Homothetic Isoquant 生産関数について〔II〕

木　藤　正　典

1．はしがき

私は前論文〔5〕（以後論文Ｉと略称する）において，D. Soskice （〔7〕），S. Clemhort(〔1〕) 等によって提唱された homothetic isoquant 生産関数（以後 HI 生産関数と略称する）が現代経済理論研究のツールとしてどこまで使用可能であるかを，マクロモデルによって吟味し，innovation possibilty function を仮定した場合の均衡成長径路が存在するためには，HI 生産関数は結局のところ同次生産関数でなければならない事，即ちその場合は HI 生産関数は無意味である事を示した。この小論は，その続編として，HI 生産関数の吟味を異った方面から行い，前論文Ｉの部分的修正を行い，更に２部門理論の場合に及びたい。なお前論文Ｉと同様に次の様な記号を用いる。

Y ＝アウトプット，K ＝資本，L ＝労働

t ＝時間，$y = \dfrac{Y}{L}$，$k = \dfrac{K}{L}$，

$\omega = -\dfrac{dK}{dL}$ （限界代替率）

$\sigma = \dfrac{dk}{d\omega} \cdot \dfrac{\omega}{k}$ （代替弾力性）

$a = \dfrac{\partial Y}{\partial K} \cdot \dfrac{K}{Y}$ （資本弾力性）

$b = \dfrac{dY}{dL} \cdot \dfrac{L}{Y}$ （労働弾力性）

$m = a + b$ （規模関数）

２．均衡成長径路

〔Ｉ〕　一般の均衡成長径路

論文Ｉ第４節で考えられた動学的成長径路

$$\left.\begin{aligned} \dot{K} &= sYe^{-\eta t}-\mu K \\ \dot{L} &= \lambda L \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

を仮定する。ただし，s，η，μ，λ は定数で $0 < s < 1$，$\eta \geqq 0$，$0 \leqq \mu < 1$ であり，$\dot{K}$ は K の t に関する導関数を示す。生産関数は

$$Y = F(K, L) \tag{2.2}$$

であり，F は２回連続的微分可能であり，

$$K \geqq 0,\ L > 0,\ F \geqq 0,\ F_K \equiv \frac{\partial F}{\partial K} > 0,\ F_L \equiv \frac{\partial F}{\partial L} > 0$$

とする。

さて成長径路 (2.1) が $\widehat{K} \equiv \dot{K}/K =$ 定数 の均衡成長をなすための条件を求めることとする。(2.1) より

$$\widehat{K} = \frac{sYe^{-\eta t}}{K}-\mu \tag{2.3}$$

故に

$$(\widehat{K}+\mu)^{\frown} = \frac{\dot{\widehat{K}}}{(\widehat{K}+\mu)} = \widehat{Y}-\widehat{K}-\eta$$

$$= \frac{F_K}{F}\dot{K}+\frac{F_L}{F}\dot{L}-\widehat{K}-\eta$$

故に

$$\dot{\widehat{K}} = (\widehat{K}+\mu)\left(\frac{KF_K}{F}\widehat{K}+\frac{LF_L}{F}\lambda-\widehat{K}-\eta\right) \tag{2.4}$$

故に $\widehat{K} = \theta =$ 定数 なる径路が存在するためには

$$\frac{KF_K}{F}\theta+\frac{LF_L}{F}\lambda-\theta-\eta = 0$$

即ち

$$\theta KF_K+\lambda LF_L = (\theta+\eta)F \tag{2.5}$$

でなければならない。この偏微分方程式を解けば

$$\frac{dK}{\theta K} = \frac{dL}{\lambda L} = \frac{dF}{(\theta+\eta)F}$$

より

$$K^{\lambda} = c_1L^{\theta},\ F = c_2L^{\nu},\ \text{ただし}\ \nu = \frac{\theta+\eta}{\lambda}$$

を得る。故に (2.5) の解として

$$F = L^{\nu}\Phi\left(\frac{K^{\lambda}}{L^{\theta}}\right) \tag{2.6}$$

を得る。ここで Φ は 2 回連続的微分可能な任意の関数とする。(2.6)に対しては (2.3) より

$$\dot{\hat{K}} = (\hat{K}+\mu)\left(s\frac{L^{\nu}}{K}\Phi e^{-\eta t}\right)$$

$$= (\hat{K}+\mu)(\hat{\Phi}+\nu\hat{L}-\hat{K}-\eta)$$

$$(\hat{K}+\mu)\left\{\lambda\frac{K^{\lambda}}{L^{\theta}}\cdot\frac{\Phi'}{\Phi}-1\right\}(\hat{K}-\theta) \tag{2.7}$$

