. Revankar (1969,〔108〕)は Soskiceと同じ方法を用いて数種の VRS 生産関数を作り，そのうちの1つについて測定を行っている。即ち

$$f=f(K,L) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.17)$$

を n 次同次生産関数とし

$$Y=\varphi(f) \quad (\varphi(0)=0,\ \varphi'(f)>0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.18)$$

を求める生産関数とする。そして次の補助定理と定理とを得ている。

〔補助定理〕(4.18) の代替弾力性は (4.17) の代替弾力性 σ と同一である。

〔定理〕　規模関数 $m(Y)$ を所与とするとき，生産関数 (4.18) は微分方程式

$$\frac{dY}{df}=\frac{Y}{f}\cdot\frac{m(Y)}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.19)$$

を解くことによって求められる。

補助定理は殆んど自明であり，定理は既に Soskice によって利用されているが，Zellner and Revankarは

$$m(Y) = n\ (1-\frac{Y}{a}) \quad (a=\text{定数},\quad 0\leqq Y<a)$$

$$m(Y) = n\ (\nu+\frac{a}{\varphi^{-1}(Y)}) \quad (\nu=\text{定数},\ \varphi^{-1}\text{は逆関数})$$

$$m(Y) = n + b\cdot\frac{a-Y}{a+Y} \quad (0\leqq b\leqq n)$$

の場合について（4.19）を解いてそれぞれ

$$Y = \frac{af}{1+f}$$

$$Y = cf^{\nu}e^{-\frac{a}{f}}$$

$$Y = \{(1+\lambda)a+(1-\lambda)Y\}^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}} = cf^{1+\lambda} \quad (\lambda=\frac{b}{n})$$

を得ている。なお (4.18), (4.17) の労働生産弾力性をそれぞれ $\alpha(Y)$, $\alpha(f)$ とすれば

$$\alpha(Y) = \frac{m(Y)}{n}\alpha(f) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.20)$$

であり資本生産弾力性についても同様な関係式が成立する。

また　$m(Y) = \dfrac{h}{1+\theta Y}$

の場合について解をもとめ

$$Ye^{\theta Y} = cf^{h}$$

を得ている。更に f を CD 生産関数として

$$Ye^{\theta Y} = \gamma K^{h(1-\delta)}L^{h\delta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.21)$$

なる VRS 生産関数を求めている。これより

$$\log Y+\theta Y = \log\gamma + h(1-\delta)\log K + h\delta\log L + u \quad \cdots\cdot (4.21)$$

を得るが，1957 年の米国の輸送機械製造工業について，最尤推定法により母数を推定している。その結果は

$$\hat{m}(Y) = \frac{1.49}{1+0.134Y}$$

である。この式を用いて計算すれば，米国の輸送機械工業は地域により $\hat{m}(Y)$ が 0.76 から 1.45 まで変動することとなる。

V. Ringstad (1974,〔79〕)は Nerlove (1963,〔68〕)と Zellner and Revankar との生産関数の比較検討を行っている。即ち 4 つの生産関数

$$\left.\begin{array}{l} logY = logA + \alpha logL + \beta logK\ , \ \text{(CD)} \\ logY + \gamma(logY)^2 = \ \mu\, logL + \beta log\dfrac{K}{L}\ , \ \text{(Nerlove)} \\ logY + \theta Y = \ \mu logL + \beta log\dfrac{K}{L}\ , \ \text{(Zellner and Revanker)} \\ logY + \gamma(logY)^2 + \theta Y = \ \mu log\, L + \beta log\dfrac{K}{L} \\ \qquad\qquad \text{(Nerlove とZellner と Revankarとの混合)} \end{array}\right\} \cdots\cdots(4.22)$$

を考えれば，それらの規模関数はそれぞれ

$$m(Y) = \alpha + \beta$$

$$m(Y) = \mu / (1 + 2\gamma logY)$$

$$m(Y) = \mu / (1 + \theta Y)$$

$$m(Y) = \mu / (1 + 2\gamma\, logY + \theta Y)$$

となる。Ringstad はノールウエーの鉱工業について，1967 年の横断面データによる分析と，1959-67 年の横断面時系列データによる測定とを行い，更にそれらについて（4.22）より得られる費用関数による測定を行っている。それら 4 種類の測定の結果について，1，2 の例外をのぞけば次の結論が成立している。

(イ) 費用関数による測定値は生産関数による測定値よりも大である。

(ロ) Nerlove 型が最も適当である。

(ハ) decreasing returns to scale が確認できる。

なお前述の Zellner and Revankar の測定結果とともに VRS 生産関数において decreasing returns が認められたことは注目に値することであろう。

(3) HI 生産関数

Zellner and Revanker は n 次同次生産関数（4・17）の単調変換（4・18）では代替弾力性が不変であることを示したが，その本質は限界代替率 R が不変のことである。即ち

$$f(K, L) = L^n f(\frac{K}{L}, 1) = L^n g(k) \quad \left(k = \frac{K}{L}\right)$$

とおけば

$$\frac{\partial Y}{\partial L}\Big/\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{\partial g}{\partial L}\Big/\frac{\partial y}{\partial K}=n\frac{g(k)}{g'(k)}-k \quad \cdots(4.23)$$

であって R はk のみの関数となるのである。従って（4・18）の等量曲線については n 次同次関数（4・17）の場合と同様に，原点を通る直線上では限界代替率は一定である。その様な生産関数を homothetic isoquant production（Clemhout による。以後HI生産関数と略称する）という。従って（4・18）の形の生産関数は必ずHI生産関数であるが，K, Lの代替弾力性が k の関数として定義できる必要十分条件は，それが HI 生産関数であることである。

