生物的利子理論における完全不可能性定理

藤井　大司郎

序

世代重複型消費貸借モデルは，今日において動学的資源配分や異世代間分配を取り扱う分析にとって欠くべからざる理論的基礎を与え，その応用モデルは広く用いられる有用かつ共通の分析用具となっている。とくに，現代の新古典派的ライフ・サイクル貯蓄理論の構築に，このモデルが果たした役割は大きく，最近においては年金制度，相続・贈与，公債等の経済学分析を扱った主要な文献で用いられている。

しかし，このモデルが用いられている場合，そのほとんどが2ないし3期間モデルの形態をとっている。その理由は，第一に，それ以上多期間のモデルでは数学的操作が極めて困難であること，第二には，2ないし3期間モデルで得られた結論が，多期間モデルでもほぼ同様に当てはまると暗黙に信じられていることのためと思われる。こうした理由からか，世代重複型消費貸借モデルの一般的本質を究めようとする研究は，一部の例外を除いて，等閑視されてきたのである。しかし，このモデルが果たしてきた上記の役割を考えるならば，この研究は決してゆるがせにできないものであるはずである。

---

*　本誌掲載の前田氏の論文が，この論文とほぼ同じテーマを取り扱っているのは偶然ではない。氏の修士論文作成指導中に得た着想が，両方の論文が書かれるきっかけとなったからである。この着想が共有のものであることを，氏は認めてくれている。しかし，それぞれの論文は全く独立に作成されたものであることを，おことわりしておく。

われわれは，この根本問題を真正面からとりあげ，一般的 $n+1$ 期間モデル内在する本質を明らかにする。この結果，従来用いられてきた2ないし3期間モデルのような少期間モデルが全く特異なモデルであって，一般的特性をもたないことが示される。それは，Samuelson[1958] 流に言うならば，生物的（黄金律）利子の実現に関する「完全不可能性定理」の確立である。

第1節では，消費貸借モデル理論のこれまでの発展を概観し，問題の所在が明らかにされる。第2節では $n+1$ 期間モデルの一般形を構築し，続く第3節で，モデルがもつ可能な定常状態の全体像を示す。第4節では，一般形を取り扱い可能な線形モデルに置き換え，第5節で，そのモデルの生物的解が安定となるための必要十分条件を2つの形で提示する。第6節と第7節は，本論文の中心であり，この安定条件をどうしても満たすことができない状況が一般的に存在することを示すことによって，「完全不可能性定理」を証明する。このとき同時に，その系としての「政策不可能性定理」にも言及する。そして，不可能性が支配する状況では，市場に何が起こるか，また政策は何をなしうるかを検討する。最後に，本論文が明らかにした結果の意義と今後の展望を示して，全体を閉じる。

第1節　学説史的概観

Samuelson の純粋消費貸借モデルが明らかにした動学的資源配分の根本問題は，「生物的利子率」，または Phelps[1965] の「黄金律」利子率にかかわっている。Samuelson は，純粋消費貸借モデルが一定率で指数的に成長する人口という設定を含むならば[1)]，それがもちうる定常状態の中には生物的利子率を含むものが必ず存在することを明らかにした。本間[1975]

1）人口が指数的に成長するということが，生物的利子理論の大前提である。このこと自体をめぐって，Lerner[1959a][1959b] と Samuelson[1959] との間で論争がおこなわれた。

[1982]に従って，これを「存在定理」と呼んでおこう。この利子率は，それが支配する定常状態下の代表的個人の生涯効用を最大化するという点で一種の規範的特質を備えている。そして，モデルにおける世代の生涯期間の長さをどのようにとっても，「存在定理」が成り立つことは容易に示されうる[2)]。

問題となるのは，この規範的な生物的利子率が純粋消費貸借市場の長期均衡利子率とどう関わっているのかということである。Samuelsonの「不可能性定理 (impossibility theorem)」は，この両者が純粋に自由放任の市場の前提の下では一般に調和できないことを示唆するものであった。この定理は2つの論点を含んでいる。