となり，$\lambda\frac{K^{\lambda}}{L^{\theta}}\cdot\frac{\Phi'}{\Phi} \lesseqgtr 1$ に従って均衡径路は安定, 不安定となる。然るに

$$a = \frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{K}{F} = \frac{\Phi'}{\Phi}\lambda\frac{K^{\lambda}}{L^{\theta}} \tag{2.8}$$

であるから $a \lesseqgtr 1$ に従って均衡径路は安定, 不安定となる。なお

$$u = \frac{K^{\lambda}}{L^{\theta}},\ \log\Phi(u) = H(u)$$

とおけば

$$a = \lambda uH'(u) \tag{2.9}$$

又同様に

$$b = \nu-\theta uH'(u) \tag{2.10}$$

故に

$$m = a+b = \nu+(\lambda-\theta)uH' \tag{2.11}$$

又

$$\omega = \frac{F_L}{F_K} = \frac{b}{a}k = k\frac{\nu - \theta u H'}{\lambda u H'} \tag{2.12}$$

なお(2.6)に対しては(2.9)より

$$\hat{a} = \hat{u} + \frac{H''}{H'}u\hat{u} = \hat{u}\left(1 + \frac{H''}{H'}u\right)$$

$$= \lambda(\hat{K} - \theta)\left(1 + \frac{H''}{H'}u\right) \tag{2.13}$$

故に均衡成長径路上では $a = a_0 =$ 一定となり，一般の成長径路上では $\hat{K} \to \theta$ のときは $a \to a_0$ となる。従って $a < 1$ のときは，(2.6)は $t \to \infty$ のとき $\hat{K} = \theta$，$a = a_0$ の均衡成長径路に近づく。

〔II〕 均衡成長径路と HI 生産関数

次に均衡成長をなす生産関数(2.6)が HI 生産関数であるための条件を求める。(2.12)より

$$\omega = k\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\nu}{H'u} - \theta\right\} \tag{2.14}$$

故に(2.6)が HI 生産関数であるためには，ω が K，L の 0 次同次関数でなければならない。故に $1/H'$ は u と同次数の同次関数でなければならない。故に H' は $\theta - \lambda$ 次の同次関数である。故にオイラーの定理より

$$K\frac{\partial H'}{\partial K} + L\frac{\partial H'}{\partial L} = (\theta - \lambda)H'$$

故に

$$(\lambda - \theta)uH'' = (\theta - \lambda)H'$$

故に

(イ) $\lambda = \theta$ のときは(2.6)より

$F = L^{\nu}\Phi(k)$，(ν次同次関数)

(ロ) $\lambda \neq \theta$ のときは

$$\frac{dH'}{du}u = -H'$$

故に　$H' = \frac{c_1}{u}$

故に　$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{c_1}{u}$

故に　$\Phi = c_2 u^{c_1}$

故に　$F = c_2 L^{\nu}\left(\frac{K^{\lambda}}{L^{\theta}}\right)^{c_1} = c_1 K^{c_1\lambda} L^{\nu - c_1\theta}$　(3.5)

故に(イ), (ロ)を綜合して，(2.2)の型の生産関数について均衡成長を問題とする限り，同次生産関数をＨＩ生産関数まで拡張する事は無意味である。なお(2.6)が同次生産関数であるための条件は，(2.11)において $m=$ 定数と考えればよい。故に

$$(\lambda-\theta)uH' = m-\nu$$

故に

(イ)　$\lambda=\theta$ なら $m=\nu$ (ν次同次関生産関数)

(ロ)　$\lambda\neq\theta$ なら $m\neq\nu$ で

$$H' = \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{m-\nu}{\lambda-\theta}\cdot\frac{1}{u}$$