最初に HI 生産関数を意識的に提案したのは S. Clemhout (1968, 〔19〕)である。それは $n=1$ の場合に（4・23）の左辺を k の関数 $\psi(k)$ としてあたえることにより

$$\psi(k)=\frac{g(k)}{g'(k)}-k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.24)$$

を得る。これより関数 g (k) が定まり，従って $f(K, L)$ が求められる。なお Clemhout　はその場合 Ψ(k)より得られる

$$g(k)=Cexp\int\frac{dk}{\psi(k)+k}$$

をデータより数値積分によって求める方法，および，右辺の不定積分を多項式で近似する方法を提案している。

Z. Griliches and V. Ringstad (1971, 〔36〕)は 1963 年のノールウェー製造工業のデータによって生産関数の計測を行っている。その場合CD 生産関数，CES 生産関数，1次近以のCES関数（3・17），および non-homothetic　な生産関数

$$log(\frac{Y}{L})=a_0+a_1logL+a_2log(\frac{K}{L})+a_{31}(logK)^2$$
$$-2a_{32}(logKlogL)+a_{33}(logL)^2 \quad \cdots\cdots\cdots(4.24)$$

の4つの生産関数を考えているが，$a_{31}=a_{32}=a_{33}$ であれば (4・24) は1次近似の CES 生産関数となる。(3・17) は HI 生産関数なので $a_{31}=a_{32}=a_{33}$ なるテストをもって homotheticity のテストとしている。データによ

るテストの結果は $a_{31}=a_{32}=a_{33}$ は棄却され，non-homotheticity が結論されている。

5　技術進歩と生産関数

(1)　集計された生産関数

各種の生産関数についてのべてきたが，それらを時系列に適用する場合は，生産構造の変化に対応するため，確率変数の導入或はトレンドを示す項の導入が行われた。しかし研究が進むにつれて，技術進歩の分析手段として生産関数が論ぜられる様になったのである。

技術進歩は生産力の増強即ち生産要素の質的変化を生ずるのであるが，資本においてはその設置の時のみに質的変化が可能と考えられるのである。従って資本の生産力はその設置の期日の関数と考えられることとなり，以下にのべる様な集計された生産関数が出現するのである。

v 時点で設置された資本で時点 t で存在するものの量を $K_v(t)$，その資本と対応する労働量を $L_v(t)$，それらで生産される産出量を $Y_v(t)$ とし，それらの間の生産関係を

$$Y_v(t)=F_v(K_v(t),\ L_v(t),\ v)\cdots\cdots\cdots\cdots(5.\ 1)$$

とするときは時点 t での資本・労働・産出物の量は，t を連続変数と考えれば

$$\left.\begin{aligned} K(t)&=\int_{\infty}^{t}K_v(t)dt\\ L(t)&=\int_{\infty}^{t}L_v(t)dt\\ Y(t)&=\int_{\infty}^{t}Y_v(t)dt \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

となり，これらの間の関係式が集計された生産関数（aggregate production function）なのである。なお時点 v に設置された資本の量を I(v) として，

$K_v(t)$ と $I(v)$ との比は $t-v$ の関数であるとして

$$\frac{K_v(t)}{I(v)}=D(t-v) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.3)$$

とおけば

$$K_v(t) = D(t-v)I(v)$$

である。従って

$$K(t)=\int_{\infty}^{t} D(t-v)I(v)dv \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.5)$$

となる。

最初に上の様な生産関数を導入したのは R. M. Solow (1959, 〔92〕)であって，それは（5・1）の関数を CD 生産関数

$$Y_v(t)=Be^{\lambda v}L_v(t)^{\alpha}K_v(t)^{1-\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.6)$$

とおき，減価を示す関数を

$$D(t-v) = e^{-\delta(t-v)} \quad (\ \delta\text{は減価率}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.\ 7)$$

とおいて生産関数を求めるのであるが

$$K(t)=e^{-\delta t}\int_{\infty}^{t} e^{\delta v}I(v)dv \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.8)$$

でなくて，資本の生産力の増加を考慮して

$$J(t)=\int_{\infty}^{t} e^{\sigma v}I(v)dv \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.9)$$

とおいて，$J(t)$, $L(t)$, $Y(t)$ の間の関係式として

$$Y(t)=Be^{-\delta(1-\alpha)t}L(t)^{\alpha}J(t)^{1-\alpha} \quad \cdots\cdots (5.10)$$

なる集計された生産関数を得たのである。ただし

$$\sigma=\delta+\frac{\lambda}{1-\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.11)$$

であって，$\lambda=0$ のときは（5・10）は（5・6）と同じ関係式となる。

Solow はその後の論文（1962, 〔93〕)で1つの提案として，現実の産出量 $Q(t)$ と生産可能な産出量 $P(u)$ とを区別して

$$Q(t) = g(u(t))\cdot P(t)$$

とおき，$u(t)$ は失業率を示すとした。また t を離散変数と考えて

$$J(t)=\sum_{v=-\infty}^{t}(1+\lambda)^{v}D(t\text{-}v)I(v) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.13)$$

とし，$P(t)$ は $J(t)$ と $L(t)$ との関数と考えて

$$P(t) = F(J(t), L(t))$$

とされている。実際に用いられたモデルでは

$$Q = a \cdot 10^{b+cu+du^2} L^{\alpha} J^{1-\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5 \cdot 15)$$

