Negative Transitivityに関する いくつかの十分条件について

橋 本 寛

1．はじめに

有限集合上の二項関係はブール行列で表現できるので，ブール行列の性質を調べることにより，対応する関係の性質を明らかにすることができる。本論文では，関係を表現する行列がnegatively transitive関係を表現する行列となるためのいくつかの十分条件を示している。このnegatively transitive関係は選好関係などの議論において現われる応用上重要な関係である[(1)(2)(15)(16)]。この関係の基本的性質については，これまでにも種々調べられており，例えばnegatively transitive関係が連結性のもとで推移関係と密接な関連を有していることはよく知られている[(4)-(7)(11)(13)]。

2．演算の定義

以下の議論において必要となる演算を定める。まず，0，1の値をとるx，yに対して $x \vee y=\max(x,y)$，$x \wedge y=\min(x, y)$，$\bar{x}=1-x$ と定める。

次に，0，1の要素をもつn次ブール行列$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$に対して

$R \vee S=[r_{ij} \vee s_{ij}]$

$R \wedge S=[r_{ij} \wedge s_{ij}]$

$\bar{R}=[\bar{r}_{ij}]$

$R'=[r_{ji}]$（転置）

$\triangle R=R \wedge \bar{R}'$

$\triangledown R=R \wedge R'$

$R \times S=[(r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})]$

$R^1=R$

$R^{k+1}=R^k \times R \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$

$R \leqq S \Longleftrightarrow$ すべてのi，$j=1$，2，…，nに対して$r_{ij} \leqq s_{ij}$

と定義する。

また，単位行列をIで表わし，$I=[\delta_{ij}]$とする。ここにδ_{ij}はクロネッカーのデルタである。一般に$R^k=[r^{(k)}_{ij}]$とおき$R^0=I$とする。したがって，このとき$r^{(0)}_{ij}=\delta_{ij}$となり，$r^{(0)}_{ii}=1$となる。さらに，全要素が1の行列をEで，全要素が0の行列をOで表わす。このような定義のもとで$\triangledown R \leqq I$なるRは反対称的関係を表わす行列となり，$\triangledown R=O$なるRは非対称的関係を表わし，$R \vee R' \vee I=E$なるRは連結的関係を表現する行列となる。$I \leqq R$なるRは反射的であるといわれ，$R^2 \leqq R$なるRは推移的であるといわれる。$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$であればRはnegatively transitiveであるといわれる。Rがnegatively transitiveであれば，任意のi，j，kに対して，

$r_{ik}=r_{kj}=0 \Rightarrow r_{ij}=0$

となる。すなわち，任意のi，jに対して，

$r_{ij}=1 \Rightarrow$ すべてのkに対し，$r_{ik}=1$または$r_{kj}=1$となる。

3．結　果

与えられたブール行列 R が $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ となる条件とそれに関連する性質を示す。

［性質 1］

$R \vee I \geqq \bar{R}' \wedge \bar{I}$, $\bar{R}' \vee I \geqq (R \wedge \bar{I})^2 \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

（証明） $r_{ik} = r_{kj} = 0$ とおき $r_{ij} = 0$ となることを示す。

(1) $i = k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 0$

(2) $k = j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 0$

(3) $i \neq k$, $k \neq j$, $i = j$ のとき

$r_{ik} = 0$, $R \vee I \geqq \bar{R}' \wedge \bar{I}$ によって $r_{ki} = 1$

しかし，$r_{ki} = 0$ であり，矛盾するので，この場合はありえない。

(4) $i \neq k$, $k \neq j$, $i \neq j$ のとき

$r_{ki} = r_{jk} = 1$。よって $r_{jk} \wedge r_{ki} = 1$ となり，$\bar{R}' \vee I \geqq (R \wedge \bar{I})^2$ から $r_{ij} = 0$ となる。 （証明終）

なお，上記の性質 1 はすでに知られている次の性質[6]の特別な場合となっている。

$R \vee R' \vee I = E$, $(\triangle R)^2 \leqq \bar{R}' \vee I \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