となり(2.15)又は(2.16)と同一となる。即ち(2.6)が同次生産関数である条件とHI生産関数である条件とは同一である。

3．技術進歩がある場合の均衡成長径路

〔Ｉ〕 一般の場合

以上は(2.2)の型の生産関数についてであったが，以後は技術進歩のある場合の生産関数

$$Y = F(K, L, t) \tag{3.1}$$

について考察する。さて以後は(2.1)の成長径路を拡張して

$$\hat{K}=\frac{sYe^{-\eta t}}{K}-\mu \tag{3.2}$$

$$\hat{L}=G(L,t) \tag{3.3}$$

とする。ただし $G(L,t)$ は2回連続的微分可能であって，本節および次節では次の仮定を満足するものとする。

〔仮定〕 $G(L,t)\geqq 0$ であって，(3.3) は $L=L_0e^{\lambda t}$ (L_0＝一定) なる安定な成長径路をもつ。

仮定より(3.3)において $\hat{L}=\lambda$ のとき $\dot{\hat{L}}=0$ でなければならない。故に

$$\dot{\hat{L}}=G_LL\hat{L}+G_t=\lambda LG_L+G_t=0$$

この偏微分方程式を解けば

$$G=g\left(\frac{e^{\lambda t}}{L}\right) \tag{3.4}$$

ただし g は2回連続的微分可能な任意の関数である。(3.4) については

$$\dot{\hat{L}}=\frac{g'}{g}\cdot\frac{e^{\lambda t}}{L}(\lambda-\hat{L}) \tag{3.5}$$

故に仮定より(3.4)が安定的であるためには

$$g'(v)\geqq 0,\ ただし\ v=\frac{e^{\lambda t}}{L} \tag{3.6}$$

でなければならない。

さて(3.2), (3.3)が $\hat{K}=\theta$, $\hat{L}=\lambda$ なる均衡成長径路をもつとすれば(3.2) より

$$\dot{\hat{K}}=(\hat{K}+\mu)\left(\frac{KF_K}{F}\hat{K}+\frac{LF_L}{F}\hat{L}+\frac{F_t}{F}-\hat{K}-\eta\right)$$

であるから

$$\theta KF_K+\lambda LF_L+F_t=(\theta+\eta)F$$

でなければならない。この偏微分方程式を解けば

$$\frac{dK}{\theta K}=\frac{dL}{\lambda L}=\frac{dt}{1}=\frac{dF}{(\theta+\eta)F}$$

より解として

$$F=L^{\nu}\Phi\left(\frac{K^{\lambda}}{L^{\theta}},\ \frac{e^{\lambda t}}{L}\right)=L^{\nu}\Phi(u,v) \tag{3.7}$$

を得る。ただし Φ は任意関数である。(3.7)に関しては(2.9)—(2.12)と同様にして

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{\lambda_u\Phi_u}{\Phi}\\ b&=\nu-\left(\theta u\frac{\Phi_u}{\Phi}\right)\\ m&=\nu+(\lambda-\theta)u\frac{\Phi_u}{\Phi}-v\frac{\Phi_u}{\Phi}\\ \omega&=\frac{\nu\Phi-(\theta u\Phi_u+v\Phi_v)}{\lambda u\Phi_u}\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

なる関係式が成立する。また(3.7)に関しては

$$\begin{aligned}\dot{\hat{K}}&=(\hat{K}+\mu)\left\{\nu\hat{L}+\frac{\Phi_u}{\Phi}u(\lambda\hat{K}-\theta\hat{L})+\frac{\Phi_v}{\Phi}v(\lambda-\hat{L})-\hat{K}-\eta\right\}\\ &=(\hat{K}+\mu)\{(a-1)(\hat{K}-\theta)+b(\hat{L}-\lambda)\}\end{aligned} \tag{3.9}$$

故に $\hat{L}$ に関する仮定より

(イ)　$a\leqq 1$

(ロ)　$a>1$ で $\{(a-1)(\hat{K}-\theta)+b(\hat{L}-\lambda)\}(\hat{K}-\theta)<0$

の何れかであれば $\hat{K}=\theta$, $\hat{L}=\lambda$ なる均衡成長径路は安定である。それ以外の場合は不安定である。

なお $\log\Phi=H$ とおけば(2.13)と同様にして

$$\begin{aligned}\hat{a}&=\hat{u}+\hat{H}\\ &=\lambda(\hat{K}-\theta)\left(1+\frac{H_u}{H}u\right)+(\lambda-\hat{L})\left\{\theta\left(1+\frac{H_u}{H}u\right)+\frac{H_v}{H}v\right\}\end{aligned}$$