なる関数を用いている。

更に Solowはその後の論文（1964,〔95〕）で米国製造工業の分析にあたり次の3つの新しい提案を行った。

(イ) 要素増加的生産関数を用いること。

(ロ) 集計された生産関数を作り，それに CES 生産関数を利用すること。

(ハ) パラメーターの測定に横断面データと時系列データとを併用すること。

先ず(イ)については能率を考慮した1次同次の要素増加的生産関数

$$Y = F(B(t)K,\ A(t)L) = A(t)F(\frac{B(t)}{A(t)}K, L)$$

においてヒックス中立的技術進歩を示す因子 $A(t)$ を1とおき，$B(t)/A(t)$ を改めて $B(t)$ と書くこととすれば

$$Y = F(B(t)K, L) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.16)$$

となる。

(ロ)については（5・16）を t を離散変数としてヴインテイジ化して

$$Y_v(t) = F(B(v)K_v(t),\ L_v(t)) = L_v(t)F(h, 1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.17)$$

ただし $h = \dfrac{B(v)K_v(t)}{L_v(t)}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.18)$

とおく。自由競争を仮定して

$$w(t) = F_L(h, 1) \quad \cdots\cdots\cdots (5.19)$$

とおけば，逆関数として h は $w(t)$ の関数として表わされるから，それを $h = \varphi(w(t))$とおく。従って（5・18）から

$$L(t) = \sum_v L_v(t) = \frac{1}{\varphi}J(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.20)$$

ただし $J(t) = \sum_v B(v)K_v(t)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5 \cdot 21)$

となる。故に（5・17），（5・20）より

$$Y(t)=\sum_{v}L_{v}F(\varphi,1)=L(t)F(\varphi,1)=F(J(t),L(t))\ \cdots\cdots\ (5\cdot22)$$

を得る。これが Solow の得た新しい生産関数である。さて関数Fを CES 生産関数とすれば

$$Y(t)=\gamma\{\delta J(t)^{-\rho}+(1-\delta)L(t)^{-\rho}\}^{-\frac{1}{\rho}}\ \cdots(5.23)$$

となる。なお実測にあたっては

$$\mathrm{B}(v)=(1+\mu)^{v},\quad \mathrm{K}_{v}(\mathrm{t})=(1-\theta)^{t-v}\mathrm{I}(v)$$

と仮定している。

(ハ)については ACMS と全く同様に

$$log\frac{Y}{L}=\sigma\ log\ w+log\{\gamma^{\rho}(1-\delta)^{-1}\}^{\sigma}$$

に 1956 年の横断面データを用いて σ と右辺第2項を測定し，次に 1949-58 年の時系列データを用いて（5・23）より γ,δ,μ を測定している。

その後 M. D. Intriligator（1965,〔44〕），M. D. McCarthy（1965,〔60〕），E.Mansfield（1965,〔58〕），J. K. Whitaker（1966,〔105〕），F. M. Westfield（1966,〔104〕）等の人々によって Solow の諸論文の批判或は拡張が行われている。特に Westfield は Solow の constant returns to scale の場合を一般の returns to scale に拡張して

$$Y_{v}(t)=Be^{\lambda v}L_{v}(t)^{\alpha}K_{v}(t)^{\beta}\cdots\cdots\cdots(5.24)$$

より Solow と全く同様にして

$$Y(t)=Be^{-\beta\delta t}L(t)^{\alpha}J(t)^{1-\alpha}$$

を得ている。ただし

$$J(t)=\int_{\infty}^{t}e^{\sigma v}I(v)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}dv\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.25)$$

$$\sigma=\frac{\beta\delta+\lambda}{1-\alpha}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.26)$$

である。なお Westfield は特殊な方法で母数の推定を行い，increasing returns よりは decreasing returns の方が可能性が多いといっている。

(2) 要素増加的生産関数

技術進歩における投資の重要性の認識から集計された生産関数が導入されたのであるが，生産における能率の変化は資本だけでなく，労働の側にもあるのであろう。その方面の問題として労働の熟練・教育効果・研究開発等の問題があるが（J. K. Arrow, 1962, 〔5〕その他），これらは資本と違って何時でも生産性を変化させることができる。従ってヴインテイジモデルによる必要はないのである。その意味において資本と労働とを対等に取扱って，技術進歩を生産要素の能率の変化によって表現しようとする考えが生ずるのである。

その考え方によると，ヒックスの中立的技術進歩は資本と労働との能率の変化率が同一の場合と考えられる。従って資本と労働とが異った変化率で能率を増加するときは当然に中立的でない技術進歩である。その様な考えから要素増加的生産関数(factor augumenting production function，以後FA生産関数と略記する）が生れたのである。それは

$$Y = F(B(t)K, A(t)L) \quad \cdots\cdots (5 \cdot 27)$$

であって，F は1次同次で，$B(t)$, $A(t)$ はそれぞれ K, L の能率を示す t の関数である。従って $B(t) = A(t)$ であれば(5・27)は $Y = A(t). F(K, L)$ となってヒックス中立を示し，$B(t) = 1$ ならハロッド中立を示し，(H. Uzawa 1961, 〔100〕)，$A(t) = 1$ なら（5・16）のソロー中立を示すこととなる。故に（5・27）は一般に非中立的技術的技術進歩の場合を示し，技術進歩の研究に新しい展開をあたえたのである。その1つとして C. Kennedy（1764, 〔50〕)，P. A. Samuelson（1965, 〔80〕)，E. M. Drandakis and E. S. Phelps（1966, 〔27〕）等による induced innovation の理論がある。

Drandakis and Phelps によってその概要をのべることとする。(5・27)の B(t), A(t) に何等かの制限をあたえなければ技術進歩が無規定となり，現象説明のための理論は生じないのであるから，その条件として innovation possibility function

$$\hat{B} = \psi(\hat{A}), \ (\hat{B} = \frac{1}{B}\frac{dB}{dt}, \ \hat{A} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}, \ \varphi(0) > 0, \ \varphi'(\hat{B}) < 0, \ \varphi''(\hat{B}) < 0) \quad \cdots\cdots (5.28)$$