すなわち，これの特別な場合となっていることは，$R \vee I \geqq \bar{R}' \wedge \bar{I}$ が $R \vee R' \vee I = E$ と同値であること，および $\triangle R = R \wedge \bar{R}' \leqq R \wedge \bar{I}$ であることから容易にわかる。また，この性質 1 は先で示す性質12の特別な場合ともなっている。

［性質 2］

$R \vee I \geqq \bar{R}' \wedge \bar{I}$, $\bar{R}' \vee I \geqq R^2 \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

（証明） 性質 1 による。 （証明終）

［性質3］

$R \vee I \geqq \bar{R}' \wedge \bar{I}$, $\bar{R}' \vee I \geqq R^2 \vee R \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　性質2による。　(証明終)

［性質4］

$R \vee I \geqq \bar{R}' \vee I \geqq R^2 \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　性質2による。　(証明終)

［性質5］

$R \geqq \bar{R}' \vee I \geqq R^2 \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　性質4による。　(証明終)

［性質6］

$R \geqq \bar{R}' \vee I \geqq R^2 \vee R \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　性質5による。　(証明終)

なお，$R^2 \vee R \geqq R$ であるから $R \geqq \bar{R}' \vee I \geqq R^2 \vee R$ は $R = \bar{R}' \vee I = R^2 \vee R$ と同値である。

［性質7］

ある ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$)に対して $R^{\ell} \vee I \geqq \bar{R}' \wedge \bar{I}$, $\bar{R}' \vee I \geqq R^{2\ell} \vee R^{2\ell-1} \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　$\ell = 1$ のとき性質3によって成立するので $\ell \geqq 2$ とする。$r_{ik} = r_{kj} = 0$ とおき $r_{ij} = 0$ となることを示す。

(1)　$i = k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 0$

(2)　$k = j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 0$

(3)　$i \neq k$, $k \neq j$, $i = j$ のとき

$r_{ik} = 0$, $r_{ki} = 0$, $r_{ki}^{(\ell)} = 1$, $r_{ik}^{(\ell)} = 1$

したがって，ある $m \neq i, k$ に対して $r_{ii}^{(a)} \wedge r_{im} \wedge r_{mk}^{(\ell-a-1)} = 1$。ここに $0 \leqq a \leqq \ell - 2$ で，$r_{ii}^{(0)} = 1$ である。$R^{2\ell-1} \leqq \bar{R}' \vee I$ だから $r_{mi}^{(2\ell-1)} = 0$。ところで

$r_{mk}^{(\ell-a-1)}=1$，$r_{ki}^{(\ell)}=1$，$r_{ii}^{(a)}=1$。よって $r_{mi}^{(2\ell-1)}=1$ となるが，これは矛盾するので，この場合はありえない。

(4)　$i\neq k$，$k\neq j$，$i\neq j$ のとき

$r_{ik}=0$，$r_{kj}=0$ によって $r_{ki}^{(\ell)}=r_{jk}^{(\ell)}=1$。したがって $r_{ji}^{(2\ell)}=1$ となる。ところで $R^{2\ell}\leqq\bar{R}'\vee I$ によって $r_{ij}=0$ となる。　(証明終)

［性質 8］

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell}\geqq\bar{R}'\vee I\geqq R^{2\ell}\vee R^{2\ell-1}\Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　$R^{\ell}\vee I\geqq R^{\ell}\geqq\bar{R}'\vee I\geqq\bar{R}'\geqq\bar{R}'\wedge\bar{I}$

したがって性質 7 によって $(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$。　(証明終)

［性質 9］

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell}=R^{2\ell-1}=R^{2\ell}=\bar{R}'\vee I\Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　性質 8 による。　(証明終)

［性質10］

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{\ell}=R^{\ell+1}=\bar{R}'\vee I\Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　性質 9 による。　(証明終)