を得る。故に $\hat{K}=\theta$, $\hat{L}=\lambda$ の成長径路上では $a=a_0=$ 一定となり，(イ)ま

たは(ロ)が成立すれば $t\to\infty$ のとき $a\to a_0$ となる。

〔II〕 同次生産関数の場合

次に (3.7) が同次関数であるための条件を求めてみよう。(3.8)で m = 一定と考えれば

$$(\lambda-\theta)u\Phi_u-v\Phi_v=(m-\nu)\Phi \tag{3.10}$$

となる。ここで独立変数を u, v より

$$\begin{cases} x=u^{1/\lambda}v^{(\lambda-\theta)/\lambda}=ke^{(\lambda-\theta)t} \\ v=\dfrac{e^{\lambda t}}{L} \end{cases}$$

なる x, v に変換し

$$\Phi(u,v)=\Pi(x,v) \tag{3.11}$$

とおけば

$$\left.\begin{aligned} u\Phi_u&=\frac{x}{\lambda}\Pi_x \\ v\Phi_v&=\frac{\lambda-\theta}{\lambda}\Pi_x+v\Pi_v \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

となり，(3.10)は

$$-v\Pi_v=(m-\nu)\Pi$$

となる。これより

$$\Pi=\frac{1}{v^{m-\nu}}\Psi(x)$$

となる。従って

$$F=L^m e^{-(m-\nu)\lambda t}\Psi(ke^{(\lambda-\theta)t}) \tag{3.13}$$

を得る。ただし Ψ は任意関数である。

なお (3.13) は

$$\begin{cases} (BL)^m=L^m e^{-(m-\nu)\lambda t} \\ \dfrac{AK}{BL}=ke^{(\lambda-\theta)t} \end{cases}$$

即ち

$$\left.\begin{aligned} A &= e^{\frac{\nu\lambda - m\theta}{m}\cdot t} \\ B &= e^{\frac{(\nu - m)\lambda}{m}\cdot t} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

とおけば

$$F = (BL)^m \Psi\left(\frac{AL}{BK}\right)$$

となり factor augumenting な生産関数となる。従って $\lambda = \theta$ なら技術進歩はヒックス型中立である。

4. 技術進歩がある場合のＨＩ生産関数

〔I〕 一般の場合

技術進歩がある場合の生産関数(3.1)がHI生産関数であるための条件を求めることとする。変数を K, L より k, L に変換すれば(3.1)は

$$Y = F(K, L, t) = \Gamma(k, L, t) \tag{4.1}$$

となる。故に

$$\omega = L\frac{\Gamma_L}{\Gamma_k} - k$$

故に $\omega = kg(k, t)$ とおけば

$$L\frac{\Gamma_L}{\Gamma_k} - k = kg(k, t)$$

故に　$$k(1+g)\Gamma_k - L\Gamma_L = 0$$

この微分方程式を解けば

$$\Gamma = \Phi(L\Delta(k), t),\ \ \Delta(k) = \exp\left(\int\frac{dk}{(1+g)k}\right)$$

故にこの場合の一般形は

$$Y = \varphi\{f(K, L, t), t\} \tag{4.2}$$

であって，これが最も一般なHI生産関数である。ただし $f(K, L, t)$ は K, L の1次同次関数で，φ および f は2回連続的微分可能な関数である。($\varphi'(f) \neq 0$ とする。)

特に(4.2)が factor augumenting である場合を考えると

$$Y = F(U, V) \quad U = A(t)K, \quad V = B(t)L$$

これより

$$\frac{\omega}{k} = \frac{F_L}{F_K} \Big/ \frac{K}{L} = \frac{F_V BL}{F_U AK} = \frac{F_V}{F_U} \cdot \frac{V}{U}$$

故に $\frac{\omega}{k}$ は U, V のみの関数である。然るにHI生産関数であることから $\frac{\omega}{k}$ は K, L の0次同次関数であるから，U, V についても0次同次関数である。故に $\frac{\omega}{k}$ は $\frac{U}{V}$ のみの関数である。故にこれを $g\left(\frac{U}{V}\right)$ とおけば

$$\frac{F_V}{F_U} = \frac{U}{V} g\left(\frac{U}{V}\right)$$

となる。これは技術進歩がない場合の生産関数 $Y = F(K, L)$ がHI 生産関数である条件

$$\frac{F_L}{F_K} = \frac{K}{L} g\left(\frac{K}{L}\right)$$

と形式的に全く同一である。故に F は U, V の1次同次関数の関数である。即ち

$$F = \varphi\{f(A(t)K, B(t)L)\} \tag{4.3}$$

さて(4.2)から明らかな様に，前論文I第4節の式(2.2′)は一般的でない。しかし(4.1)が factor augumenting のときは(4.3)よりそれは正しい。従って前論文I第5節〔I〕は成立する。なお一般の場合の論文Iの(2.2′)については次の〔II〕でのべる。

