設備の稼働期間の有限性と投資の q 理論*)

中 村 保

Ⅰ. 問題

企業による投資行動を明示的なモデルに基づいて理論的に導出する試みとして現在標準的なものは，投資に関する調整費用を導入した動学モデルである。この調整費用モデルは，Jorgenson のいわゆる「新古典派モデル」よりも以下の諸点において優れていると考えられている。(1)時間を連続的に扱った新古典派モデルでは，投資率が無限大になるといういわゆる「ハーベルモーの問題」が生じ，「望ましい資本ストック」は導出できても，フローとしての最適な投資を説明できないが，調整費用モデルでは最適投資率を直接導出できる。(2)新古典派モデルでは，Arrow (1964) が指摘する“myopic decision rule”が支配しているのに対して，調整費用モデルでは意志決定が遠視眼的になっている。すなわち，“hyperopic decision rule”

*) 本稿で考察している問題は、最初、筆者が神戸大学大学院に在籍していた時、当時神戸大学で研究されていた静岡大学の石橋太郎助教授より指摘されたものです。石橋先生が提示された問題は、本稿で扱っている問題よりかなり大きなものでしたので、その意味において、本稿は先生への部分的な回答にしかなっていません。当時有益な示唆を与え下さった石橋先生、神戸大学の足立英之教授及び足立ゼミナールの方々に深く感謝します。また、言うまでもないことですが、本稿に残存する誤りその他はすべて筆者個人の責任に帰するものです。

が支配している。(3)調整費用モデルから導出される投資関数はTobinのq理論としても解釈される。投資はこのqだけの（増加）関数になり，複雑な投資の決定要因がTobinのqと呼ばれる単一の変数に集約できる。[1)]

(1)にみられる新古典派モデルの欠点は，例えば小川(1978)で試みられているように，モデルを離散型で記述するか，Arrow(1964)，阿部(1990)等のように状態変数(資本ストック)のジャンプを許し，そのジャンプの幅として投資率を導出するということで克服することもできる。その意味においてそれほど本質的な問題ではない。[2)]

これに対して，(2)の点は新古典派モデルにおいて本質的な点である。新古典派的な異時点間の完全な資本の代替を許す一次同次の生産関数を前提にしたミクロモデルにおいては，調整費用なしに意志決定を遠視眼的にすることはできない。調整費用を仮定せずに遠視眼的な意志決定という性質をもった投資関数を導出するためには，「異時点間の完全な資本の代替」という想定に変更を加えなければならない。そのような試みとして，①ヴィンテージ生産関数を用いたVirmani(1976)，足立(1990)等の分析，②設備の耐用期間を考慮した鷲田・置塩(1987)のモデルが挙げられる。[3)]

前述(3)の点に関しては実証の面から多くの批判がなされている。一言でいえば，Tobinのqの実証研究におけるパフォーマンスはかなり低いのである。[4)]

本稿で考察されるモデルは，基本的に調整費用タイプのものであるが，鷲田・置塩(1987)に従い，設備の物的耐用期間が有限であると想定されて

1) 調整費用モデルとTobinのq理論との関係については、Abel(1980)、Yoshikawa(1980)、Hayashi(1982)を参照。

2) しかしこの場合でも、利子率一定の下では、正の投資需要の恒常的な存在を論理的に説明できないという問題は残る。

3) 足立モデルには調整費用が導入されているが、それは投資の大きさを決めるという役割を果たしているだけで、意志決定を遠視眼的にしているのは、vintage生産関数という生産の構造の方である。

4) 例えば、Hayashi and Inoue(1991)を参照。

いる。その結果，投資はqの関数とはなるが，従来の投資関数とは異なり現在のqのみの関数とはならない。設備の稼働期間に限りがある場合，前述(3)にどのような変更が加えられなければならないか，すなわち，従来の投資のq理論にいかなる修正が必要かを検討することが本稿の第一の目的である。