第一に，生物的利子率の解は，それがもつ特異性により，全員一致の解ではないということである。この解は確かに定常状態における個人にとって最適ではあるものの，動学体系の最初または最後（それがあるものとして）の世代を必ず害する。そして同時に，個人財産権の独立性を損なうことを通じて，最後または最初の世代を不当に利する。他方，生物的解以外の解は，どのような有限数の個人の集まり———各期の市場取引の構成員———についてもパレート最適である。それゆえ，生物的解をもたらす安定的な動学経路が存在するとしても，純粋に自由放任で個人財産権の独立性を保持する経済にあっては，この望ましい経路の初期値こそが確保できないというディレンマが存在する。しかし，このディレンマはそれほど重大ではない。なぜなら，この望ましい経路が安定的である限りにおいて，ほんのわずかな利他的行動または個人財産権のわずかな修正が，その大きさを問わず，最初の一回限り生ずればよいからである。それは（おそらく全員一致でない方法で）もたらされた政治的決定をつうじて達成されうると思われる[3)]。

そこで，第二の論点が重要となってくる。つまりそれは，果たして生物的解は安定的に達成されうるかという問題である。Samuelson[1958] [1960]と

2）このことを初めて一般的に示したのはGale[1973]である。
3）Samuelson[1958]が見い出だした「貨幣」の新しい機能もここにある。

Cass & Yaari [1966] は2及び3期間モデルについて，それが否定的であることを示す重要な例示を行なった。だがそれらの結果は，モデルの本質にかかわってくる生涯所得分布の仮定の特殊性[4]と無縁でなく，また扱い易い少期間モデルであったという点で一般的ではなかった。「不可能性定理」をめぐる議論は，その後この第二の論点に主として集中するのである[5]。

Gale [1973] の貢献はその中で多大なものがあった。彼は Samuelson モデルの上述の2つの制約を取り払って一般化を試みた。まず2期間モデルを用いながら，生涯所得の仮定される分布状態に応じて，生物的解が動学的に安定となる「古典派的（classical）ケース」と不安定となる「サミュエルソン的ケース」とがあることが明らかとなった。すなはち，消費貸借モデルの動学的特性は生涯所得分布についての設定に依存するのである。但し，その完全に一般的な証明は対数線形型（コブ・ダグラス型）の効用関数についてのみ与えられている[6]。そして，両ケースを区別するクリティカルな条件は，仮定された効用関数の性質——対数線形型の場合，唯一のパラメータたる時間選好率——と独立ではない。ともかく，このことは Samuelson の「不可能性定理」に修正を加えるものである。Gale はさらにモデルを $n+1$ 期間に一般化し，定常解の静学的特性を検討している。その結果，生物的解が一般に，指数的人口成長及び純粋自由放任の設定と相容れないことを確認している。また，3期間モデルについて Bailey が Samuelson に示唆し[7]，Meckling [1960] が指摘した生物的解以外の長期均衡解が $n+1$ 期間モデルにも（経済上意味をもちうる解としては）高々ひとつ存在することが明らかに

4）のちに述べる「隠退型」所得流列の仮定をさしている。

5）Diamond [1965]，Stein [1969] 等によって，消費貸借モデルは生産と耐久財を含むモデルに発展され，不可能性が同様に成り立つことが明らかにされた。しかし，これらのモデルは2期間分析に限られている。また，Starrett [1972] は，ここで取り扱っている純粋交換のモデルが，Malinvaud [1953] の生涯モデルと本質的に同じ資源配分問題を含んでいることを明らかにした。

6）効用関数についてのこの簡単化は，分析の便宜上，とりわけ多期間モデルではさけられないと思われる。

7）Samuelson [1958]，478頁。

された。彼はそれを「貸借均衡計画（balanced program)」と呼んでいる[8)]。だが，$n+1$期間モデルの動学的安定性については，「少なくともコブ・ダグラス・ケースでは，類似の（古典派的・サミュエルソン的の両ケースがありうるという）定理が成り立つと信じてはいるが，まだそれらを証明することに成功してはいない」と述べるに止どまっている。

