文献検索の含意モデルにおける単位元

橋 本 寛

1. はじめに

文献検索のモデルとして，文献の概念と要求の概念との包含関係に注目するモデルを含意モデルとよび，すでにその基本的性質を明らかにしている〔1，2〕．しかし，これまでの議論では，モデルの中で現れる各演算の単位元を表面に出していないため，議論が若干冗長であった．これを整理するため，形式的ではあるが，単位元を導入し，各演算について，その性質を調べた．

単位元とは，ある系における2項演算$*$のもとで，その系の任意の元aに対し，条件

$$a * e = e * a = a$$

を満足する，その系の元eである〔3〕．含意モデルにおける2項演算としては，概念算の$\cap$，$\cup$と論理演算の$\wedge$，$\vee$がある．本論文においては，これらの演算の単位元を明確にし，またそれらの単位元が，ある一つの特殊な概念K_0およびそれに単項演算をほどこしたものであることを示す．

2. 演算の定義

ブール変数x，yに対して，演算$x \wedge y$，$x \vee y$，$\bar{x}$をそれぞれ$\min\{x, y\}$，$\max\{x, y\}$，$1-x$で定義する．また，各要素が0，1であるブールベクトル

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]'$$
$$\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n]'$$
(“′” は転置を示す)

とおくとき，2項演算 $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{y}$ および単項演算 $\bar{\boldsymbol{x}}$ をつぎのように定める．

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = [x_1 \wedge y_1,\ \cdots,\ x_n \wedge y_n]'$$
$$\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = [x_1 \vee y_1,\ \cdots,\ x_n \vee y_n]'$$
$$\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y} = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \wedge y_i)$$
$$\boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{y} = \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \vee y_i)$$
$$\bar{\boldsymbol{x}} = [\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n]'$$

上記の演算のうち，$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$, $\bar{\boldsymbol{x}}$ は，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と同じ n 次元ベクトルであるが，$\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{y}$ は0，1の値をとる．これらの間には，つぎのド・モルガンの法則が成立する．

$$\overline{\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{x}} \vee \bar{\boldsymbol{y}}$$
$$\overline{\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{x}} \wedge \bar{\boldsymbol{y}}$$
$$\overline{\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{x}}' \diamond \bar{\boldsymbol{y}}$$
$$\overline{\boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{x}}' \times \bar{\boldsymbol{y}}$$

さらに，ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について，関係 $\neq$, $\geqq$, $\leqq$ をつぎのように定める．

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \iff \text{適当な } i \text{ について } x_i \neq y_i$$
$$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y} \iff x_i \geqq y_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y} \iff x_i \leqq y_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

なお，上記の演算および関係は列ベクトルに対して定義しているが，行ベクトルに対しても同様に定義されるものとする．

ここで定めた演算に関しては，以下の基本的性質が成立する．その性質の記述において，一般に n 次元ブールベクトルを $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ で示し，とくに n 次

元ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{o}$ を

$$\boldsymbol{u} = [1, 1, \cdots, 1]'$$
$$\boldsymbol{o} = [0, 0, \cdots, 0]'$$

と定める．各性質は，ほとんど自明であるので，証明は省略する．これらの性質は，4節以下の含意モデルの性質に関係している．

〔性質1〕

(1) (a) $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

(b) $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$

(2) (a) $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \wedge \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$

(b) $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \vee \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

(3) (a) $\boldsymbol{x} \wedge \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{o}$

(b) $\boldsymbol{x} \vee \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}$

(4) (a) $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{o}$

(b) $\bar{\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{u}$

〔性質2〕

(1) (a) $\boldsymbol{u}' \diamond \boldsymbol{u} = 1$

(b) $\boldsymbol{o}' \diamond \boldsymbol{o} = 0$

(2) (a) $\boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' \diamond \boldsymbol{x} = 1$

(b) $\boldsymbol{o}' \diamond \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' \diamond \boldsymbol{o} = 1$

(3) $\boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}' \diamond \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{x}$

(4) (a) $\boldsymbol{o}' \diamond (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{y}$

(b) $(\boldsymbol{x}' \vee \boldsymbol{y}') \diamond \boldsymbol{o} = \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{y}$

〔性質3〕

(1) (a) $\bar{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \vee \bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{u}$

(b) $\bar{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y}$

(2) (a) $\bar{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}' \diamond \bar{\boldsymbol{y}} = 1$

(b) $\boldsymbol{x} \wedge \bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{o} \iff \bar{\boldsymbol{x}}' \diamond \boldsymbol{y} = 1$

(3) (a) $\bar{\boldsymbol{x}} \wedge \bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{o} \iff \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{y} = 1$

(b) $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = \boldsymbol{u} \iff \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{y} = 1$

(4) (a) $\bar{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{y}' \diamond \boldsymbol{z}$

(b) $\bar{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{z}' \diamond \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{z}' \diamond \boldsymbol{y}$

(5) (a) $\bar{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x}' \diamond (\bar{\boldsymbol{y}} \wedge \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{z}$

(b) $\boldsymbol{y} \wedge \bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow (\boldsymbol{x}' \wedge \bar{\boldsymbol{y}}') \diamond \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{z}$

(6) (a) $\bar{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x}' \diamond (\boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{z}$