が仮定される。さて技術進歩率を G とすれば

$$G=\frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial t}=\alpha\hat{A}+\beta\hat{B}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.29)$$

であるが，技術選択の行動原理として次の仮定が設けられる。

〔仮定〕 α,β が一定のとき G を最大ならしめる技術が現実に選択される。

その他に労働増加率と投資に関する仮定として

$$\left.\begin{aligned} L(t) &= L_0e^{\gamma t}\quad(\gamma\geqq 0)\\ \frac{dK}{dt} &= \theta e^{-\eta t}Y\quad(0<\theta<1,\ \eta\geqq 0)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5,30)$$

とおけば，以上の関係から

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{\beta(1-\beta)(1-\sigma)}{\sigma}(\hat{B}-\hat{A}-\hat{K}+\gamma)$$

$$\frac{d\hat{K}}{dt}=\hat{K}(1-\beta)\left(\frac{\beta}{1-\beta}\hat{A}+\hat{B}-\frac{\eta}{1-\beta}-\hat{K}+\gamma\right)$$

を得る。これより $\beta,\hat{K}$ が t の関数として定まる筈であるが，特に動学的均衡径路($\frac{d\beta}{dt}=0,\frac{d\hat{K}}{dt}=0$)が安定であるための条件として $\sigma<1$ が得られるのである。

N.S.Revanker（1971,〔78〕)は以前に自分が求めた VES 生産関数（4,7）を更に一般化して

$$Y=re^{\lambda t}K^{1-\delta\rho}\{L+(\rho-1)(1+bt)K\}^{\delta\rho}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.31)$$

となる FA 生産関数を作り，これによって1929-53年の米国のデータを用いて，ヒックス中立的技術進歩と非中立的技術進歩との大きさを測定している。この場合は

$$\sigma=1+\frac{(\rho-1)(1+bt)}{1-\delta\rho}\cdot\frac{K}{L}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.32)$$

となり，$\rho=1$ は CD 生産関数の検定となり，$\rho\neq 1$ は CES 生産関数でなく，VES 生産関数の採択となる。測定の結果は $\rho<1$ であり，$0.43<\sigma<0.58$ であって σ の平均値は 0.53 であった。また $b<0$ であって，(5,37) より

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}>0,\ \frac{\partial\sigma}{\partial k}<0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.33)$$

となる。

終りに FA 生産関数とは限らないが，生産関数の関数型に拘らず，ある条

件を満足する微分方程式を解くことにより，生産関数を求める方法が考えられる。R. Sato and M. J. Beckmann (1968,〔86〕, 1969,〔7〕)はヒックス，ハロッド，ソローの中立的技術進歩を Uzawa (1961,〔100〕)の方法によって拡大し，14 種類の中立的技術進歩の生産関数を作成している。例えば，賃金率 w が一定のときに$\dfrac{Y}{K}$が一定であることを技術中立の定義とすれば，その生産関数は

$$Y = F(K,\ L + C(t)K)$$

となり，w が一定のとき$\dfrac{K}{L}$が一定であることを中立性の定義とすれば生産関数は

$$Y = C(t)K + G(K,\ L)$$

となる。同様にして R, r, w, α, σ の何れかが一定のときに Y/K, Y/L, K/L, R, r, w, α の何れかが一定であることを技術中立の定義とすることにより結局 14 種類の生産関数を得ている。なおそれらの中から σ に関するものをのぞいた 9 種類を米国・日本・独乙のデータに適用した結論として，ヒックス，ハロッド，ソローの 3 つの中立は他よりも勝れていて，特にソロー中立は大変よい結果をあたえていることが報告されている。

R. Sato (1970,〔85〕)は 1 次同次 FA 生産関数

$$Y = F(B(t)K, A(t)L) = F(K', L') \quad (K' = BK, L' = AK) \cdots (5,34)$$

より代替弾力性 σ を K', L' について定義し，自由競争仮定のもとで

$$\sigma = \left\{\frac{d\left(\frac{BK}{AL}\right)}{\frac{BK}{AL}}\right\} \Bigg/ \left\{\frac{d\left(\frac{Bw}{Ar}\right)}{\frac{Bw}{Ar}}\right\}$$

とおく。そして $\sigma = \varphi(\beta)$ なる関係より FA 生産関数を導いている。更にその特別な場合として σ =定数のときは CES 型生産関数

$$Y = \{a(BK)^{-\rho} + b(AL)^{-\rho}\}^{-\frac{1}{\rho}} \quad \left(\sigma = \frac{1}{1+\rho}\right)$$

を得ている。また $\sigma = \dfrac{1}{\delta_1}\beta$ （δ_1 =定数）のときは

$$\delta_1 \neq 1 \text{ なら } Y = \frac{a_1}{1-\delta_1}(BK)^{1-\delta_1}(AL)^{\delta_1} + b_1 AL \quad \cdots\cdots (5.35)$$

$$\delta_1 = 1 \text{ なら } Y = a_1 \mathrm{AL} \log\frac{BK}{AL} + b_1 BL \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.36)$$

なる FA 生産関数を導いている。その場合

$$\frac{1}{\sigma_1}=-\frac{dk}{dr}\cdot\frac{r}{k},(r\text{は利潤率})$$

なる関係が成立し，(5.35)，(5.36) は　CEDD　生産関数 (constant-elasticity-of-derived-demand production function) と呼ばれている。なお K, L の関係を対称的に入れかえた CEDD 生産関数も求められている。米国のデータによって測定が行われているが，結論の1部として次の結果が得られている。