また，従来のq理論に修正が加わった結果，現在のqが投資を説明しなくなるかもしれない。また，設備の稼働期間が有限であるために，“hyperopic decision rule”が成り立たなくなるかもしれない。これらの点についても本稿において検討を加える。

本稿の構成は以下の通りである。まず，次の節で本稿の分析の基礎となる命題を示す。次いで第Ⅲ節でモデルを提示し，第Ⅱ節の命題を適用して投資関数を導出する。第Ⅳ節ではその投資関数の性質について若干の考察を加え，最終節で今後の課題を述べる。

II．準備

以下で分析されるモデルは，以下の最大化問題と本質的に同じである。

【問題】

$$\underset{u(t)}{\mathrm{Max}}\int_0^{\infty} h(u(t), X(t), t)\,dt \tag{1}$$

$$\text{sub. to,}\quad X(t) \equiv \int_{t-T}^{t} u(v)\,dv, \qquad X(t), u(t) \geqq 0, \tag{2}$$

$$X(0) \quad \text{or} \quad \left\{ u(t)\ {}_{-T}^{\ 0} \right\}\ ;\ \text{given}, \tag{3}$$

但し，h(･)は凹関数，u(t)が制御変数でX(t)が状態変数である。

この問題の制約条件の(2)式は，それを時間 t で微分することで以下 のような動学的な制約条件に書き換えることができる。

$$\dot{X}(t)=u(t)-u(t-T) \tag{4}$$

上述の問題を解くためにハミルトニアン関数 H(・)を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} &H(u(t),u(t-T),X(t),\lambda(t),\lambda(t+T),t)\\ &\quad\equiv h(u(t),X(t),t)+\lambda(t)\{u(t)-u(t-T)\}-\lambda(t+T)u(t), \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$\lambda(t)$は補助変数と呼ばれるものである。

実行可能な内点解が存在すると仮定すると，以下の命題が成り立つ。[5)]

【命題】　大域的な最適経路の十分条件は，以下の条件を満足する piece-wise differentiable な関数 $\lambda(t)$が存在することである。[6)]

$$\frac{\partial H^*}{\partial u(t)}=0 \qquad \text{i.e.} \qquad h_u{}^*+\lambda(t)-\lambda(t+T)=0, \tag{6}$$

$$\dot{X}(t)=\frac{\partial H^*}{\partial u(t)}=u(t)-u(t-T), \tag{4}$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H^*}{\partial X(t)}=-h_x{}^*, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)X(t)=0, \qquad \lim_{t\to\infty}\lambda(t)\geqq 0, \tag{8}$$

但し，

$$\begin{aligned} &H^*\equiv H(u(t)^*,u(t-T),X(t),\lambda(t),\lambda(t+T),t)\\ &\quad\geqq H(u(t),u(t-T),X(t),\lambda(t),\lambda(t+T),t), \end{aligned}$$

5）具体的な問題についてではあるが、同様の命題がGlycopantis(1972)にもみられる。

6）横断性の条件(8)を除く、条件(6)(4)(7)は必要条件でもある。この点については、Kamien and Schwartz(1991)のPart II．Section19を参照。

$$h_u^* \equiv \frac{\partial h(\cdot)}{\partial u(t)}\Bigg|_{u(t)=u^*(t)}, \qquad h_X^* \equiv \frac{\partial h(\cdot)}{\partial u(t)}\Bigg|_{X(t)=X^*(t)}.$$

上の命題は，前述のような問題については，適切なハミルトニアン関数を定義することによって，一階の条件と横断性の条件を導出できることを教えてくれる。

次にこの命題を証明しておこう。

【証明】　$\{u^*(t), X^*(t)\}$ を最適経路，$\{u(t), X(t)\}$ を他の実行可能な経路の集合，そしてDを

$$D \equiv \lim_{s\to\infty}\int_0^s h(u^*(t), X^*(t), t)\,dt - \lim_{s\to\infty}\int_0^s h(u(t), X(t), t)\,dt$$
$$= \lim_{s\to\infty}\int_0^s [h(u^*(t), X^*(t), t) - h(u(t), X(t), t)]\,dt,$$