(b) $\boldsymbol{y} \wedge \bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow (\boldsymbol{x}' \vee \boldsymbol{y}') \diamond \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}' \diamond \boldsymbol{z}$

3. モデルの構成と単位元の導入

検索システムにおいて使用される概念を K_1, K_2, …, K_m とするとき，これらの概念を概念算∩，∪，^{c} で結合して得られるものを表示関数とよび，この表示関数によって文献および要求を表現する．このときの概念 K_1, K_2, …, K_m は，一般にその外延として空でない集合をともなっていると考えることができる．たとえば，考えている全体集合すなわち概念空間として，数学における行列の集合を考えれば，概念として直交行列，正規行列などがあり，これらの外延は空ではない．しかし，以下で明らかになるように，外延が空である概念 K_0 を導入すると，それに関していくつかの興味ある性質が成立する．また実際上も，このような空の概念に出会うことがあり，たとえば，行列論で，正方行列を A で示すとき

$$\left\{ A \mid A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

なる集合は空である．これに対して

$$\{A \mid A' = A^{-1}\} \text{ (直交行列)}$$

$$\{A \mid A^*A = AA^*\} \text{ (正規行列)}$$

などは空ではない．外延が空である概念は，論理学において実在しない対象をとりあつかうために，明示内容をもたないものである虚クラスとして，議論されている〔4〕.

空の概念 K_0 の追加により，表示関数を，概念 K_0, K_1, K_2, $\cdots$, K_m から，$\cap$, $\cup$, ^{c} によって構成されるものとし，この表示関数によって文献および要求を表現する．表示関数を $e(K_0, K_1, K_2, \cdots K_m ; \cap, \cup, ^c)$ とするとき，概念間の包含関係を示す表示行列 T に対して

$$
\begin{aligned}
&Te(K_0, K_1, K_2, \cdots, K_m ; \cap, \cup, ^c)\\
&\quad = e(TK_0, TK_1, TK_2, \cdots, TK_m ; \wedge, \vee, ^-)
\end{aligned}
$$

と定義する．ただし，行列 T は，K_1, K_2, $\cdots$, K_m 間の包含関係を表示する $n\times m$ 表示行列〔1〕の左側に n 次のゼロベクトルを付加した $n\times(m+1)$ 行列である．また，$TK_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ は行列 T の i 番目の列ベクトルを示すものである．このモデルでは，行列 T の列番号は0からはじまることになる．したがって，TK_0 はゼロベクトル，TK_0^c は全要素が1のベクトルとなる．

要求は上記の表示関数を，さらに論理演算 $\wedge$, $\vee$, $^-$ で結合して構成される検索関数によって表現される．また，文献は表示関数によって記述され，文献 d と要求 $Q(e_1, e_2, \cdots, e_k)$ との関連〔d, T〕Q は

$$
[d, T]Q = Q([d, T]e_1, [d, T]e_2, \cdots, [d, T]e_k)
$$

によって定義される．ただし $e_1, e_2, \cdots, e_k$ は概念 $K_0, K_1, K_2, \cdots, K_m$ から構成される表示関数である．〔d, T〕Q の値は，定義により0か1であって，この値が1の文献は要求 Q を満足しているものとして，とり出される．

4. 単位元に関するモデルの性質

検索過程の含意モデルにおける単位元に注目し，その性質を明らかにする．

まず，表示関数と単位元について述べる．つぎに，検索関数と単位元について調べる．そこにおいて，モデルの4つの演算に関する単位元が明らかになる．3番目に，文献関数と単位元について，文献関数間の関係，文献関数の合成などに関する性質を調べる．

なお，記号は原則として，つぎのように用いる．検索システムにおいて使用される概念を $K_0, K_1, K_2, \cdots, K_m$ で示し，このうち，とくに K_0は空の概念を示すものとする．また，これらの概念間の包含関係を示す，拡張された表示行列をTで，$(m+1)$個の概念から$\cap$，$\cup$，^{c}で構成される表示関数をeで，ただし文献関数としての表示関数はdで示す．表示関数から，$\wedge$，$\vee$，$^-$ で構成される一般の検索関数はQで示す．

4.1　表示関数と単位元

〔性質4〕

(1)　(a)　$T(e \cap K_0) = T(K_0 \cap e) = TK_0$

　　(b)　$T(e \cup K_0) = T(K_0 \cup e) = Te$

(2)　(a)　$T(e \cap K_0^c) = T(K_0^c \cap e) = Te$

　　(b)　$T(e \cup K_0^c) = T(K_0^c \cup e) = TK_0^c$

(3)　(a)　$T(K_0 \cap K_0^c) = T(K_0^c \cap K_0) = TK_0$

　　(b)　$T(K_0 \cup K_0^c) = T(K_0^c \cup K_0) = TK_0^c$

(4)　(a)　$T(e \cap e^c) = TK_0$

　　(b)　$T(e \cup e^c) = TK_0^c$

(5)　　$TK_0^{cc} = TK_0$

(6)　　$TK_0 \leqq Te \leqq TK_0^c$

（証明）

TK_0がゼロベクトルであり，TK_0^cが$\overline{TK_0}$すなわち全要素が1であるベクトルであることを考えれば，いずれも明らかである．

上の関係は概念算とベクトル演算との対応を示している．なお，空の概念

K_0 は最下位の概念であって，その外延は空集合であり，TK_0 はゼロベクトルとなる．これに対して，K_0^c は最上位の概念であって，その外延は全体集合であり，TK_0^c は全要素が 1 のベクトルとなる．