(イ)　CEDD 生産関数は CES 生産関数より適合度が高い。

(ロ)　技術進歩は労働節約的である。

(ハ)　$\sigma<1$ の様に思われる。

M. J.Beckmann, R. Sato and M. Schupack (1972, 〔8〕)はかなり一般的な方法で種々の生産関数を作り出している。即ち1次同次生産関数

$$Y=F(K,L,t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5,37)$$

において

$$Z=\frac{Y}{K}=F\left(1,\ \frac{L}{K},\ t\right)=\varphi(x,\ t)\quad\left(x=\frac{L}{K}\right)$$

$$Z'=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \dot{Z}=\frac{d\varphi}{dt}$$

とおけば

$$y=\frac{Z}{x},\ w=Z',\ r=Z-xZ',\ R=\frac{Z-xZ'}{Z'},\ \alpha=\frac{xZ'}{Z}$$

となる。さて Z, x, y, w, r, R, α の増加率の1次式である Z, t の微分方程式

$$\alpha_0\frac{\dot{Z}}{Z}+\beta\frac{\dot{x}}{x}+\gamma\frac{\dot{y}}{y}+\delta\frac{\dot{w}}{w}+\varepsilon\frac{\dot{r}}{r}+\eta\frac{\dot{R}}{R}+\lambda\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}+\mu=0\cdots\cdots(5.38)$$

を考え，これより

$$(Z-xZ')^a(Z')^bZ^cx^g=he^{mt}\ \cdots\cdots\cdots\ (5.39)$$

なる関係式を得る。これを解くことにより種々の型の生産関数が得られ，CD, CES, CEDD の生産関数はその特殊の場合として含まれている。なお 1945-65年の米国製造工業のデータについて測定した結果によれば，CD 生産関数は適当でないが，CES 生産関数は適当である。しかしその他にもよく適合する生産関数があることが示されるている。

6．今後の問題

半世紀近い間の生産関数論議は以上の通りである。Douglas が周囲の人々の冷い眼を身に感じながら専心生産関係と分配関係との解明に立向った当時に比して，現在何程の進歩があるであろうか。確かに数多くの勝れた生産関数が発見され，勝れた計量経済学的計測方法が発明された。しかし CD 生産関数に提出された疑問は未だに十分に解明されていない。その疑問点を今一度あげるなら

(i)　returns to scale の問題

(ii)　3個以上の変数の問題

(iii)　時間的構造変化の問題

(iv)　不完全競争の問題

それに(v)代替弾力性の値の問題をつけ加えてもよいであろう。

比較的簡単な問題から考えることとする。先づ(ii)のn 変数生産関数($n \geqq 3$)の問題についてのべれば，CD 生産関数は多く理論にも計測にも利用されているが，CES 生産関数については計測にも理論にも利用されていない。代替弾力性を定数と考えることが，2変数 K, L についても問題となっているのであるから，形式的に変数の数を増加しても，あまり意味はないであろう。そのうちで一番簡単な Uzawa の生産関数(3.29)と，一番複雑な(しかし形式は簡単な) Mukerji の生産関数(3.36)は利用される可能性があるのではなかろうか。

次に(iv)の問題は計測の技術的側面からすれば解決ずみである。即ち自由競争の仮定を用いず生産関数そのものから計測を行えばよい。これは計量経済学の発達の賜物である。なお競争の仮定を入れた連立方程式体系を作るにしても Dhrymes〔22〕の様に不完全競争の仮定を入れることによって可能である。しかしこれは技術論である。不完全競争の理論の確立は生産関数論とは別の問題である。

第3には(iii)の技術進歩の問題である。これも(iv)と同じく生産関数だけ

の問題ではなくて現代経済学の中心課題である。だがCD生産関数にトレンドが導入され，それがヒックス或はハロッドの中立の問題となり，そしてFA生産関数となって，計測の面よりも理論の面に貢献していることは注目すべきであろう。なおFA生産関数（m 次同次）

$$Y = F(B(t)K, A(t)L) \cdots\cdots\cdots\cdots (6,1)$$

は $\dfrac{A(t)}{B(t)} = C(t)$

とおけば

$$Y = \{B(t)\}^m F(K,\ C(t)L) \cdots\cdots\cdots\cdots (6.\ 2)$$

或は $Y = \{A(t)\}^m F\left(\dfrac{1}{C(t)}K,\ L\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (6.\ 3)$

となり，非中立的技術進歩（6.1）は，ヒックス中立とハロッド中立との合成（6.2），或はヒックス中立とソロー中立との合成（6.3）として表現できる。従って中立的技術進歩と非中立的技術進歩との区別がやや不明瞭となる様に思われる。今1つの問題は（6.1）の形の場合 A(t) とB(t)との関係である。Kennedy〔50〕に初まる innovation possibility function の理論はやや難解であって，今少し自然な A(t) とB(t) との関係の表現法はないものであろうか。

第4には(ｖ)の問題である。多くの人々の測定値は概ね $0.3<\sigma<1.5$ の程度の範囲に入っているが，Nerlove〔70〕が詳細に調べている様に時・場所・測定方法によってかなりの差異があることは問題であろう。或は VES 生産関数の方がより自然であるのかも知れない。しかし現在では VES 生産関数による σ の測定値は少なく，この点は今後の課題であろう。また理論的な問題からすれば，$\sigma = 1$ は動学的経済体系の安定不安定の境界点であって（Drandakis and Phelps〔27〕），$\sigma<1$ か $\sigma>1$ かは確認したいことである。とも角も σ の正確な値が得たいものである。