〔II〕 均衡成長径路とHI生産関数

技術進歩がある場合に均衡成長径路をもつ生産関数(3.7)がHI生産関数であるための条件を求める。先づ(3.8)より

$$\frac{\omega}{k}=\frac{\nu\Phi-(\theta u\Phi_u+v\Phi_v)}{\lambda u\Phi_u}$$

変数を u，v より x，v に変換すれば(3.12)より

$$\frac{\omega}{k}=\frac{\nu\Pi-(x\Pi_x+v\Pi_v)}{x\Pi_x} \tag{4.4}$$

然るに ω は k，t のみの関数であるから，右辺も k，t のみの関数である。故に，右辺は x，v 従って k，t，L の関数であるが，L は含まない事になる。従って右辺は v を含まない。故に(4.4)は x のみの関数となる。これを $g(x)$ とおけば

$$\frac{\nu\Pi-(x\Pi_x+v\Pi_v)}{x\Pi_x}=g(x)$$

故に

$$(1+g)x\Pi_x+v\Pi_v=\nu\Pi \tag{4.5}$$

この偏微分方程式を解けば

$$\frac{dx}{(1+g)x}=\frac{dv}{v}=\frac{d\Pi}{\nu\Pi}$$

より

$$\Pi=v^{\nu}\Psi\left(\frac{\Delta(x)}{v}\right),\quad \Delta(x)=\exp\left(\int\frac{dx}{(1+g)x}\right).$$

を得る。故に

$$Y=e^{(\theta+\eta)t}\Psi(Le^{-\lambda t}\cdot\Delta(x)) \tag{4.6}$$

となる。なお $\Delta(x)$ を x の関数として与えれば

$$g(x)=\frac{\Delta(x)}{x\Delta'(t)}-1\ ,\ (\Delta'(x)\neq 0 \text{ と仮定する})$$

として $g(x)$ が定まる。(4.6)に対しては次の関係が成立する。

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{Y_{Lt}}{Y_L}-\frac{Y_{Kt}}{Y_K}=(\lambda-\theta)\frac{xg'}{g}$$

$$\frac{1}{\sigma}=\frac{\partial\omega}{\partial k}\cdot\frac{k}{\omega}=1+x\frac{g'}{g}$$

故に

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial t}=(\lambda-\theta)\frac{1-\sigma}{\sigma}$$

従って

$g(x)=$ 定数　なら(4.6)は Cobb−Douglas 生産関数

$g(x)=Ax^c$,（A, cは定数）なら(4.6)はCES生産関数

$\lambda=\theta$ 又は $g(x)=$ 定数　なら(4.6)は ヒツクス中立

である。

さて(4.6)においてmを定数とするとき

$$\Psi(X)=X^m,\ \{\Delta(x)\}^m=\phi(x)$$

とおけば(4.6)は

$$Y=L^m e^{(m-\nu)\lambda t}\phi(x)$$

となり(3.13)となる。従って(4.6)が同次関数となるのはこの場合に限る。故に第2節の技術進歩を伴わない場合と異り，HI生産関数の特別な場合として同次生産関数が含まれる事となる。従ってHI生産関数が同次生産関数の拡張として有効なのは技術進歩が存在する場合である。以上はマクロモデルでの議論であるが，次に二部門モデルの場合について考察する事とする。

5．二部門モデル

二部門成長モデルは新開（〔6〕），宇沢(〔8〕,〔9〕）等によって開拓されたのであるが，ここでは拙論〔3〕のモデルを用い，その生産関数をHI生産関数とした場合について考える。従ってモデルは技術進歩を伴もなわない場合であって，以下でのべるのは静学的均衡値の存在についての吟味である。記号を次のように定めておく。以下添文字は $i=1, 2$ であり，$i=1$は投資財生産部門を，$i=2$ は消費財生産部門を示す。なお次の量はすべて非負であるとする。