〔性質 5〕

(1)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longleftrightarrow T(e_1 \cup e_2^c) = TK_0^c$

(2)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longleftrightarrow Te_1 \geqq Te_2$

(3)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longleftrightarrow T(e_1 \cap e_2) = Te_2$

(4)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longleftrightarrow T(e_1 \cup e_2) = Te_1$

(5)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longleftrightarrow Te_2^c \geqq Te_1^c$

(6)　$T(e_1^c \cap e_2) = T(e_1 \cap e_2^c) = TK_0 \Longleftrightarrow Te_1 = Te_2$

(7)　$T(e_1^c \cap e_2) = T(e_3^c \cap e_4) = TK_0 \Longrightarrow$

(a)　$T(e_1 \cap e_3) \geqq T(e_2 \cap e_4)$

(b)　$T(e_1 \cup e_3) \geqq T(e_2 \cup e_4)$

（証明）

つぎの事実に注意すれば明らかであろう．

$$T(e_1 \cap e_2) = Te_1 \wedge Te_2$$
$$T(e_1 \cup e_2) = Te_1 \vee Te_2$$
$$Te^c = \overline{Te}$$

たとえば，(1)はつぎのようにして示される．

$$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0$$
$$\overline{T(e_1^c \cap e_2)} = \overline{TK_0}$$
$$T(e_1^c \cap e_2)^c = TK_0^c$$
$$T(e_1 \cup e_2^c) = TK_0^c$$

4.2　検索関数と単位元

要求を定式化したものを検索関数とよび，この検索関数の中に空の概念 K_0 が含まれている場合の性質を調べる．まず，表示関数が検索関数となってい

る場合，すなわち検索関数中に論理演算の∧，∨，¯ が含まれていない場合について考え，つぎに一般の検索関数とそのときの単位元について考える．単位元に関する主要な結果は本節にある．大部分は自明であるが，2，3の注意すべき関係式もある．

〔性質6〕

(1)　$[d, T]K_0 = 1$

(2)　(a)　$[d, T](e \cap K_0) = [d, T]K_0 = 1$

　(b)　$[d, T](e \cup K_0) = [d, T]e$

(3)　(a)　$[d, T](e \cap K_0^c) = [d, T]e$

　(b)　$[d, T](e \cup K_0^c) = [d, T]K_0^c$

(4)　(a)　$[d, T](e \cap e^c) = [d, T]K_0 = 1$

　(b)　$[d, T](e \cup e^c) = [d, T]K_0^c$

(5)　(a)　$[d, T]K_0^c \leqq [d, T]e$

　(b)　$[d, T]K_0 \geqq [d, T]e$

（証明）

(1)　$[d, T]K_0 = dT' \diamond TK_0^c = dT' \diamond \overline{TK_0} = 1$

(2)～(4)　略

(5)　(a)　$[d, T]K_0^c = dT' \diamond TK_0$

$$[d, T]e = dT' \diamond \overline{Te}$$

一般に　$TK_0 \leqq \overline{Te}$　であるから

$$dT' \diamond TK_0 \leqq dT' \diamond \overline{Te}$$

$$[d, T]K_0^c \leqq [d, T]e$$

　(b)　$[d, T]K_0 = 1$

$$1 \geqq [d, T]e \geqq 0$$

よって

$$[d, T]K_0 \geqq [d, T]e$$

上の(1)によって，空の概念，または矛盾する内包をもつ概念を検索関数と

して用いるときは，すべての文献がそれによって検索されることになる．これは矛盾する命題から任意の命題が得られることに対応しているといえる〔5〕．また，(2)，(3)によれば，検索関数中において，概念算 $\cup$ の単位元が K_0 であり，$\cap$ の単位元が K_0^c であることがわかる．

〔性質７〕

(1)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T](e_1 \cap e_2) = [d, T]e_2$

(2)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T](e_1 \cup e_2) = [d, T]e_1$

(3)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 \leqq [d, T]e_2$

(4)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]\bar{e}_1 \geqq [d, T]\bar{e}_2$

(5)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1^c \geqq [d, T]e_2^c$

(6)　$T(e_1^c \cap e_2) = T(e_1 \cap e_2^c) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 = [d, T]e_2$

(7)　$T(e_1^c \cap e_2) = T(e_3^c \cap e_4) = TK_0 \Longrightarrow$

(a)　$[d, T](e_1 \cap e_3) \leqq [d, T](e_2 \cap e_4)$

(b)　$[d, T](e_1 \cup e_3) \leqq [d, T](e_2 \cup e_4)$

（証明）

(1)～(7)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0$ のとき $Te_1 \geqq Te_2$ であるから，いずれも明らかである。