終りに(ｉ)の問題に移ろう。1960年頃までは専らCD生産関数による測定であるが，$m \fallingdotseq 1$ がほぼ認められたかに見えた。だがCES生産関数の発見と共に様子が変り，$m > 1$ が支配的となった。更に VES 生産関数が出現すると今度は $m < 1$ の可能性が増大して来たのである。理論的には企業単位の場合は $m > 1$ であることは与えられた生産関数のもとで利潤最大の条

件が成立しない。従って産業が increasing returns であるとき，個々の企業では $m \leqq 1$ と考えるためには，Walters〔103〕がのべている様に外部経済性を考えるか，或は不完全競争を前提とするかしなければならないであろう。とも角も規模弾力性の値はいくらであろうか。一番古くて簡単に見えるこの問題は未だに解決されていないのである。

理論が精密となるに従って疑問がますます多くなるのは科学の常道であろう。生産関数論もまたその常道をたどりつつあるのであろう。Douglas が1948年の論文の終りでのべた言葉でこの拙論を終ることとする。

"There is no door but only a little window that opens out upon a great world."

参考文献

Abbreviations:

AER	*American Economic Review*
EJ	*Economic Journal*
Ec	*Economica*
Em	*Econometrica*
IER	*International Economic Review*
JPE	*Journal of Political Economy*
Met	*Metroeconomica*
QJE	*Quarterly Journal of Economics*
REStat	*Review of Economics and Statistics*
REStud	*Review of Economic Studies*

〔1〕Aigner, D. J. and S. F. Chu, "On Estimating the Industry Production Function," *AER*, 58 (1968), 826–39.

〔2〕Allen, R. G. D., *Mathematical Analysis for Economists*, London, 1938.

〔3〕Ara, K., "On CES Production Function," *Hitotsubashi Journal of Economics*, 7 (1967), 75–78.

〔4〕Arrow, K. J., H. B. Chenery, B.S. Minhas and R. M. Solow, "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *REStat*, 43 (1961), 225-50.

〔5〕Arrow, K. J., "The Economic Implications of Learning by Doing," *RES*, 29 (1962) 155-73.

〔6〕Bardhan, P. K., "On Estimation of Production Functions from International Cross-Section Data," *EJ*, 77 (1967) 328-37.

〔 7 〕 Beckmann, M. J. and R. Sato, "Aggregate Production Functions and Types of Technical Progress: A Statistical Analysis," *AER*, 59 (1969), 88-101.
〔 8 〕 Beckmann, M. J., R. Sato and M. Schupack, "Alternative Approaches to the Estimation of Production Functions and of Technical Change," *IER*, 13 (1972), 33-52.
〔 9 〕 Blair, R. D. and J. Kraft, "Estimation of Elasticity of Substitution in American Manufacturing Industry from Pooled Cross-Section and Time-Series Observations," *REStat*, 56 (1974), 343–47.
〔 10 〕 Bronfenbrenner, M., "Production Functions: Cobb-Douglas, Interfirm, Intrafirm," *Em*, 12 (1944), 35-44.
〔 11 〕 Brown, B. W., "Tests for Cobb-Douglas and CES Production Functions," *IER*, 11 (1970), 77-83.
〔 12 〕 Brown, M. and A. H. Conrad, "The Influence of Research and Education on CES Production Functions," *in the Theory and Enpirical Analysis of Production*, New York, 1967.
〔 13 〕 Brown, M. and J. Popkin, "A Measure of Technological Change and Returns to Scale," *REStat*, 44 (1962), 402-11.
〔 14 〕 Brown, M. and J. S. DeCani, "Technological Change and the Distribution of Income," *IER*, 4 (1963),. 289-309.
〔 15 〕 Brown, M. and J. S. DeCani, "A Measurement of Technological Employment," *REStat*, 45 (1963), 386-94.
〔 16 〕 Bruno, M., "Estimation of Factor Contribution to Growth under Structural Disequilibrium," *IER*, 9 (1968), 49-62.
〔 17 〕 Cobb, C. W. and P. H. Douglas, "A Theory of Production," *AER*, 18 (1928), 139-65.
〔 18 〕 Chenery, H. B., "Engineering Production Functions," *QJE*, 62 (1949), 507-31.
〔 19 〕 Clemhout, S., "The Class of Homothetic Isoquant Production Function," *RES*, 35 (1968), 91-104.
〔 20 〕 Clemhout, S., "The Class of Homothetic Isoquant Production functions: Programming Revisited," *REStud*, 37 (1970), 302-3.
〔 21 〕 David, P. A. and T. van de Klundert, "Biased Efficiency Growth and Capital -Labor Substitution in the U. S. 1899-1960," *AER*, 55 (1965), 357-94.
〔 22 〕 Dhrymes, P. J., "Some Extensions and Tests for the CES Class of Production Functions," *REStat*, 47 (1965), 357-66.
〔 23 〕 Diamond, P. A., "Technical Change and the Measurement of Capital," *RES*, 32 (1965), 289-98.
〔 24 〕 Douglas, P. H., *The Theory of Production*, New York, 1934.
〔 25 〕 Douglas, P. H., "Are There Laws of Production?" *AER*, 38 (1948), 1-41.
〔 26 〕 Douglas, P. H., "Comments on the Cobb-Douglas Production Funtion," in *the Theory and Empirical Analysis of Production*, New York, 1967.
〔 27 〕 Drandakis, E. M. and E. S. Phelps, "A model of Induced Innovation," *EJ*, 76 (1966), 823-840.

〔 28 〕 Feldstein, M. S., "Alternative Methods of Estimating a CES Production Function for Britain," *Ec,* 32 (1967), 384-94.

〔 29 〕 Feldestein M. S., Production with uncertain Technology : Some Economic and Econometric Impricationѕ," *IER,* 12 (1971), 27-38.