と定義すると，$D \geqq 0$を証明すればよい。

$h(\cdot)$が凹関数であることより，

$$h(u^*, X^*) - h(u, X) \geqq h_u^*(u^*-u) + h_X^*(X^*-X),$$

である。よって，

$$D \geqq D' \equiv \lim_{s\to\infty}\int_0^s [h_u^*\ \{u^*(t)-u(t)\} + h_X^*\ \{X^*(t)-X(t)\}]\,dt.$$

(6)，(7)の両式より，

$$D' = \lim_{s\to\infty}\int_0^s [\{\lambda(t+T) - \lambda(t)\}\{u^*(t) - u(t)\}$$
$$- \dot{\lambda}(t)\{X^*(t) - X(t)\}]\,dt.$$

第2項を部分積分すると，

$$D' = \lim_{s\to\infty}\Big\{\int_0^s [\{\lambda(t+T) - \lambda(t)\}\{u^*(t) - u(t)\}$$

$$-\lambda(t)\{\dot{X}^*(t)-\dot{X}(t)\}]\ dt.$$
$$-\lambda(t)\ [X^*(t)-X(t)]\Big|_0^s\Big\}.$$

(4)式を代入すると，

$$D' = \lim_{s\to\infty}\Big\{\int_0^s [\lambda(t+T)\{u^*(t)-u(t)\}$$
$$-\lambda(t)\{u^*(t-T)-u(t-T)\}]\ dt$$
$$-\lambda(t)\ [X^*(t)-X(t)]\Big|_0^s\Big\}.$$

計画の初期［0, T］の期間においては，過去の u(t) が u(t−T) として現われてくるので，$u^*(t-T)=u(t-T)$ である。よって以下のような関係が成り立つ。

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^s \lambda(t+T)\{u^*(t)-u(t)\}dt$$
$$=\lim_{s\to\infty}\int_0^s \lambda(t)\{u^*(t-T)-u(t-T)\}dt.$$

ゆえに，

$$D' = -\lim_{s\to\infty}\lambda(t)\ [X^*(t)-X(t)]\Big|_0^s.$$

(3)式より明らかなように，X(0) は与えられているので，$X^*(0)=X(0)$ である。よって，

$$D' = -\lim_{s\to\infty}\lambda(s)\ [X^*(s)-X(s)] = \lim_{s\to\infty}\lambda(s)X(s) - \lim_{s\to\infty}\lambda(s)X^*(s).$$

横断性の条件(8)と X(t) の非負性より，

$$D' = \lim_{s\to\infty}\lambda(s)X(s) \geqq 0.$$

ゆえに，D≧0である。　(証了)

III．モデル

以下のような企業の最適化問題を考える。

$$\underset{I(t)}{\mathrm{Max}}\int_0^\infty \{\pi(K(t)) - p_I(t)c(I(t))\}\exp(-\rho t)\,dt, \tag{9}$$

$$\text{sub. to,}\quad K(t) \equiv \int_{t-T}^{t} I(v)\,dv, \qquad K(t), I(t) \geqq 0, \tag{10}$$

$$K(0) \quad \text{or} \quad \left\{ I(t)\ {}_{-T}^{0} \right\} \quad \text{;given,} \tag{11}$$

但し，K(t)は資本ストック，$p_I(t)$は投資財価格，I(t)は投資率，ρは利子率（割引率）をそれぞれ表している。

また，$\pi(\cdot)$は利潤関数であり次のような性質を持つ。

$$\pi'(\cdot) > 0, \qquad \pi''(\cdot) \leqq 0. \tag{12}$$

$p_I(t)c(I(t))$は投資財の購入費用と設備の据え付けその他に伴う投資の調整費用を合わせたものであり，c(·)関数は通常想定されるようにconvex関数とする。

$$c(0) = 0, \qquad c'(0) = 1, \qquad c'(\cdot) > 1, \qquad c''(\cdot) > 0. \tag{13}$$