〔性質８〕

(1)　(a)　$[d, T]\bar{K}_0 = 0$

(b)　$[d, T]\bar{K}_0^c = [K_0, T]\overline{d^c}$

(2)　(a)　$[d, T](Q \wedge K_0) = [d, T]Q$

(b)　$[d, T](Q \vee K_0) = [d, T]K_0 = 1$

(3)　(a)　$[d, T](e \wedge K_0^c) = [d, T]K_0^c$

(b)　$[d, T](e \vee K_0^c) = [d, T]e$

(4)　(a)　$[d, T](Q \wedge \bar{K}_0) = [d, T]\bar{K}_0 = 0$

(b)　$[d, T](Q \vee \bar{K}_0) = [d, T]Q$

(5)　(a)　$[d, T](\bar{e} \wedge K_0^c) = 0$

(b)　$[d, T](e \vee \bar{K}_0^c) = 1$

(6)　(a)　$[d, T](Q \wedge \bar{Q}) = [d, T]\bar{K}_0 = 0$

(b)　$[d, T](Q \vee \bar{Q}) = [d, T]K_0 = 1$

(7)　(a)　$[d, T](Q \wedge \bar{K}_0) = [d, T](\overline{\bar{Q} \vee K_0})$

(b)　$[d, T](Q \vee \bar{K}_0) = [d, T](\overline{\bar{Q} \wedge K_0})$

(8)　(a)　$[d, T](Q \wedge \bar{K}_0^c) = [d, T](\overline{\bar{Q} \vee K_0^c})$

(b)　$[d, T](Q \vee \bar{K}_0^c) = [d, T](\overline{\bar{Q} \wedge K_0^c})$

(9)　(a)　$[d, T]\bar{\bar{K}}_0 = [d, T]K_0$

(b)　$[d, T]\bar{\bar{K}}_0^c = [d, T]K_0^c$

（証明）

(1)　(a)　$[d, T]K_0 = 1$

$[d, T]\bar{K}_0 = 0$

(b)　$[d, T]\bar{K}_0^c = 1 - [d, T]K_0^c$

$= 1 - [K_0, T]d^c$

$= [K_0, T]\overline{d^c}$

(2)　(a)　$[d, T](Q \wedge K_0) = [d, T]Q \wedge [d, T]K_0$

$= [d, T]Q \wedge 1$

$= [d, T]Q$

(b)　略

(3)　(a)　$[d, T](e \wedge K_0^c) = [d, T]e \wedge [d, T]K_0^c$

$[d, T]e \geqq [d, T]K_0^c$　であるから

$[d, T](e \wedge K_0^c) = [d, T]K_0^c$

(b)　略

(4)　(a)　$[d, T](Q \wedge \bar{K}_0) = [d, T]Q \wedge [d, T]\bar{K}_0$

$= [d, T]Q \wedge 0$

$= 0$

(b)　略

(5)　(a)　$[d, T](\bar{e} \wedge K_0^c) = \overline{[d, T]e} \wedge [d, T]K_0^c$

$dT' = K_0^c T'$ のとき $[d, T]e = 1$

$\overline{[d, T]e} = 0$

$dT' \neq K_0^c T'$ のとき $[d, T]K_0^c = 0$

$\overline{[d, T]e} \wedge [d, T]K_0^c = 0$

(b) (a)の両辺を否定すればよい．

(6)～(9) 略

ここに列挙するものは，論理演算∧，∨，$^-$ を含む検索関数と K_0 との関係を示すものである．(2)，(4)から明らかなように，検索関数中において，論理演算∧の単位元は K_0 であり，∨の単位元は $\bar{K}_0$ である．これは，$[d, T]K_0$ が1であり，$[d, T]\bar{K}_0$ が0であることによるものである．(6)によれば，要求として矛盾している $Q_1 \wedge \bar{Q}_1$ は $\bar{K}_0$ と等しく，これに適合する文献は存在しない．なお，検索関数としては，$Q_1 \wedge \bar{Q}_1$ と $\bar{K}_0$とが等しいのであって，$Q_1 \wedge \bar{Q}_1$ と K_0 とは等しくない．(7)，(8)は論理演算に関するド・モルガンの法則によって明らかな関係である．

〔性質 9〕

(1) $[d, T](\bar{Q}_1 \wedge Q_2) = [d, T]\bar{K}_0 \Longleftrightarrow [d, T](Q_1 \vee \bar{Q}_2) = [d, T]K_0$

(2) $[d, T](\bar{Q}_1 \wedge Q_2) = [d, T]\bar{K}_0 \Longleftrightarrow [d, T]Q_1 \geqq [d, T]Q_2$

(3) $[d, T](\bar{Q}_1 \wedge Q_2) = [d, T]\bar{K}_0 \Longleftrightarrow [d, T](Q_1 \wedge Q_2) = [d, T]Q_2$

(4) $[d, T](\bar{Q}_1 \wedge Q_2) = [d, T]\bar{K}_0 \Longleftrightarrow [d, T](Q_1 \vee Q_2) = [d, T]Q_1$

(5) $[d, T](\bar{Q}_1 \wedge Q_2) = [d, T]\bar{K}_0 \Longleftrightarrow [d, T]\bar{Q}_1 \leqq [d, T]\bar{Q}_2$

(6) $[d, T](\bar{Q}_1 \wedge Q_2) = [d, T](\bar{Q}_3 \wedge Q_4) = [d, T]\bar{K}_0 \Longrightarrow$

(a) $[d, T](Q_1 \wedge Q_3) \geqq [d, T](Q_2 \wedge Q_4)$

(b) $[d, T](Q_1 \vee Q_3) \geqq [d, T](Q_2 \vee Q_4)$

（証明）

$[d, T]Q$ が0または1であること，および

$$[d, T](Q_1 \wedge Q_2) = [d, T]Q_1 \wedge [d, T]Q_2$$

$$[d,\ T](Q_1 \vee Q_2) = [d,\ T]Q_1 \vee [d,\ T]Q_2$$

$$[d,\ T]\bar{Q} = \overline{[d,\ T]Q} = 1 - [d,\ T]Q$$

$$[d,\ T]K_0 = 1$$

$$[d,\ T]\bar{K}_0 = 0$$

であることを考えれば明らかである.