Galeの残したこの宿題にはこれまでまだ答えられてこなかった。この論文はそれに答えようとするものである。しかも，その答えはGaleの楽観的期待を打ち砕く否定的なものである。すなわち，Galeによって少なくとも2期間モデルにおいては修正を受けた「不可能性定理」を，われわれは一般的に復活させようと思う[9)]。それればかりでなく，全面的な市場への介入なくしては決して生物的解が自律的に達せられることがないという意味で「完全不可能性定理」を提示したいと思う。

しかしその前に，本間[1975][1977][1982]の重要な貢献にも言及しておかなければならない。彼はGaleの立場を基本的に受け継ぎながら，2期間のみならず3期間モデルでも「不可能性定理」が修正されうる場合があることを示した[10)]。そこで用いられた巧妙な数学的手法はわれわれの分析にとって大変示唆的であり，この論文も彼の貢献に多くを負っている。それは，Galeの言う「サミュエルソン的ケース」を「古典派的ケース」に置き換えるような政策的介入の可能性に言及したものである。すなわち，当初の生涯所得分布を政策的に変更することによって，モデルの構造的パラメータである時間選好率により条件づけられる「古典派的ケース」の領域内にいったん経済を置くことに成功しさえすれば，あとは動学的市場の自律的運動により

8）それは，個人の生涯資産が相互に独立に維持されるということを意味している。これについては，第3節で述べる。

9）しかしそれは，Samuelsonが主張した範囲内での彼の「不可能性定理」の正当性を弁護するものではない。のちに示すように，彼の示したケースは「完全」には「不可能」ではなかった。

10）ただし，用いられたモデルでは，やはり対数線形（または，コブ・ダグラス）型効用関数の仮定がおかれている。

安定的に生物的解が達せられるのである。この政策的介入は，すべての世代に所得分布の変更を迫ることができるよう永続的でなければならないけれど，その政策主体は自由裁量のワンマンというより，一度決めたルールの監視人に近い存在と言えよう。こうした政府または制度を今日の社会が最低限受け容れていると考えられる以上，最適解の達成を「不可能」と論ずる必要はないであろう。本間[1982]は3期間モデルについても以上のことが正しいことを示したが，それは完全ではなかった。彼自身「年金制度」モデルの生物的解が安定的となることを保証する政策について答えを出していない。われわれは，この「年金制度」モデルが完全に不安定的であることを示そう。実は，本間の政策がうまくいく3期間「租税政策」モデルはGale-本間の議論が妥当する最後のケースだったように思われるのである。

われわれは以下で $n+1$ 期間モデルを取り扱うことによって，純粋消費貸借モデルの一般化を試みる。この一般化はなぜ必要なのであろうか。それを知るためには，2期間モデルと3期間モデルとの違いを想起すればよい。

2期間モデルでは可能な定常解は一般に2つしかない。生物的解と無取引(no trade) 解[11] である。このような解の制限が生じるのは，期間をこえて財を持ち越すことができないために，2期間生存の世代にとって取引相手をすぐ隣の世代にしか見出だしえないためである[12]。この「がんじがらめ」のモデルの性格は，むしろ好都合な結果をもたらしている。なぜなら，財に耐久性がなく，同時に生存する唯一の次(前)世代にしかそれを渡せない以上，取引の結果生ずる定常解はおのずと人口比による割当てにならざるをえないからである。Samuelson[1958]が2期間モデルの前を足早に通り過ぎ，3期間の分析に集中したことは当然である。3期間モデルは生物的利子率以外の交換価格による取引を定常解としてもちうる最も単純なケースなのである。

11) Gale[1973]の2期間モデルを見よ。
12) 孫以降の世代と同時に生存できないことは，実は問題とならない。同時生存する次世代との取引であっても，それが成り立つためには，まだ生存していない世代の代理人たる仲介機関や保証制度が，2期間モデルでは，必要となるからである。