$Y_i = i$ 部門生産量, $K_i = i$ 部門資本量, $L_i = i$ 部門労働量,

$p_i = i$ 部門生産物価格, $w =$ 賃金率, $r =$ 資本利潤率,

$Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2$, $K = K_1 + K_2$, $L = L_1 + L_2$,

$k_i = \dfrac{K_i}{L_i}$, $\ell_i = \dfrac{L_i}{L}$, $y_i = \dfrac{Y_i}{L}$, $y = \dfrac{Y}{L}$, $p = \dfrac{p_1}{p_2}$,

貯蓄率 $s(0 < s < 1)$ は両部門に共通な定数とする。

〔仮定 I〕 生産関数を

$$Y_i = F_i(K_i, L_i)$$
$$F_i(K_i, L_i) = \varphi_i\{f_i(K_i, L_i)\}$$
$$f_i(K_i, L_i) = L_i \psi_i(k_i)$$

とする。ただし f_i, φ_i, ψ_i は2回連続的微分可能な関数とし

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_i(0) = 0,\ \varphi_i(\infty) = \infty,\ \varphi_i'(f_i) > 0,\ \varphi_i''(f_i) < 0, \\ \psi_i(0) = 0,\ \psi_i(\infty) = \infty,\ \psi_i'(k_i) > 0, \\ \psi_i(k_i) - k_i\psi_i'(k_i) > 0,\ \psi_i''(k_i) < 0 \end{array}\right\} \tag{5.3}$$

とする。

〔仮定 II〕 生産の均衡条件として

$$\frac{\frac{\partial F_i}{\partial K_i}}{r} = \frac{\frac{\partial F_i}{\partial L_i}}{\omega} = \frac{1}{p_i(1-\eta_i)} \tag{5.4}$$

$$p_1 Y_1 = sY \tag{5.5}$$

と仮定する。ただし η_i は定数であって

$$m_i = \frac{\varphi_i'}{\varphi_i} f_i$$

$$m_i(1-\eta_i) = \delta_i$$

とおくとき

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqq \eta_i < 1 \\ 0 < \delta_i \leqq 1 \end{array}\right\} \tag{5.6}$$

であるとする。

仮定Ⅰより

$$F_{iK} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial K_i} = \varphi_i' \psi_i' > 0$$

$$F_{iL} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial L_i} = \varphi_i'(\psi_i - k_i \psi_i') > 0$$

である。(5.4)より

$$\frac{\varphi_i' f_{iK} K_i + \varphi_i' f_{iL} L_i}{rK_i + wL_i} = \frac{1}{p_i(1-\eta_i)}$$

f_i は K，L の1次同次関数だから

$$\frac{\varphi_i'}{\varphi_i} f_i \cdot \frac{\varphi_i}{rK_i + wL_i} = \frac{1}{p_i(1-\eta_i)}$$

故に

$$p_i Y_i = \frac{rK_i + wL_i}{m_i(1-\eta_i)} = \frac{rK_i + wL_i}{\delta_i} \tag{5.8}$$

故に

$$Y = r\left(\frac{K_1}{\delta_1} + \frac{K_2}{\delta_2}\right) + w\left(\frac{L_1}{\delta_1} + \frac{L_2}{\delta_2}\right) \tag{5.9}$$

故に(5.5)より

$$y_1 = \frac{sY}{p_1 L} = \frac{sr}{p_1}\left\{\frac{\ell_1(k_1+\omega)}{\delta_1} + \frac{\ell_2(k_2+\omega)}{\delta_2}\right\}$$

$$= s\varphi_1' \psi_1' \left\{\frac{\ell_1(k_1+\omega)}{m_1} + \frac{1-\eta_1}{1-\eta_2} \cdot \frac{\ell_2(k_2+\omega)}{m_2}\right\} \tag{5.10}$$

を得る。(5.11)—(5.10)より静学的均衡の条件として次の関係式を得る。

$$y_i = \frac{1}{L} \varphi_i(L_i \psi_i) \tag{5.11}$$

$$\ell_1 k_1 + \ell_2 k_2 = k \tag{5.12}$$

$$\ell_1 + \ell_2 = 1 \tag{5.13}$$

$$\omega + k_i = \frac{\psi_i}{\psi_i'} \tag{5.14}$$

$$p = \frac{\varphi_2'\psi_2'(1-\eta_2)}{\varphi_1'\psi_1'(1-\eta_1)} \tag{5.15}$$

$$y_1 = \frac{s\varphi_1'\psi_1'}{m_1}\left\{\ell_1(k_1+\omega)+\delta\ell_2(k_2+\omega)\right\} \tag{5.16}$$