〔性質10〕

(1)　(a)　$[d,\ T](e \cap K_0) = [d,\ T](e \vee K_0) = 1$

　　(b)　$[d,\ T](e \cap K_0^c) = [d,\ T](e \vee K_0^c) = [d,\ T]e$

(2)　(a)　$[d,\ T](e \cup K_0) = [d,\ T](e \wedge K_0) = [d,\ T]e$

　　(b)　$[d,\ T](e \cup K_0^c) = [d,\ T](e \wedge K_0^c) = [d,\ T]K_0^c$

（証明）

一般に，表示関数 e_1, e_2 に対して

$$[d,\ T](e_1 \cap e_2) \geqq [d,\ T](e_1 \vee e_2)$$

$$[d,\ T](e_1 \cup e_2) = [d,\ T](e_1 \wedge e_2)$$

が成立することを，おもい出せばよい．たとえば，(1)の(a)はつぎのようにして示せる.

$$\begin{aligned}[d,\ T](e \cap K_0) &\geqq [d,\ T](e \vee K_0)\\ &= [d,\ T]e \vee [d,\ T]K_0\\ &= [d,\ T]e \vee 1\\ &= 1\end{aligned}$$

一般に $1 \geqq [d,\ T](e \cap K_0) \geqq 0$　であるから

$$[d,\ T](e \cap K_0) = [d,\ T](e \vee K_0) = 1$$

他の場合も同様である.

〔性質11〕

排他的に，$T(d^c \cap e^c) = TK_0$　または　$T(d^c \cap e) = TK_0$　のとき

$$[d,\ T]e^c = [d,\ T]\bar{e}$$

(証明)

(1)　$T(d^c \cap e^c) = TK_0,\ T(d^c \cap e) \neq TK_0$ のとき

$T(d \cup e) = TK_0^c,\ T(d \cup e^c) \neq TK_0^c$ であるから

$$[d, T]e^c = dT' \diamond Te = 1$$

$$[d, T]e = dT' \diamond \overline{Te} = 0$$

$$[d, T]\bar{e} = 1$$

(2)　$T(d^c \cap e^c) \neq TK_0,\ T(d^c \cap e) = TK_0$ のとき

(1)と同様にして

$$[d, T]e^c = 0$$

$$[d, T]e = 1$$

$$[d, T]\bar{e} = 0$$

ゆえに(1), (2)から

$$[d, T]e^c = [d, T]\bar{e}$$

上記の性質は，概念算の e^c と論理演算の $\bar{e}$ が，検索関数として等しくなる条件の一例を示している．このように一定の条件のもとでは，e^c と $\bar{e}$ は検索関数として等しくなるが，もちろん，一般の場合に等しくなるとはかぎらない．

4.3　文献関数と単位元

文献関数の中に，単位元としての概念 K_0 または K_0^c が含まれている場合，また特別な場合として文献関数が K_0 または K_0^c である場合の基本的性質をはじめ，文献関数に関する種々の性質を以下に示す．文献関数と，検索関数としての表示関数とは，ある種の対称的関係にあるため，文献関数の性質と対応する，検索関数としての表示関数の性質が成立する．

〔性質12〕

(1)　$T(d_1^c \cap d_2) = TK_0 \Longrightarrow [d_1, T]e \geqq [d_2, T]e$

(2)　$T(d_1^c \cap d_2) = TK_0 \Longrightarrow [d_1, T]e^c \geqq [d_2, T]e^c$

(3)　$T(d_1^c \cap d_2) = TK_0 \Longrightarrow [d_1, T]\bar{e} \leqq [d_2, T]\bar{e}$

(4)　$T(d_1^c \cap d_2) = T(d_1 \cap d_2^c) = TK_0 \Longrightarrow [d_1, T]Q = [d_2, T]Q$

（証明）

いずれも，$T(d_1^c \cap d_2) = TK_0$ と $Td_1 \geqq Td_2$ とが同値であることから明らかである．

〔性質13〕

(1)　　$[K_0, T]e = [e^c, T]K_0^c$

(2)　(a)　$[K_0^c, T]e = 1$

　　(b)　$[K_0^c, T]\bar{e} = 0$

(3)　(a)　$[d \cap K_0, T]Q = [K_0, T]Q$

　　(b)　$[d \cup K_0, T]Q = [d, T]Q$

(4)　(a)　$[d \cap K_0^c, T]Q = [d, T]Q$

　　(b)　$[d \cup K_0^c, T]Q = [K_0^c, T]Q$

(5)　(a)　$[d \cap d^c, T]Q = [K_0, T]Q$

　　(b)　$[d \cup d^c, T]Q = [K_0^c, T]Q$

(6)　(a)　$[K_0, T]e \leqq [d, T]e$

　　(b)　$[K_0^c, T]e \geqq [d, T]e$

（証明）

(1)　一般に $[d, T]e = [e^c, T]d^c$ である．

(2)　$[K_0^c, T]e = K_0^c T' \diamond \overline{Te} = \overline{K_0 T'} \diamond \overline{Te} = 1$