［性質11］

$R\vee R'\vee I=E$ のとき

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $(R\wedge\bar{I})^{3\ell-1}\leqq R\vee\bar{R}'\vee I\Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　$r_{ik}=r_{kj}=0$ とおき $r_{ij}=0$ となることを示す。

(1)　$i=k$ のとき

$r_{ij}=r_{kj}=0$

(2)　$k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=0$

(3)　$i\neq k$，$k\neq j$ のとき

$S=R\wedge\bar{I}$ とおく。$r_{ik}=r_{kj}=0$ および $R\vee R'\vee I=E$ によって $i\neq j$。また $r_{ki}=r_{jk}=1$。もし $r_{ij}=1$ とすれば $r_{ij}=r_{jk}=r_{ki}=1$ によって $s_{ik}^{(2)}=1$，$s_{ii}^{(3)}=1$。したがって $s_{ik}^{(3\ell-1)}=s_{ik}^{(3(\ell-1)+2)}\geqq s_{ii}^{(3(\ell-1))}\wedge s_{ik}^{(2)}=1$ となり，$r_{ik}\vee\bar{r}_{ki}\vee\delta_{ik}=$

1となる。いま $r_{ik}=0$ かつ $i\neq k$ だから $\bar{r}_{ki}=1$。しかし，これは $r_{ki}=1$ と矛盾する。ゆえに $r_{ij}=0$。　(証明終)

[性質12]

$R\vee R'\vee I=E,\ (R\wedge\bar{I})^2\leqq R\vee\bar{R}'\vee I\ \Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　性質11による。　(証明終)

[性質13]

$R\vee R'\vee I=E,\ (R\wedge\bar{I})^2\leqq R\wedge\bar{I}\ \Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　性質12による。　(証明終)

[性質14]

$R\vee R'\vee I=E,\ (R\wedge\bar{I})\times R\leqq R\ \Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq(R\wedge\bar{I})\times R\leqq R$ だから性質12によって $(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$ となる。　(証明終)

[性質15]

$R\vee R'\vee I=E,\ R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R\ \Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　$(R\wedge\bar{I})^2\leqq R\times(R\wedge\bar{I})\leqq R$ だから性質12よって $(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$ となる。

(証明終)

[性質16]

$R\vee R'\vee I=E,\ R^2\leqq R\vee\bar{R}'\vee I\ \Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　性質12による。　(証明終)

[性質17]

$R\vee R'=E$ のとき

ある ℓ ($\ell=2,\ 3,\ \cdots$) に対して $R^{\ell}\leqq R\vee\bar{R}'\vee I\ \Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　$I\leqq R$ によって $R^2\leqq R^{\ell}\leqq R\vee\bar{R}'\vee I$ だから性質16によって $(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$。　(証明終)

[性質18]

$R=R^2=R\vee\bar{R}'\vee I\ \Rightarrow(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$

(証明)　$R=R\vee\bar{R}'\vee I$ より $R\vee R'=R\vee\bar{R}'\vee I\vee R'=E$。

したがって性質17によって $(\bar{R})^2\leqq\bar{R}$。　(証明終)

[性質19][12]

ある h, ℓ (h, $\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{2h\ell-1} \leqq \bar{R}' \vee I$, $\bar{R}' \leqq R^{\ell} \vee I \Rightarrow R \vee R' \vee I = E$

[性質20]

ある h, ℓ (h, $\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{6h\ell-1} \leqq \bar{R}' \vee I, \bar{R}' \leqq R^{\ell} \vee I \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　性質19によって $R \vee R' \vee I = E$。したがって性質11によって $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$。　(証明終)

[性質21]

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{6\ell-1} = \bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　性質20による。　(証明終)

なお，ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{6\ell-1} = \bar{R}' \vee I = R^{\ell} \vee I$ となるとき，$R \vee R' = E$ となることが知られている[14]。

[性質22][12]

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{12\ell-7} = \bar{R}' \vee I = R^{6\ell-3} \vee I \Rightarrow R \vee R' = E$