しかし，のちに指摘するように，一般多期間モデルの原初形態となりうるはずの３期間モデルにおいて，Samuelson や Meckling は結論に特殊な影響をもつ仮定を導入していた。それは Samuelson [1960] が言うように効用関数における特定化に必ずしもあるのではない[13]。いわば「隠退型」の生涯所得分布（1，1，0）にあるのである。しかし，本間 [1982] の「年金制度」モデルがそうであったように，一般に（e_0，e_1，e_2），$e_0 \neq 0$，$e_2 \neq 0$ の所得分布のもとではモデルの数学的取り扱いが困難となってくる[14]。３期間モデルのもつ潜在的特性———それは一般の $n+1$ 期間モデルの特性を代表している———は，とくに動学的特性面では，このようにまだ解き明かされてはいない。$n+1$（$n \geqq 3$）期間モデルはさらに多くの取引形態が可能となってくるから，生物的解の安定性はより一層おびやかされることになると考えられる。

ともかく，２期間や３期間に分析を限定して，現実において25年や30年の長期利子率しかわれわれはもたないと考えることは馬鹿げている。今日も昨日も人は生まれて死んでゆく。反面，n を十分大きくとることにも問題がある。n の大きさは世代の重複期間を表すと同時に，財の「揮発性」をも表すからである。消費貸借モデルのもつ明快さを犠牲にすることなく現実へいっそう近付けるためには，いずれ，重複期間と財の耐久性とを切り離したモデルを構築する必要があるであろう。

第２節　n＋１期間モデル

この経済が存続している時間は「期間」と呼ばれる一定の有限時間の無限のつらなりから成っている。この経済ではどの個人も期間の初めに生まれ，全員が丁度 $n+1$ 期間の間生存する。ただし，n は自然数（$n=1$，

13）対数線形型の効用関数の仮定。Samuelson [1960]，82頁を見よ。
14）４次多項式に直面する。

2,...）である。どの期の初めにも一群の個人が一斉に生まれてくるが，その個人グループは「世代」と呼ばれる。それゆえ，どの時点においても $n+1$ 個の世代が同時生存していることになる。任意の期に生まれてくる世代の人数は常にその1期前の世代の $1+\nu$ 倍である。ν は -1 より大きいある実定数である。すなはち，どの世代人口も，そしてどの時点に生存している総人口も毎期 ν の一定率で増加（負なら減少）している。なお，一般性を失うことなく，0期に生まれた個人の数を1とおくことができる。また，π を次のようにおいておこう。

$$\pi=\frac{1}{1+\nu},\quad \pi>0 \tag{1}$$

この経済には，期間を越えて持ち越すことのできない唯一の種類の財以外存在しない。その財は，各期ごとに所与の賦存量が存在する以外ふやすこともへらすこともできない。したがって，経済はこの賦存量を各個人に配分するための市場———消費貸借市場———のみをつうじて営まれている。任意の t 期における経済全体の賦存量を E_t，その各個人への配分量の総計を C_t とすると，消費貸借市場では各期において市場均衡条件