上記の問題が通常の企業の最適化問題と異なる点は制約条件(10)にある。Tは設備の物的耐用期間を表しており，(10)式はt時点で稼働可能な設備はt−T時点からt時点までに据え付けたれたものであることを示している。この式を時間で微分すると以下のような資本の運動方程式を得る。

$$\dot{K}(t) = I(t) - I(t-T) \tag{14}$$

上述の問題を解くために，以下のようなハミルトニアンH(t)を定義す

る。

$$H(t) \equiv \{\pi(K(t)) - p_I(t)c(I(t))\}\exp(-\rho t) + \mu(t)\{I(t) - I(t-T)\} - \mu(t+T)I(t), \tag{15}$$

但し，$\mu(\cdot)$は補助変数である。

内点解の存在を仮定すると，一階の条件及び横断性の条件は以下の通りである。

$$\{p_I(t)c'(I(t))\}\exp(-\rho t) = \mu(t) - \mu(t+T) \tag{16.a}$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - I(t-T) \tag{14}$$

$$\dot{\mu}(t) = -\pi'(K(t))\exp(-\rho t) \tag{16.b}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t)K(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \mu(t) \geqq 0, \tag{16.c}$$

分析の簡単化のために$q^*(t) \equiv \mu(t)\exp(\rho t)$，すなわち$q^*(t+T) \equiv \mu(t+T)\exp\{\rho(t+T)\}$と変数変換すると，前述の条件は次のように書き換えることができる。

$$p_I(t)c'(I(t)) = q^*(t) - q^*(t+T)\exp(-\rho T) \tag{17.a}$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - I(t-T) \tag{14}$$

$$\dot{q}^*(t) = \rho q^*(t) - \pi'(K(t)) \tag{17.b}$$

$$\lim_{t\to\infty} q^*(t)\exp(-\rho t)K(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} q^*(t)\exp(-\rho t) \geqq 0, \tag{17.c}$$

(17.b)式を横断性の条件(17.c)を考慮して解くと，

$$q^*(t) = \int_t^\infty \frac{\partial\pi(K(s))}{\partial K(s)} \exp\{-\rho(s-t)\}ds, \tag{18}$$

を得る。ここで，$q(t) \equiv q^*(t)/p_I(t)$と定義すると，(18)式より

$$q(t) = \frac{\displaystyle\int_t^\infty \frac{\partial\pi(K(s))}{\partial K(s)} \exp\{-\rho(s-t)\}ds}{p_I(t)}, \tag{19}$$

となり，$q(t)$はいわゆるTobinの限界qに他ならないことが示される。この$q(t)$を用いると(17.a)式は以下のように書き換えられる。

$$c'(I(t))=q(t)-q(t+T)\{p_I(t+T)/p_I(t)\}\exp(-\rho T). \tag{20}$$

(20)式がここで導出された投資関数の特徴を示している。投資は現在の限界q ($q(t)$) だけではなく将来の限界q，すなわち現在導入された設備がその寿命を終えるときのq ($q(t+T)$)，にも依存することを示している。もちろん，設備の物的耐用期間Tが無限大の時は以下のような通常のqタイプの投資関数になる。

$$c'(I(t))=q(t). \tag{21}$$

Ⅳ．分　析

本節では，投資とqの関係について簡単な分析を試みる。

そこでまず簡単化のために，$\pi(K(s))$が以下のような線型の関数であると想定しよう。

$$\pi(K(s))=r(t)K(s) \tag{22}$$

言うまでもなく$r(t)$は(粗)利潤率を表している。このような利潤関数は生産関数が一次同次で，かつ資本のみが(準)固定生産要素である完全競争企業の場合に得られる。このような想定は，通常の調整費用モデルでは一般的なものである。以上の想定の下では，投資関数は以下の諸式で表すことができる。