ただし

$$\delta \equiv \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{m_1(1-\eta_1)}{m_2(1-\eta_2)} \tag{5.17}$$

である。この他に動学的均衡条件として K, L の時間的径路を定める関係式が加わればモデルとしての均衡条件は定まるが，ここでは，K, L はハラメーターと考えることとする。

さて(5.14)より

$$\frac{d\omega}{dk_i}+1 = \frac{\psi_i'^2-\psi_i\psi_i''}{\psi_i'^2} > 1$$

故に

$$\frac{d\omega}{dk_i} > 0$$

故に $\omega = \omega(k_i)$ の逆関数として k_i が ω の単調増加関数として定まる。故に

$$z_i = \omega+k_i, \qquad z = \omega+k$$

とおけば z_i は ω の関数となり

$$\frac{dz_i}{d\omega} > 1 \tag{5.18}$$

次に(5.12), (5.13)より

$$\left.\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{z_2-z}{z_2-z_1} \\ \ell_2 &= \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

(5.11), (5.16)より

$$\frac{s\varphi_1'\psi_1'}{m_1}(\ell_1z_1+\delta\ell_2z_2) = \frac{\varphi_1}{L} = \frac{\varphi_1'f_1}{Lm_1} = \frac{\varphi_1'\psi_1\ell_1}{m_1}$$

故に

$$\frac{\psi_1}{\psi_1'} = \frac{s}{\ell_1}(\ell_1z_1+\delta\ell_2z_2)$$

(5.14)とより

$$\ell_1 = \frac{s(\ell_1 z_1 + \delta \ell_2 z_2)}{z_1} \tag{5.20}$$

故に(5.12), (5.13)より

$$\ell_1 = \frac{s(z - \nu z_2)}{z_1 - s\nu z_2} \tag{5.21}$$

ただし

$$\nu = 1 - \delta$$

同様にして

$$\ell_2 = \frac{(1-s)z}{(1-s\nu)z_2} \tag{5.22}$$

を得る。故に(5.19), (5.22)より

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(1-s)z}{(1-s\nu)z_2}$$

故に

$$z = \frac{(1-s\nu)z_1 z_2}{(1-s)z_1 + s\delta z_2} \tag{5.23}$$

となり z は k, k_2, L の関数，従って ω, L の関数となる。なお

$$1 - s\nu = 1 - s(1-\delta) = 1 - s + s\delta > 0$$

である。また

$$(1-s)z_1 + s\delta z_2 = A$$

とおけば(5.21), (5.22), (5.23)より

$$z = \frac{(1-s\nu)z_1 z_2}{A}$$

$$\left.\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{s\delta z_2}{A} \\ \ell_2 &= \frac{(1-s)z_1}{A} \end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

を得る。また(5.15)より p も ω, L の関数となる。以上より(5.11)—(5.17)

の変数のうち，k_i は ω の関数，y_i，k，p は ω，L の関数として定まる。次に(5.23)より $\partial z/\partial\omega$ を計算すれば

$$\frac{\partial z}{\partial\omega}=\frac{1}{A^2}\left[(1-s\nu)\left\{s\delta z_2^2\frac{dz_1}{d\omega}+(1-s)z_1^2\frac{dz_2}{d\omega}\right\}\right.$$
$$\left.+s(1-s)z_1z_2(z_2-z_1)\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\right] \tag{5.25}$$

を得る。従って(5.18)より

$$\frac{\partial z}{\partial\omega}>\frac{(1-s\nu)\{s\delta z_2^2+(1-s)z_1^2\}+s(1-s)z_1z_2(z_2-z_1)\dfrac{\partial\nu}{\partial\omega}}{A^2}$$

故に

$$\frac{\partial z}{\partial\omega}-1>\frac{s(1-s)\left\{\delta(z_2-z_1)^2+z_1z_2(z_2-z_1)\dfrac{\partial\nu}{\partial\omega}\right\}}{A^2}$$