$$C_t=E_t \tag{2}$$

が成り立たなければならない。

任意の g 期に生まれた世代——— g 期世代———の一個人に注目しよう。彼は生涯を始めるに当たり，彼自信の生涯に起こるつぎのことを完全に知っている。

i）生まれた期の0「歳」から始まって1期間に1歳ずつ齢を重ね，n 歳の終わりに死ぬ。

ii）h 歳の期間には e_h の量の財を「所得」として得る。ただし e_h は実定数，

$$e_h\geqq 0,\qquad h=0,\ 1,\ \cdots,\ n \tag{3}$$

である。

iii) h 歳に彼が主体的におこなう消費を c_h^g ($h=0, 1, 2, \ldots, n$) とすると，自分の生涯効用 u はある関数，

$$u = u(c_0^g, \ c_1^g, \ \cdots, \ c_n^g) \tag{4}$$

で表される。なお，u (・) は内点解を常にもたらすようにうまく特定化された関数であるとする。

iv) h 歳時に彼が当面する消費貸借市場で r_{g+h} ($h=0, 1, 2, \ldots, n$) の利子率が支配している。

このように自分の生涯について完全予見できる個人は，つぎのような主体的最適問題を解くことによって，生涯の経済行動を決定できる。つまり，

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{1+r_{g+j}}\right)c_i^g = \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{1+r_{g+j}}\right)e_i, \qquad \prod_{j=1}^{0}\frac{1}{1+r_{g+j}} = 1 \tag{5}$$

の制約の下で，(4) を最大化することである。

この結果，g 期世代個人は彼の生涯各期の消費を (5) 及びつぎの条件を満たすように決定する。

$$\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial c_h^g}\right)}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial c_0^g}\right)} = \prod_{i=1}^{h}\frac{1}{1+r_{g+i}}, \qquad h = 1, \ \cdots, \ n \tag{6}$$

今 p_t をつぎのように定義しよう。

$$p_t = \prod_{i=1}^{t}\frac{1}{1+r_i}, \qquad p_0 = 1, \ \ p_{t<0} = \prod_{i=0}^{-t}\left(\frac{1}{1+r_i}\right)^{-1} \tag{7}$$

つまり，p_t は t 期の価値を0期時点の現在価値に割り引く「現在価値因子」である。

この p_t を用いて (5) と (6) をつぎのように書き直すことができる。

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{p_{g+i}}{p_g}\right)c_i^g = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{p_{g+i}}{p_g}\right)e_i \tag{8}$$

$$\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial c_h^g}\right)}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial c_0^g}\right)}=\frac{p_{g+h}}{p_g}, \qquad h=1, \cdots, n \tag{9}$$

この経済における個人はすべてこの g 期世代個人で完全に代表されるように同質であるとする。このことは，（2）における E_t と C_t が，それぞれ t 期に生存する個人の所得および消費を各歳世代の人口でウエイトづけた和に等しくなることを意味する。

$$\sum_{i=t-n}^{t}(1+\nu)^i\, c_{t-i}^i=\sum_{i=t-n}^{t}(1+\nu)^i\, e_{t-i} \tag{10}$$

結局，この経済モデルは（8），（9），(10) の連立定差方程式体系で記述されることが分かる。（8）と（9）から，c_h^g は一般に，

$$c_h^g=c_h^g\left(\frac{p_{g+1}}{p_g}, \frac{p_{g+2}}{p_g}, \cdots, \frac{p_{g+n}}{p_g}\right) \tag{11}$$

と表される。(10) の左辺には $c_n^{t-n}, \ldots\ c_0^t$ を含むから，(11) を代入すれば，この体系は変数 p_t のみに関する最大 $2n$ 階の非線形定差方程式に集約されうる。

第3節　定常状態

つぎに，（8），（9），(10) で表現される動学体系がもちうる定常解について検討しよう。定常解を求めるために，あらゆる t について $r_t=r$ とおいてみよう。このとき（7）から，p_t は

$$p_t=p^t, \ p=\frac{1}{1+r} \tag{12}$$

と表されるから，これを (11) に代入して求められる c_h は，つぎのように世代のちがい（g）とは独立になることが分かる。

$$c_h=c_h(p, \ p^2, \ \cdots, \ p^n) \tag{13}$$

これを（8）に代入すると，pが定常状態における主体的行動の条件を満たすために，成り立たねばならない関係が導かれる。

$$\sum_{i=0}^{n} p^i c_i(p,\ p^2,\ \cdots,\ p^n) = \sum_{i=0}^{n} p^i e_i \tag{14}$$