$$c'(I(t))=q(t)-q(t+T)\exp(-\rho T) \tag{23}$$

$$\dot{q}(t)=\rho q(t)-r(t) \tag{24.b}$$

$$\lim_{t \to \infty} q(t)\exp(-\rho t) \geqq 0, \tag{24.c}$$

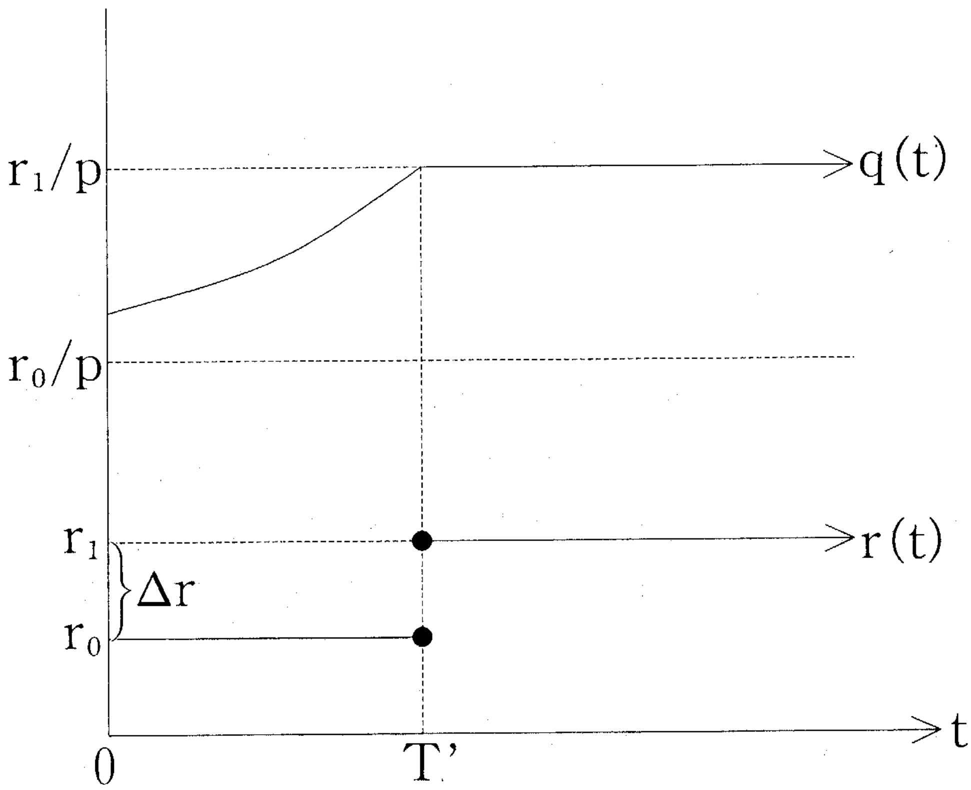
関数 $c'(I(t))$ は増加関数なので投資率 $I(t)$ は，$q(t)-q(t+T)\exp(-\rho T)$ の増加関数になる。

分析の簡単化のために，さらに以下のような想定を置く。

①企業は，投資財価格 $p_I(t)$ について静学的期待を抱く。それを一般性を失うことなく1とする。

②企業は， 利潤率 $r(t)$ の一回限りの恒久的な上昇が T'時点で起こると予想する。上昇する前の利潤率を r_0，上昇後のものを r_1 とし，その上昇幅を Δr とする。すなわち，

$$r_1 - r_0 = \Delta r > 0,$$



第 1 図

である。

この場合の利潤率 $r(t)$ と $q(t)$ の時間経路を描いたものが第1図である。

現在を0時点として，T'の大きさによって $q(0)$, $q(T)$ および投資率 $I(0)$ がどのように異なるかを調べてみよう。まず，基準とするために利潤率 $r(t)$ の上昇がない場合について $q(0)$，$q(T)$ を求めると，

$$q_0(0)=q_0(T)=r_0/\rho,$$
$$q_0(0)-q_0(T)\exp(-\rho T)=\{r_0/\rho\}\{1-\exp(-\rho T)\}$$