[性質23]

ある ℓ ($\ell=1, 2, \cdots$) に対して $R^{12\ell-7} = \bar{R}' \vee I = R^{6\ell-3} \vee I \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　性質22によって $R \vee R' = E$ となる。ところで $R^{12\ell-7} = R^{3(4\ell-2)-1}$ であるから，性質11によって $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$。　(証明終)

[性質24]

$\bigtriangledown R = O$, $(\bar{R})^2 \leqq R' \vee I \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)　$r_{ik} = r_{kj} = 0$ とおき，$r_{ij} = 0$ となることを示す。

(1)　$i=k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 0$

(2)　$k=j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 0$

(3)　$i=j$ のとき

$r_{ij} = r_{ii} = 0$

(4)　$i \neq k,\ k \neq j,\ i \neq j$ のとき

$(\bar{R})^2 \leqq R' \vee I$ によって $r_{ji}=1$。ところで $\triangledown R = O$ であるから $r_{ij}=0$。

(証明終)

なお，一般には

$$\triangledown R \leqq I,\ (\bar{R})^2 \leqq R' \vee I \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$$

とはいえない。いま

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad (\bar{R})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であって，$\triangledown R \leqq I$，$(\bar{R})^2 \leqq R' \vee I$ となるが，$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ とはならない。

［性質25］

$$R \vee R' \vee I = E,\ (\bar{R})^2 \leqq \bar{R} \Rightarrow (\bar{R} \vee I)^2 \leqq R' \vee I$$

(証明)　$\bar{r}_{ik} \vee \delta_{ik} = \bar{r}_{kj} \vee \delta_{kj} = 1$ とおき，$r_{ji} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから $i \neq j$ とする。

(1)　$i \neq k,\ k \neq j$ のとき

$r_{ik} = r_{kj} = 0$ だから $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ によって $r_{ij}=0$ となり，$R \vee R' \vee I = E$ によって $r_{ji}=1$。

(2)　$i \neq k,\ k = j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 0$。したがって $r_{ji}=1$。

(3)　$i = k,\ k \neq j$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 0$。したがって $r_{ji}=1$。　(証明終)

［性質26］

$$(\bar{R} \vee I)^2 \leqq R' \vee I \Rightarrow R \vee R' \vee I = E$$

(証明)　$r_{ij}=0\ (i \neq j)$ とすれば $(\bar{R} \vee I)^2 \leqq R' \vee I$ によって $r_{ji}=1$。ゆえに $R \vee R' \vee I = E$。　(証明終)

[性質27]

$R \vee T = P,\ S \leqq \bar{R} \Rightarrow S \wedge P \leqq T$

(証明)　$S \leqq \bar{R}$ から

$S \wedge P \leqq \bar{R} \wedge P = \bar{R} \wedge (R \vee T) = \bar{R} \wedge T \leqq T$　(証明終)

[性質28]

$R \vee R' \vee I = E,\ (\bar{R})^2 \leqq \bar{R} \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq R' \vee I$

(証明)　性質27において，$T = R' \vee I$，$P = E$，$S = (\bar{R})^2$とおけば，$(\bar{R})^2 \leqq R' \vee I$。　(証明終)

[性質29]

$R \vee R' \vee I = E,\ \nabla R = O$ のとき

$(\bar{R})^2 \leqq R' \vee I \Leftrightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)

(1)　$(\bar{R})^2 \leqq R' \vee I$ のとき

性質24によって$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$。

(2)　$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ のとき

性質28によって$(\bar{R})^2 \leqq R' \vee I$。　(証明終)

[性質30]

$R \vee R' \vee I = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$(\bar{R})^2 \leqq R' \vee I,\ \nabla R = O$

(2)　$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R},\ \nabla R = O$

(証明)　性質29による。　(証明終)

$R \vee R' \vee I = E$ のもとで，$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$, $\nabla R = O$ と同値になる条件として次の性質も知られている。

[性質31][(4)(9)]