〔 30 〕 Ferguson, C. E., "Cross-Section Production Functions and the Elasticity of Substitution in American Manufacturing Industry," *REStat,* 45 (1963), 305-13.

〔 31 〕 Ferguson, C, E., "Substitution, Technical Progress and Returns to Scale," *AER,* 55 (1965), 296-305.

〔 32 〕 Fisher, F. M., Embodied Technical Change and the Existence of an Aggregate Capital Stock," *REStat,* 32 (1965), 263-88.

〔 33 〕 Frankel, M., "The Production Function in Allocation and Growth," *AER,* 52 (1962), 995-1022.

〔 34 〕 Goldfeld, S. M. and R. E. Quandt, "The Estimation of Cobb-Douglas Type Functions with Multiplicative and Additive Errors," *IER,* 11 (1970), 251-57.

〔 35 〕 Gorman, W.M., "Production Functions in which the Elasticities of Substitution stand in Fixed Portions to Each Other," *REStud,* 32 (1965), 217-24.

〔 36 〕 Griliches, Z. and V. Ringstad, *Economies of Scale and the Form of the Production Function,* Amsterdam, 1971.

〔 37 〕 Guha, A., "CES Production Function a la Samuelson," *REStud,* 39 (1972), 501-3.

〔 38 〕 Hanoch, G., "CRESH Production Functions," *Em,* 39 (1971), 695-712.

〔 39 〕 Harcourt, G. C., "Biases in Empirical Estimates of the Elasticities of Substitution of CES Production Function," *REStud,* 33 (1966), 227-233.

〔 40 〕 Hodges, D. J., "A Note on Estimation of Cobb-Douglas and CES Production Function Models," *Em,* 37 (1969), 721-25.

〔 41 〕 Hogan, W. P., "Technical Progress and Production Functions," *REStat,* 40 (1958) 407-11.

〔 42 〕 Hothakker, H. S., "The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis," *REStud,* 23 (1955-6), 27-31.

〔 43 〕 Inada, K, "Production Function and Neutral Technical Progress in Hicks's Sense," *Met,* 19 (1967), 62-74.

〔 44 〕 Intriligator, M. D., "Embodied Technical Change and Productivity in the United States 1929-58," *REStat,* 47 (1965), 65-90.

〔 45 〕 Johansen, L., "Substitution versus Fixed Production Coefficients in the theory of Economic Growth," *Em*, 27 (1959), 157- 176.

〔 46 〕 Johansen, L., *Production Functions,* Amsterdam, 1972.

〔 47 〕 Kmenta, J., "On the Estimation of the CES Production Function," *IER,* 8 (1967), 180-89.

〔 48 〕 Kmenta, L., *Elements of Econometrics,* New York, 1971.

〔 49 〕 Kelejian, H. H., "The Estimation of Cobb-Douglas Type Functions with Mutiplicative and Additive Errors: A Further Analysis," *IER,* 13 (1972), 179-82.

〔 50 〕 Kennedy, C., "Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution," *EJ,* 74 (1964), 541-47.

〔 51 〕 Kumar, T. K. and J. H. Gapinski, "Nonlinear Estimation of the CES Production Functions: A Monte Carlo Study," *REStat,* 56 (1974), 563-67.

〔 52 〕 Levhari, D., "Further Implications of Learning by Doing," *REStud,* 33 (1966), 31-38.

〔 53 〕 Levhari, D., "Extensions of Arrow's Learning by doing," *REStud,* 33(1966), 117-131.

〔 54 〕 Levhari, D. and E. Sheshinski, "A microeconomic Production Function," *Em,* 38 (1970), 559-73.

〔 55 〕 Lovell, C. A. K., "Estimation and Production with CES and VES Production Function." *IER,* 14 (1973), 676-92.

〔 56 〕 Lu, Y. and L. B. Fletcher, "A generalization of the CES Production Function," *REStat,* 50 (1968), 449-52.

〔 57 〕 Maddala, G. S. and J. B. Kadane, "Estimation of Returns to Scale and the Elasticity of Substitution," *Em,* 35 (1967), 419-23.

〔 58 〕 Mansfield, E., "Rates of Return from Industrial Research and Development," *AER,* 55 (1965), 310-22.

〔 59 〕 Marschak, J. and W. H. Andrews, "Random Simultaneous Equations and the Theory of Production," *Em,* 12 (1944), 143-205.

〔 60 〕 McCarthy, M. D., "Embodied and Disembodied Technical Progress in the Constant Elasticity of Substitution Production Function," *REStat,* 47 (1965), 71-75.

〔 61 〕 McCarthy, M. D., "Approximation of the CES Production Fuction," *IER,* 8 (1967), 190-192.

〔 62 〕 McFadden, D., "Constant Elasticity of Substitution Functions," *REStud,* 30 (1963), 73-83.

〔 63 〕 Mitchell, E. J., "Explaining the International Pattern of Labor Productivity and Wages: A Production Model with Two Labor Inputs," *REStat,* 50 (1968), 461-69.

〔 64 〕 Moroney, J. R., "Cross-Section Production Functions and the Neoclassical Theory of Income Distribution," *Met,* 19 (1967), 184-95.

〔 65 〕 Mukerji, V., "A Generalized SMAC Function with Constant Ratios of Elasticity of Substitution," *RES*tud, 30 (1963), 233-36.

〔 66 〕 Mundlak, Y., "Estimation of Production and Behavioral Functions from a Combination of Cross-Section and Time-Series Data," in *Measurement in Economics,* Stanford, 1963.

〔 67 〕 Mundlak, Y., "Transcendental Multiproduct Production Functions," *IER*, 5 (1964), 273-84.

[68] Nerlove, M., "Returns to Scale in Electricity Supply," in *Measurement in Economics,* Stanford, 1963.