　　$[K_0^c, T]\bar{e} = 1 - [K_0^c, T]e = 0$

(3)〜(5)　文献関数は表示関数であるから，表示関数の性質によって明らかである．

(6)　(a)　$[K_0, T]e = K_0 T' \diamond \overline{Te}$

　　　$[d, T]e = dT' \diamond \overline{Te}$

$K_0 T' \leqq dT'$　によって

$$K_0 T' \diamond \overline{Te} \leqq dT' \diamond \overline{Te}$$

$$[K_0, T]e \leqq [d, T]e$$

(b)　(a)と同様である．

〔性質14〕

(1)　$T(d_1^c \cap d_2) = TK_0 \Longrightarrow [d_1 \cap d_2, T]e = [d_2, T]e$

(2)　$T(d_1^c \cap d_2) = TK_0 \Longrightarrow [d_1 \cup d_2, T]e = [d_1, T]e$

(3)　$T(d_1^c \cap d_2) = TK_0 \Longrightarrow [d_1^c, T]e \leqq [d_2^c, T]e$

(4)　$T(d_1^c \cap d_2) = T(d_3^c \cap d_4) = TK_0 \Longrightarrow$

(a)　$[d_1 \cap d_3, T]e \geqq [d_2 \cap d_4, T]e$

(b)　$[d_1 \cup d_3, T]e \geqq [d_2 \cup d_4, T]e$

(証明)

(1)～(4)　つぎの関係によって明らかである．

$$T(d_1^c \cap d_2) = TK_0 \Longleftrightarrow Td_1 \geqq Td_2$$

〔性質15〕

(1)　(a)　$Td = TK_0^c \Longleftrightarrow [d, T]K_0^c = 1$

(b)　$Te = TK_0 \Longleftrightarrow [K_0, T]e = 1$

(2)　(a)　$T(d^c \cap e) = TK_0 \Longleftrightarrow [d, T]e = 1$

(b)　$T(d \cup e^c) = TK_0^c \Longleftrightarrow [d, T]e = 1$

(3)　(a)　$T(d^c \cap e) \neq TK_0 \Longleftrightarrow [d, T]e = 0$

(b)　$T(d \cup e^c) \neq TK_0{}^c \Longleftrightarrow [d, T]e = 0$

(4)　(a)　$T(d \cap e) = TK_0 \Longleftrightarrow [d^c, T]e = 1$

(b)　$T(d \cap e) = TK_0 \Longleftrightarrow [e^c, T]d = 1$

(証明)

(1)　(a)　$Td = TK_0^c$ のとき

明らかに　$[d, T]K_0^c = 1$

$[d, T]K_0^c = 1$　のとき

$$[d, T]K_0^c = dT' \diamond TK_0 = 1$$

TK_0 はゼロベクトルであるから

$$Td = TK_0^c$$

(b)　(a)と同様である.

(2)　(a)　$T(d^c \cap e) = TK_0 \Longleftrightarrow dT' \diamond \overline{Te} = 1$

$$[d, T]e = dT' \diamond \overline{Te}$$

よって

$$T(d^c \cap e) = TK_0 \Longleftrightarrow [d, T]e = 1$$

(b)　(a)と同様である.

(3)　(a)　$Td = [x_1, x_2, \cdots, x_n]'$　$x_i \in \{0, 1\}$

$Te = [y_1, y_2, \cdots, y_n]'$　$y_i \in \{0, 1\}$

とおく. $\overline{Td} \wedge Te \neq TK_0$ であるから, 適当な j に対して

$$\bar{x}_j \wedge y_j = 1 \quad (1 \leqq j \leqq n)$$

である. したがって

$$x_j \vee \bar{y}_j = 0$$

$$\begin{aligned}[d, T]e &= dT' \diamond \overline{Te} \\ &= (x_1 \vee \bar{y}_1) \wedge \cdots \wedge (x_j \vee \bar{y}_j) \wedge \cdots \wedge (x_n \vee \bar{y}_n) \\ &= 0\end{aligned}$$

逆に　$[d, T]e = 0$ であれば, 適当な j に対して

$$x_j \vee \bar{y}_j = 0$$

$$\bar{x}_j \wedge y_j = 1$$

$$\bar{x}_j \wedge y_j \neq 0$$

$$T(d^c \cap e) \neq TK_0$$

(b)　(a)と同様である.

(4)　(a)　(2)の(a)において d を d^c とおけばよい.

(b)　(a)において d と e をとりかえればよい.