となる。それゆえ，投資に関して次のような最適条件が成り立っている。

$$c'(I(0))=\{r_0/\rho\}\{1-\exp(-\rho T)\}=\int_0^T r_0\exp(-\rho t)ds$$

上の式は，設備の購入・据付けのための限界的な費用がその設備が稼働期間を通じて生み出す限界的な利潤の現在価値に等しいことを示すものである。[7)]

① $T'<T$ の場合。

$$q_1(0)=(\Delta r/\rho)\exp(-\rho T')+(r_0/\rho),$$
$$q_1(T)=r_1/\rho,$$
$$q_1(0)-q_1(T)\exp(-\rho T)=\{r_0/\rho\}\{1-\exp(-\rho T)\}$$
$$+\{\Delta r/\rho\}\{\exp(-\rho T')-\exp(-\rho T)\}$$

② $T'=T$ の場合。

$$q_2(0)=(\Delta r/\rho)\exp(-\rho T')+(r_0/\rho),$$
$$q_2(T)=r_1/\rho,$$

7）言うまでもないことだが、同様の関係は、利潤率 $r(t)$ が時間と共に変化する場合でも成り立っている。

$$q_2(0)-q_2(T)\exp(-\rho T)=\{r_0/\rho\}\{1-\exp(-\rho T)\}$$

③ T'＞T の場合。

$$q_3(0)=(\Delta r/\rho)\exp(-\rho T')+(r_0/\rho),$$

$$q_3(T)=(\Delta r/\rho)\exp\,[\rho(T-T')]+r_1/\rho,$$

$$q_3(0)-q_3(T)\exp(-\rho T)=\{r_0/\rho\}\{1-\exp(-\rho T)\}$$

それぞれの場合の $q(0)$ と投資率 $I(0)$ を比較すると次のような関係があることが分かる。

$$q_1(0)>q_2(0)>q_3(0)>q_0(0),$$

$$I_1(0)>I_2(0)=I_3(0)=I_0(0).$$

このことから直ちに次のことが言える。

i) 現在据付けられる設備がその寿命を終えた後に予想される利潤率の変化は，現在の投資に何ら影響を与えない。これに対して，現在据付けられる設備の稼働期間内の利潤率の変化は，それと同方向に現在の投資を変化させる。

ii) 利潤率の変化は，それがどの時点で起こると予想されるようとも，必ず現在の q を同方向に変化させる。

上述 i)は，投資について「設備の稼働期間内」という期間の明確な“myopic decision rule”が成り立っていることを示している。[8] これに対して， ii) が示すように，またその定義から明らかなように，q は完全に “hyperopic” な変数である。その結果として，現在の q が変化しても現行の投資が変化

8) これはごく自然なことの様に思えるが必ずしもそうではない。鶴田・置塩やKeynes (1936) が正しく指摘しているように、新旧設備の間に競合関係があれば、現在の投資設備が寿命を終えた後の外生変数も現行投資量に影響を与え得るのである。本稿では、利潤関数を線型と想定しているために新旧設備の間に競合がなく、それゆえにこのような結論が得られたものと思われる。

しないということが十分起こり得るのである。

通常，企業の寿命は，それが所有する設備等の物的資源や経営能力等の人的資源の寿命より遥かに永い。それゆえ，企業の現在価値の変化が，その企業が現在投下しようとしているこれらの資源が，その寿命を終えた後の将来における期待の変化によってもたらされたものであれば，当然それは現行の意志決定に影響を与えない。本稿の投資関数はそのような状況を説明しているのである。

企業の価値が資産市場で正しく評価されているならば，変数qは（最も簡単な場合）株価を資本ストックの（財市場における）置換費用で除した比率となる。それゆえ，ここで得られた投資関数は，仮に企業の価値が株式市場で正しく評価されているとしても，投資と株価の間には必ずしも一対一の対応関係があるわけではないことをも含意している。