[69] Nerlove, M., *Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Functions* Chicago, 1965.

[70] Nerlove, M., "Recent Empirical Studies of the CES and Related Prodution Functions," in *the Theory and Empirical Analysis of Production,* New York, 1967.

[71] Paroush, J., "The h-Homogeneous Production with Constant Elasticity of Substitution: A Note," *Em,* 34 (1966), 225-27.

[72] Phelps Brown, E. H., "The Meaning of the Fitted Cobb-Douglas Fuction," *QJE,* 71 (1957), 546-60.

[73] Pol, J. E. F., "A Note on the Generalized Production Function," *REStud,* 40 (1973), 139-40.

[74] Powell, A. A. and F.H.G. Gruen, "The Constant Elasticity of Transformation Production Frontier and Linear Supply system." *IER*, 9 (1968), 315-28.

[75] Ramanujam, M. S., "Production Function in which the Elasticities of Substitution stand in Fixed Proportion to Each Other: A Comment," *REStud,* 34 (1967), 432.

[76] Reder, M. W., "An Alternative Interpretation of the Cobb-Douglas Function," *Em,* 11 (1943), 259-64.

[77] Revankar, N. S., "A Class of variable Elasticity of Substitution Production Functions," *Em,* 39 (1971), 61-71.

[78] Revankar, N. S., "Capital-Labor Substitution, Technological Change and Economic Growth: the U. S. Experience, 1929-1953," *Met,* 23(1971), 154-76.

[79] Ringstad, V., "Some Empirical Evidence on the Decreasing Scale Elasticity," *Em,* 42 (1974), 89-101.

[80] Samuelson, P. A., "A Theory of Induced Innovation along Kennedy-Weizsacker Lines," *REStat,* 47 (1965), 343-56.

[81] Samuelson, P. A., "Two Generalization of the Elasticity of Substitution," in *Value, Capital and Growth,* Edingburgh, 1968.

[82] Sanker, U., "Elasticity of Substitution and Returns to Scale in Indian Manufacturing Industries," *IER,* 11 (1970), 399-411.

[83] Sato, K., "A Two-Level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function," *REStud,* 34 (1967), 201-18.

[84] Sato, R., "Linear Elasticity of Substitution Production Functions," *Met,* 19 (1967), 33-41.

[85] Sato, R., "The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Functions," *IER, 11* (1970), 179-208.

[86] Sato, R. and M. J. Beckmann, "Neutral Invention and Production Functions," *REStud,* 35 (1968), 57-66.

[87] Sato, R. and M. J. Beckmann, "Shares and Growth under Factor-Augumenting Technical Change," *IER,* 11(1970), 387-398.

〔 88 〕 Sato, R. and R. F. Hoffman, "Production Functions with Variable Elasticity of Factor Substitution: Some Analysis and Testing," *REStat,* 50 (1968), 453-60.

〔 89 〕 Solow, R. M., "The Production Function and the Theory of Capital," *REStud,* 23 (1955-6), 101-8.

〔 90 〕 ———, "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *QJE,* 70(1956), 64-94.

〔 91 〕 ———, "Technical Change and the Aggregate Production Function," *REStdt,* 39 (1957), 712-20.

〔 92 〕 ———, "Investment and Technical Progress," in *Mathematical Methods in the Social Science,* Stanford, 1959.

〔 93 〕 ———, "Technical Progress, Capital Formulation and Economic Growth," *AER,* 52 (1962), 76-86.

〔 94 〕 ———, "Substitution and Fixed Proportions in the Theory of Capital," *REStud,* 29 (1962), 201-18.

〔 95 〕 ———, "Capital, Labor, and Income in Manufacturing," in *the Behavior of Income Shares,* New York, 1964.

〔 96 〕 ———, "Some Recent Development in the Theory of Production,"in *the Theory and Empirical Analysis of Production,* New York, 1967.

〔 97 〕 Soskice, D., "A Modification on the CES Production Function to allow for Changing Returnes to Scale over the Function," *REStat,* 50 (1968), 446-8.

〔 98 〕 Syrquin, M.,"Returns to Scale and Substitutability in the Repairman Problem," *Em,* 40 (1972), 973-41.

〔 99 〕 Szakolczai, G. and J. Stahl, "Increasing or Decreasing Returns to Scale in the Constant Elasticity of Substtution Productlion Function," *REStat,* 51 (1969), 84-90.

〔 100 〕 Uzawa, H., "Neutral Invention and the Stability of Growth Equilibrium," *REStud,* 28 (1961), 117-24.

〔 101 〕 ———, "Production Functions with Constant Elasticities of Substitution," *REStud,* 29 (1962), 291-99.

〔 102 〕 Walters, A. A., "Production and Cost Functions: An Econometric Survey," *Em,* 31 (1963), 1-66.

〔 103 〕 ———, "A Note on Economics of Scale," *REStat,* 45 (1963), 425-27.

〔 104 〕 Westfield, F. M., "Technical Progress and Returns to Scale," *REStat,* 48 (1966), 432-41.

〔 105 〕 Whitaker, J. K., "Vintage Capital Models and Econnmic Production Functions," *REStud,* 33 (1966), 1-18.

〔 106 〕 Yasui, T., "The CES Production Function: A Note," *Em,* 33 (1965), 646-48.

〔 107 〕 Zarembka, P. "On the Empirical Relevance of the CES Production Function," *REStat,* 52 (1970), 41-53.

〔 108 〕 Zellner, A. and N. S. Revankar, "Generalized Production Functions," 36 (1969), 241-250.

〔 109 〕 Zellner, A., J. Kmenta, and J. Dreze, "Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Functions Model," *Em*, 34 (1966), 784-95.