$R \vee R' \vee I = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$

(2)　$R^2 \leqq R,\ \nabla R = O$

(3)　$R^n = O$

(4)　$R^3 \wedge I = O$, $\bigtriangledown R = O$

(5)　すべての k $(k=1, 2, \cdots)$ に対して $R^k \leqq \bar{R}'$

(6)　$R^5 \leqq \bar{R}'$

(7)　ある ℓ $(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{6\ell+5} \leqq \bar{R}'$

(8)　$(R^2 \vee R^3) \wedge I = O$

(9)　$R^6 \wedge I = O$

(10)　$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$, $\bigtriangledown R = O$

上記の性質における $R \vee R' \vee I = E$ かつ $\bigtriangledown R = O$ なる R はいわゆるトーナメントを表現する行列となっている。

[性質32]

$$\bigtriangledown R \leqq I,\ (\bar{R})^2 \leqq R' \wedge \bar{I} \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$$

(証明)　$r_{ik} = r_{kj} = 0$ とおき，$r_{ij} = 0$ となることを示す。$(\bar{R})^2 \leqq R' \wedge \bar{I}$ によって $r_{ji} \wedge \bar{\delta}_{ij} = 1$，すなわち $r_{ji} = 1$，$i \neq j$ となる。したがって $\bigtriangledown R \leqq I$ によって $r_{ij} = 0$。　(証明終)

[性質33][8]

$$(\bar{R})^2 \leqq \bigtriangleup(\bar{R}) \Longleftrightarrow R \vee R' = E,\ (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$$

(証明)

(1)　$(\bar{R})^2 \leqq \bigtriangleup(\bar{R})$ のとき

$$(\bar{R})^2 \leqq \bigtriangleup(\bar{R}) = \bar{R} \wedge R' \leqq \bar{R}$$

もし $r_{ij} = r_{ji} = 0$ とすれば $\bar{r}_{ii} \wedge r_{ii} = 1$ となるが，これは矛盾する。

よって $R \vee R' = E$。

(2)　$R \vee R' = E$, $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ のとき

$r_{ik} = r_{kj} = 0$ とおけば $r_{ij} = 0$。$R \vee R' = E$ によって $r_{ji} = 1$。

したがって $\bar{r}_{ij} \wedge r_{ji} = 1$。ゆえに $(\bar{R})^2 \leqq \bigtriangleup(\bar{R})$。　(証明終)

[性質34]

$$R \vee R' = E,\ (\bar{R})^2 \leqq \bar{R} \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq R' \wedge \bar{I}$$

(証明)　性質33によって

$(\bar{R})^2 \leqq \triangle(\bar{R}) = \bar{R} \wedge R' \leqq R' \wedge \bar{I}$　(証明終)

[性質35]

$R \vee R' = E,\ (\bar{R})^2 \leqq \bar{R} \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq R'$

(証明)　性質34による。　(証明終)

この性質35はすでに示している性質28からも容易に得られる。

[性質36]

$R \vee R' = E,\ \triangledown R \leqq I$ のとき

$(\bar{R})^2 \leqq R' \wedge \bar{I} \Leftrightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)

(1)　$(\bar{R})^2 \leqq R' \wedge \bar{I}$ のとき

性質32によって $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$。

(2)　$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ のとき

性質34によって $(\bar{R})^2 \leqq R' \wedge \bar{I}$。　(証明終)

なお，一般には

$R \vee R' = E,\ (\bar{R})^2 \leqq R' \wedge \bar{I} \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

とはならない。いま

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad (\bar{R})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad R' \wedge \bar{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であって，$R \vee R' = E,\ (\bar{R})^2 \leqq R' \wedge \bar{I}$ となるが，$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ とはならない。

ところで，

$\triangledown R \leqq I \Leftrightarrow R \wedge \bar{I} = \triangle R$

であり(7)，また

$\triangle(R') = \triangle(\bar{R})$

であるので(3)，性質36より

$R \vee R' = E$, $\triangledown R \leqq I$ のとき

$$(\bar{R})^2 \leqq \triangle(\bar{R}) \Longleftrightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$$