然るに

$$\frac{\partial\nu}{\partial\omega}=-\frac{\partial\delta}{\partial\omega}=-\frac{1-\eta_1}{1-\eta_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$$

であるから

$$\frac{\partial k}{\partial\omega}>\frac{s(1-s)\left\{\delta(k_2-k_1)^2+(k_1-k_2)\dfrac{1-\eta_1}{1-\eta_2}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\omega}\left(\dfrac{m_1}{m_2}\right)z_1z_2\right\}}{A^2} \tag{5.26}$$

となる。故に

〔仮定III〕　$$(k_1-k_2)\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\geqq 0 \tag{5.27}$$

が成立すれば

$$\frac{\partial k}{\partial\omega}>0$$

となる。故に k は ω の増加関数である。故にその逆関数として ω は k(と L)の関数となる。

以上より K，L が定まれば k，ω，ℓ_i，k_i，p，y_i の静学的均衡値が一義的に定まる。その場合 L が一定なら，k_i，ω は k（従って K）の増加関数であ

る。同次関数の場合，或は $m_1 = m_2$ の場合は仮定Ⅲは勿論成立するが，仮定Ⅲが成立する限りでは生産関数が同次関数である場合（木藤〔3〕3節）と同じ結論を得る。仮定Ⅲは

$$(k_1-k_2)\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial\omega}-\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial\omega}\right) \geqq 0$$

であり，資本労働比率の大きい部門の方が（rに対する相対賃金の上昇に対して）規模関数がより大きく変動する事，即ち increasing returns の傾向がより強い事を示しているが，この事は正常の状態では満足される様に思われる。二部門理論では静学的均衡値が安定であるためには，消費財部門が生産財部門より資本労働比率が高い事が必要であるといわれているが，もしそうであれば，仮定Ⅲが成立することは，安定した経済体系では，消費財生産部門の方がより increasing returns の傾向が強い事を意味する。

また現実の経済では，m_1，m_2 が生産構造の変化と共に急激に変化するとは思われず，しかも m_1，m_2 の増減の方向は等しいと思われるから $\frac{m_1}{m_2}$ の変化は小さいと思われる。従って(5.27)の左辺の値は微小であり，たとえ負であっても(5.26)の右辺の符号には影響をあたえないであろう。以上の理由により，生産関数は同次関数であってもHI生産関数であっても，静学的均衡に関する限り，結論に大差は生じないであろう。

この小論の目的は，生産関数の測定の立場から問題となったHI生産関数を経済理論の立場から吟味する事であったが，今までのところでは何等の断定的な結論に達していない。

Douglas によって提案されたCobb-Douglas 生産関数は労働分配率の問題を通じて経済理論との結び付きが示され，その事によってCobb-Douglas生産関数の有効性が高まった。同様に私はHI生産関数について，同次関数を超える有効性を探し求めたのであるが，それは求め得られなかった。唯以上の極めて断片的な議論から推論すれば，静学的な理論においてはあまり有効性は得られないが，動学理論特に技術進歩を伴う理論においては独自の分野が開

かれそうである。

参 考 文 献

〔1〕 Clemhort, S., "The Class of Homothetic Isoquant Production Functions", *Review of Economic Studies*, 35(1968), 91–104.

〔2〕 Grilliches, Z. and V. Ringstad, *Economics of Scale and the Form of Production Function,* Amsterdam, 1971.

〔3〕 木藤正典, "非一次同次生産関数" **山口経済学雑誌**, 17(1967), 489–506.

〔4〕 木藤正典, "技術進歩と非一次同次生産", **山口経済学雑誌**, 18(1967), 192–210.

〔5〕 木藤正典, "Homothetic Isoquant 生産関数について", **山口経済学雑誌**, 26(1976), 1–15.

〔6〕 Shinkai, Y., "On Equilibrium, Growth of Capital and Labour", *International Economic Review,* 1(1960),107–111.

〔7〕 Soskice, D., "A Modification on the CES Production Function to allow for Changing Returns to Scale over the Function", *Review of Economics and Statistics,* 50(1968), 446–8.

〔8〕 Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth", *Review of Economic Studies,* 29(1961), 40–47.

〔9〕 Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth II", *Review of Economic Studies,* 30(1963), 105–118.

〔10〕 Zellner, A. and N. S. Revanker, "Generalized Production Functions", *Review of Economic Studies,* 36(1969), 241–250.