〔性質16〕

(1)　(a)　$T(d \cap e_2^c) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 = [d \cap e_2, T]e_1$

(b) $T(d^c \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 = [d \cup e_2, T]e_1$

(2) (a) $T(d^c \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 = [d, T](e_1 \cup e_2)$

(b) $T(e_1 \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 = [d \cup e_2, T]e_1$

(3) (a) $T(e_1 \cap e_2^c) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 = [d \cap e_2, T]e_1$

(b) $T(d \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 = [d \cap e_2^c, T]e_1$

(4) $T(e_1 \cap e_2^c) = TK_0 \Longrightarrow [d, T]e_1 = [d \cap e_2, T](e_1 \cap e_2)$

（証明）

(1) 表示関数の性質によって明らかである．

(2) (a)

$$\begin{aligned} [d, T](e_1 \cup e_2) &= [d, T]e_1 \wedge [d, T]e_2 \\ &= [d, T]e_1 \wedge 1 \\ &= [d, T]e_1 \end{aligned}$$

(b) $T(e_1 \cap e_2) = TK_0$ のとき

$$Te_1^c \geqq Te_2$$

$$\begin{aligned} [d \cup e_2, T]e_1 &= (dT' \vee e_2T') \diamond \overline{Te_1} \\ &= dT' \diamond (\overline{Te_1} \vee Te_2) \\ &= dT' \diamond \overline{Te_1} \\ &= [d, T]e_1 \end{aligned}$$

(3) (a)

$$\begin{aligned} [d \cap e_2, T]e_1 &= [d, T]e_1 \wedge [e_2, T]e_1 \\ &= [d, T]e_1 \wedge 1 \\ &= [d, T]e_1 \end{aligned}$$

(b) $T(d \cap e_2) = TK_0$ のとき

$$T(d^c \cup e_2^c) = TK_0^c$$

$$Td = T(d \cap (d^c \cup e_2^c)) = T(d \cap e_2^c)$$

$$[d, T]e_1 = [d \cap e_2^c, T]e_1$$

(4)

$$\begin{aligned} [d \cap e_2, T](e_1 \cap e_2) &= [d, T](e_1 \cap e_2) \wedge [e_2, T](e_1 \cap e_2) \\ &= [d, T](e_1 \cap e_2) \wedge 1 \\ &= [d, T](e_1 \cap e_2) = [d, T]e_1 \end{aligned}$$

〔性質17〕

(1)　$[d, T]K_0^c = [d, T]d^c = [K_0, T]d^c$

(2)　$[d \cap e^c, T]e = [e^c, T]e = [K_0, T]e$

(3)　$[d, T]e = [K_0, T](d^c \cap e) = [d \cup e^c, T]K_0^c$

(4)　$[d, T]e \wedge [d, T]e^c = [d, T]K_0^c$

（証明）

(1)　$[d, T]K_0^c = dT' \diamond TK_0 = dT' \diamond Td = [d, T]d^c$

$$= K_0 T' \diamond Td = [K_0, T]d^c$$

(2)　$[d \cap e^c, T]e = (dT' \wedge \overline{eT'}) \diamond \overline{Te}$

$$= \overline{eT'} \diamond \overline{Te} = [e^c, T]e$$

$$= K_0 T' \diamond \overline{Te} = [K_0, T]e$$

(3)　$[K_0, T](d^c \cap e) = K_0 T' \diamond (\overline{\overline{Td}} \wedge \overline{Te})$

$$= K_0 T' \diamond (Td \vee \overline{Te})$$

$$= dT' \diamond \overline{Te}$$

$$= [d, T]e$$

$$[K_0, T](d^c \cap e) = [(d^c \cap e)^c, T]K_0^c$$

$$= [d \cup e^c, T]K_0^c$$

(4)　$[d, T]e \wedge [d, T]e^c = [d, T](e \wedge e^c)$

$$= [d, T](e \cup e^c)$$

$$= [d, T]K_0^c$$

性質17(1)は，文献dに対してK_0^cで検索することは，文献dに対してd^cでで検索すること，またK_0なる文献に対してd^cで検索することに等しいことを示している．これらの検索の結果が1となるのは，dがK_0^cであるとき，またはd^cがK_0であるときである．(2)は，文献関数が$d \cap e^c$である文献に対して，表示関数eで検索することは，e^cなる文献に対してeで検索すること，またK_0なる文献に対してeで検索することと等しいことを示している．(3)も同様に考えることができる．

〔性質18〕

(1)　$T(e_1 \cup e_2) = TK_0^c \Longrightarrow [d, T]e = [d, T](e \cap e_1) \wedge [d, T](e \cap e_2)$

(2)　$T(e_1 \cup e_2) = TK_0^c \Longrightarrow [d, T]e = [d \cap e_1, T](e \cap e_1)$

$$\wedge [d \cap e_2, T](e \cap e_2)$$

（証明）

(1)　$$\begin{aligned}[d, T]e &= [d, T](e \cap K_0^c) \\ &= [d, T](e \cap (e_1 \cup e_2)) \\ &= [d, T]((e \cap e_1) \cup (e \cap e_2)) \\ &= [d, T](e \cap e_1) \wedge [d, T](e \cap e_2)\end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned}[d \cap e_1, T](e \cap e_1) &= [d, T](e \cap e_1) \wedge [e_1, T](e \cap e_1) \\ &= [d, T](e \cap e_1) \wedge 1 \\ &= [d, T](e \cap e_1)\end{aligned}$$

同様にして

$$[d \cap e_2, T](e \cap e_2) = [d, T](e \cap e_2)$$

(1)によって

$$[d, T]e = [d \cap e_1, T](e \cap e_1) \wedge [d \cap e_2, T](e \cap e_2)$$

〔性質19〕

(1)　$Te = TK_0 \Longleftrightarrow [d, T]e \wedge [d^c, T]e = 1$

(2)　$Td = TK_0^c \Longleftrightarrow [d, T]e \wedge [d, T]e^c = 1$

(3)　$T(d^c \cap e) = T(d \cap e^c) = TK_0 \Longleftrightarrow [d, T]e \wedge [e, T]d = 1$