となるが，$R' \wedge \bar{I}$ を $\triangle(\bar{R})$ で置き換えたときは，すでに性質33で示したように $\triangledown R \leqq I$ は不要となる。

［性質37］

$$(\bar{R} \vee I)^2 \leqq R' \vee I,\ \triangledown R \leqq I \Rightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$$

（証明） $r_{ik} = r_{kj} = 0$ とおき，$r_{ij} = 0$ となることを示す。

(1) $i = k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 0$

(2) $k = j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 0$

(3) $i \neq k$, $k \neq j$, $i = j$ のとき

$r_{ik} = r_{ki} = 0$ だから，$\bar{r}_{ik} \vee \delta_{ik} = 1$ となり，また $\bar{r}_{ii} \vee \delta_{ii} = 1$ だから $(\bar{R} \vee I)^2 \leqq R' \vee I$ によって $r_{ki} = 1$ となるが，これは矛盾する。したがって，この場合はありえない。

(4) $i \neq k$, $k \neq j$, $i \neq j$ のとき

$(\bar{R} \vee I)^2 \leqq R' \vee I$ によって $r_{ji} = 1$ となり，$\triangledown R \leqq I$ によって $r_{ij} = 0$ となる。

（証明終）

［性質38］

$R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R} \Rightarrow (\bar{R} \vee I)^2 \leqq R' \vee I$$

（証明） $S = [s_{ij}] = \bar{R} \vee I$ とおく。$s_{ik} = s_{kj} = 1$ とするとき $r_{ji} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$i = j$ のときは明らかであるから $i \neq j$ とする。

$s_{ik} = s_{kj} = 1$ によって

$\bar{r}_{ik} \vee \delta_{ik} = 1$, $\bar{r}_{kj} \vee \delta_{kj} = 1$

(1) $i = k$ のとき

$\bar{r}_{ij} \vee \delta_{ij}=1$ となるが，$i \neq j$ だから $r_{ij}=0$ となり，$R \vee R' \vee I=E$ によって $r_{ji}=1$。

(2)　$k=j$ のとき

$\bar{r}_{ij} \vee \delta_{ij}=1$ となるが，$i \neq j$ だから $r_{ij}=0$ となり，$R \vee R' \vee I=E$ によって $r_{ji}=1$。

(3)　$i \neq k$，$k \neq j$ のとき

$r_{ik}=0$，$r_{kj}=0$ となり，$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ によって $r_{ij}=0$ となる。したがって，$R \vee R' \vee I=E$ から $r_{ji}=1$ となる。　(証明終)

[性質39]

$R \vee R' \vee I=E$ のとき

$(\bar{R} \vee I)^2 \leqq R' \vee I,\ \triangledown R \leqq I \Longleftrightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R},\ \triangledown R \leqq I$

(証明)　性質37および性質38による。　(証明終)

$R \vee R' \vee I=E$ のもとで $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$, $\triangledown R \leqq I$ と同値になる条件として次の性質が知られている。また文献(13)においても多数の同値条件が示されている。

[性質40][7][9]

$R \vee R' \vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R,\ \triangledown R \leqq I$

(2)　$(R \wedge \bar{I})^n=O$

(3)　$(R \wedge \bar{I})^3 \wedge I=O,\ \triangledown R \leqq I$

(4)　$(\triangle R)^3 \wedge I=O,\ \triangledown R \leqq I$

(5)　すべての k $(k=1, 2, \cdots)$ に対して $R^k \leqq \bar{R}' \vee I$

(6)　$R^5 \leqq \bar{R}' \vee I$

(7)　ある ℓ $(\ell=0, 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{5+6\ell} \leqq \bar{R}' \vee I$

(8)　$(\bar{R})^2 \leqq \bar{R},\ \triangledown R \leqq I$

[性質41]