V．結びにかえて

吉川(1992)は，投資に懐妊期間がある場合，懐妊期間中に発生する〝一時的なショック〟は，現在の株価には反映されるが，現行の投資決定には影響を与えないために，通常のq理論は成立しないことを論証している。これに対して，本稿のモデルは，設備の物的耐用期間が有限である場合，投資設備がその寿命を終えた後に生じる〝ショック〟は，それが恒久的なものであれ一時的なものであれ，現行の株価には折り込まれるが，投資の意志決定には何ら影響を与えないために，投資のq理論が成立しないことを主張するものである。もちろん，現実の株価は，いわゆる「ファンダメンタルズ」だけで決定されるものではなく，その他の種々の要因にも依存して決定されているであろう。そのためにTobinのqが投資を十分に説明しないのも事実であろう。しかし，吉川の分析や本稿のモデルは，もし株価が正確に企業の価値を反映していても，いやむしろ正確に反映している

からこそ，qが投資を十分に説明しないことを主張するものである。

本稿のモデルの拡張の方向として以下のようなものが考えられる。

①投資の懐妊期間も明示的に考慮する。

②設備に体化される技術進歩を考え，設備の稼働期間を経済的耐用期間として内生的に決定する。

③利潤関数を非線型として分析を進める。

モデルを①の点だけについてだけ拡張するのはそれほど困難ではない。しかし， 結論が吉川のものと本稿のものを合わせたものになるだけであり，その意味において，必ずしも意義のあるものとは思えない。これに対して，②及び③の点についての拡張はかなり困難なものかもしれないが，意義も大きいと考えられるので，それは今後の課題としたい。

参　考　文　献

Abel, A.B. (1980), "Emprical Investment Equations; An Integrative Framework", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, A supplement series to Journal of Monetary Economics*, Vol.12, pp.39-91.

Arrow, K.J. (1964), "Optimal Capital Policy, the Cost of Capital, and Myopic Decision Rules", Annuals of the Institute of Mathematics, 16. pp.21-31. *Quarterly Journal of Economics*, Vol.93:433-446.

Glycopantis, D. (1972), "Optimality Conditions in Certain Models with Intertemporally Dependent Tastes", *Western Economic Journal*, Vol.10, No.2 : pp139-155.

Hayashi, F. (1982), "Tobin's Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation", *Econometrica*, Vol.50,

———— and T.Inoue, (1991), "The Relation Between Firm Growth and Q Theory with Multiple Capital Goods: Theory and Evidence from Panel Data on Japanese Firms", *Econometrica*, Vol.59, No.3 pp.731-753.

Kamien, M.I. and N.L.Schwartz, (1991), *Dynamic Optimization, The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, Second Edition*, North-Holland.

Keynes, J.M. (1936), *The General Theory of Employment, Interest and Money*, London: Macmillan. (塩野谷佑一訳『雇用，利子および貨幣の一般理論』東洋経済新

報社，1983)
Varmani,A.(1976), "A Dynamic Model of the Firm", *Journal of Political Economy*, Vol.84: pp603-613.
Yoshikawa,H.(1980), "On the 'q' Theory of Investment", *American Economic Review*, Vol.70:738-743.
阿部文雄(1990)「ジョルゲンソンの投資関数」，利岡彰三・中尾訓生・板垣有記輔（編著）『ケインズ・マルクス・新古典派』晃洋書房.
足立英之(1989)「企業の投資と技術決定の動学モデル」『国民経済学雑誌』第159巻第3号 pp.49-64.
小川一夫(1978)「Jorgensonの投資関数」『六甲台論集』第5巻第3号　pp.30-47.
鷲田豊明・置塩信雄(1987)「予想貨幣賃金率と投資決定－ケインズ投資モデルの再考－」『季刊理論経済学』第38巻第3号 pp.212-222.
吉川　洋(1992)『日本経済とマクロ経済学』東洋経済新報社.