(4)　$T(d_1 \cup d_2 \cup e) = TK_0^c \Longrightarrow [d_1 \cup d_2, T]e = [d_1, T]d_2^c$

(5)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0 \Longrightarrow [d \cup e_1, T](d \cup e_2) = 1$

（証明）

(1)　$Te = TK_0$ のとき

$$\begin{aligned}[d, T]e \wedge [d^c, T]e &= [d, T]K_0 \wedge [d^c, T]K_0 \\ &= 1 \wedge 1 = 1\end{aligned}$$

$[d, T]e \wedge [d^c, T]e = 1$ のとき

$$[d \cap d^c, T]e = 1$$
$$[K_0, T]e = 1$$
$$Te = TK_0$$

(2)　$Td = TK_0^c$ のとき

$$[d, T]e \wedge [d, T]e^c = [K_0^c, T]e \wedge [K_0^c, T]e^c$$
$$= 1 \wedge 1 = 1$$

$[d, T]e \wedge [d, T]e^c = 1$ のとき

$$[d, T](e \cup e^c) = 1$$
$$[d, T]K_0^c = 1$$
$$Td = TK_0^c$$

(3)　$T(d^c \cap e) = TK_0 \Longleftrightarrow [d, T]e = 1$

$T(d \cap e^c) = TK_0 \Longleftrightarrow [e, T]d = 1$

よって

$$T(d^c \cap e) = T(d \cap e^c) = TK_0 \Longleftrightarrow [d, T]e \wedge [e, T]d = 1$$

(4)　$T(d_1 \cup d_2 \cup e) = TK_0^c$ のとき

$$\begin{aligned}[d_1 \cup d_2, T]e &= (d_1 \cup d_2)T' \diamond Te^c \\ &= (d_1T' \vee d_2T') \diamond (\overline{Te} \wedge (Td_1 \vee Td_2 \vee Te)) \\ &= (d_1T' \vee d_2T') \diamond (\overline{Te} \wedge (Td_1 \vee Td_2)) \\ &= (d_1T' \vee d_2T') \diamond (Td_1 \vee Td_2) \\ &= d_1T' \diamond Td_2 \\ &= [d_1, T]d_2^c\end{aligned}$$

(5)　$T(e_1^c \cap e_2) = TK_0$ のとき

$$Te_1 \geqq Te_2$$
$$T(d \cup e_1) \geqq T(d \cup e_2)$$
$$[d \cup e_1, T](d \cup e_2) = 1$$

性質19の(1)は，概念 e が文献 d に含まれ，かつ文献 d^c にも含まれていれば，概念 e は空の概念 K_0 と等しいことを示している．一般に $T(d_1 \cap d_2) =$

TK_0 のとき，すなわち d_1 と d_2 が互いに素であるとき，概念 e が d_1 に含まれ，かつ d_2 にも含まれていれば，e は K_0 に等しい．(2)は，(1)と本質的には同じものであるが，文献 d に e が含まれ，かつ e^c も含まれているときには，d は K_0^c と等しいことを示している．

5. まとめ

検索過程の含意モデルについて考察をおこない，そこで出現する各演算の単位元とその性質を明らかにした．その演算の単位元を明確にするために，外延が空である特殊な概念 K_0 を導入し，それが単位元の役割を果すことを示した．すなわち，概念算における $\cap$ の単位元は K_0^c であり，$\cup$ の単位元は K_0 である．また，検索関数における論理演算 $\wedge$ の単位元は K_0 であり，$\vee$ の単位元は $\bar{K}_0$ である．なお，概念 K_0 は $\cup$ および $\wedge$ に関する単位元となっているが，これは検索関数において，e を表示関数とするとき，$e \cup K_0$ と $e \wedge K_0$ が等価であるので，このことからも理解できることである．

前回までのモデルでは，表示行列 T は $n \times m$ であったが，今回は空の概念 K_0 が追加されて，$n \times (m+1)$ と拡張されている．外延が空である概念に関しては，定義の異なるものが多数存在すると予想されるので，K_0 は外延が空の概念を代表するものであると考えることができる．実際，通常空でないとする概念 $K_1, K_2, \cdots, K_m$ から空の概念を構成することも可能であるし，場合によっては $K_1, K_2, \cdots, K_m$ の中に空の概念が入っていることもある．

ここで述べた単位元に関する性質は，ほとんど自明のものばかりであるが，今後の議論の展開の上で整理しておくことも必要であろう．含意モデルに関しては，今回までの報告以外にも，さらに，いくつかの性質が成立する．それらについては，また別の機会に述べる．

文　献

〔1〕橋本："概念空間と情報検索"，山口経済学雑誌，第23巻第5・6号（昭和49年11月）.
〔2〕橋本："文献検索過程の含意モデル"，山口経済学雑誌，第26巻第1・2号（昭和51年7月）.
〔3〕日本数学会編："数学辞典"，第2版，p. 424，岩波書店（1971年2月）.
〔4〕G. ムーナン（福井，伊藤，丸山訳）："意味論とは何か"，p. 263，大修館書店（1975年11月）.
〔5〕前原："記号論理入門"，p. 53～p. 56，日本評論社（昭和50年5月）.