$R \vee R' \vee I=E$ のとき

$(\bar{R} \vee I)^2 \leqq \bar{R} \vee I \Longleftrightarrow (\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$

(証明)

(1) $(\bar{R} \vee I)^2 \leqq \bar{R} \vee I$ のとき

$r_{ik} = r_{kj} = 0$ とおき $r_{ij} = 0$ となることを示す。

(a) $i = k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 0$

(b) $k = j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 0$

(c) $i \neq k$, $k \neq j$ のとき

$R \vee R' \vee I = E$ によって $i \neq j$。$(\bar{R} \vee I)^2 \leqq \bar{R} \vee I$ によって $\bar{r}_{ij} = 1$ すなわち $r_{ij} = 0$。

(2) $(\bar{R})^2 \leqq \bar{R}$ のとき

$(\bar{R} \vee I)^2 = (\bar{R})^2 \vee \bar{R} \vee \bar{R} \vee I = \bar{R} \vee I$ (証明終)

与えられたRが $R \vee R' \vee I = E$ のもとで negatively transitive となる条件として次のような性質も知られている。

[性質42][10]

$R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$R^2 \leqq I \Rightarrow (\bar{R})^2 = \bar{R}$$

なお, Rの次数nが3以上のとき, $R \vee R' \vee I = E$ かつ $R^2 \leqq I$ となるRは存在しない[10]。

4. むすび

本論文では, negatively transitive 関係について考察をおこない, その興味深い性質のいくつかを明らかにすることができた。とくに, 与えられた関係行列が negatively transitive となるための種々の条件と若干の必要十分条件を示した。これらはほとんど自明であるけれども従来余り知られて

いない性質のように思われる。negatively transitive 関係はトーナメントや全順序と密接な関連があり，本論文の結果はそれらの議論においても有用であろうと考えられる。

参 考 文 献

1) Fishburn, P.C.: "The Theory of Social Choice", Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973).
2) Golumbic, M.C.: "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs", Academic Press, New York (1980).
3) 橋本　寛："推移関係とブール行列の簡約", 電子通信学会研究会資料 AL80-9 (1980年5月).
4) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第34巻, 第3・4号, pp.387-405 (昭和60年6月).
5) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質II", 山口経済学雑誌, 第35巻, 第3・4号, pp.281-293 (昭和61年1月).
6) 橋本　寛："Negatively Transitive 関係の性質", 山口経済学雑誌, 第36巻, 第1・2号, pp.41-58 (昭和61年9月).
7) 橋本　寛："連結的関係に関する若干の性質", 山口経済学雑誌, 第36巻, 第5・6号, pp.245-261 (昭和62年5月).
8) Hashimoto, H.: "Properties of negatively transitive fuzzy relations", Preprints of Second IFSA Congress, Tokyo, pp.540-543 (July, 1987).
9) 橋本　寛："連結性のもとでの関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第37巻, 第1・2号, pp.75-88 (昭和62年9月).
10) 橋本　寛："Vacuously Transitive 関係の一般化", 山口経済学雑誌, 第38巻, 第1・2号, pp.19-37 (平成元年1月).
11) 橋本　寛："連結的関係行列の初等的性質", 山口経済学雑誌, 第38巻, 第3・4号, pp.557-576 (平成元年7月).
12) 橋本　寛："関係の連結性に関するある種の十分条件について", 山口経済学雑誌, 第38巻, 第5・6号, pp.783-797 (平成元年11月).
13) 橋本　寛："変更された推移性と連結的関係行列", 山口経済学雑誌, 第39巻, 第3・4号, pp.397-416 (平成2年11月).
14) 橋本　寛："反射的で反対称的な連結的推移関係", 山口経済学雑誌, 第39巻, 第5・6号, pp.621-637 (平成3年7月).
15) Roberts, F.S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to social, biological, and environmental problems", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

16) Yager, R.R.: "Some properties of fuzzy relationships", Cybernetics and Systems, 12, pp.123-140 (1981).