他方，pは定常状態における市場均衡の条件（10）も満たしていなければならない。そこで，（10）に（13）を代入して，両辺を$(1+\nu)^{t-n}$で除し，（1）を用いれば，

$$\sum_{i=0}^{n} \pi^i c_i(p,\ p^2,\ \cdots,\ p^n) = \sum_{i=0}^{n} \pi^i e_i \tag{15}$$

が得られる。

（14）から（15）を辺々差し引いて整理すれば，

$$\sum_{i=0}^{n} (p^i - \pi^i)(c_i - e_i) = 0 \tag{16}$$

なる方程式を最終的に得る。この式から可能な解がいくつあるかを知ることは一般にはできないが，定常状態として3つの種類があることが分かる。

i）無取引解：$c_i = e_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, 従って，$c_0 = e_0$

この解は自明である。しかし考えてみれば，この解は$r_t = r$とおくことなしに，すでに（8）と（10）から直接求めることができていたはずである。この解の下では，一般に各期の市場利子率r_tさえも決めることはできない。利子率に関連して語れることは，単に（6）の左辺を$c_h = e_h$（$h = 0, 1, \ldots n$）で評価して得られる主観的時間選好率の大きさについてであるに過ぎない。それは個人の年齢ごとに異なった複数の主観的利子率をもたらす。ただ無取引解は，市場取引解が無取引解における個人の経済状態$u = u(e_0, e_1, \ldots e_n)$よりも劣るものとなることを常に阻むという特性をもっていることを指摘できる。個人はいつでも市場から「逃避」することによって，そのような劣る状態を避けることができる。最後に，この解が生涯所得流列のみに依存して決まることは明白であろう。

ii）生物的解：$p=\pi$，または $r=\nu$

(16) に生物的解が必ず含まれていることは明らかである。われわれは，こうして「存在定理」を一般に確認することができる。そのもつ普遍性は，この解が生涯所得流列からも効用関数からも独立に（人口成長率のみによって）決定されていることによっている。この解の性格は，第1節でも述べたように，特異である。このことは Gale [1973] によって一般的に，つぎのように示された。

t 期期首において，経済全体に生存している人々の保有する純資産総額を W_t とし，その時点で h 歳(になったばかりの)世代個人の純資産額を w_h^{t-h} で表そう。W_t は $t-1$ 期に生存した各歳の個人達の経済活動の結果としてつぎのように決まってくる。

$$W_t=\sum_{i=0}^{n}(1+\nu)^{t-1-i}\left[(1+r_t)\,w_i^{t-1-i}+(e_i-c_i^{t-1-i})\right] \tag{17}$$

$t-1$ 期期首における純資産総額 W_{t-1} は，$t-1$ 期に生存する世代個人の純資産の総計で定義されるので，

$$W_{t-1}=\sum_{i=0}^{n}(1+\nu)^{t-1-i}\,w_i^{t-1-i} \tag{18}$$

である。(18) を代入することにより，(17) は，

$$W_t=(1+r_{t-1})\,W_{t-1}+\sum_{i=0}^{n}(1+\nu)^{t-1-i}(e_i-c_i^{t-1-i}) \tag{19}$$

となる。市場の需給均衡条件 (10) を考慮すれば，右辺第2項は消えることが分かる。

$$W_t=(1+r_{t-1})\,W_{t-1} \tag{20}$$

他方，定常状態下では個人の純資産 w_t も一定 w に保たれるから，(18) より，W_t は人口と同率で成長しているはずである。

$$W_t=(1+\nu)\,W_{t-1} \tag{21}$$

(20) と (21) から定常状態では，$r=n$，すなはち生物的解となるか，$W_t=W_{t-1}=0$，すなはち「貸借均衡」解となるかのいずれかでなければならない。つまり，一般に生物的解は経済全体としての純債権ないしは純債務を残している。Samuelson が 2 および 3 期間モデルで示したように，生物的解のためには，社会に純債権ないしは純債務を人為的につくりだす機構が存在しなければならないことが $n+1$ 期間モデルについても言える。

このことから，i)，ii) と区別される第 3 の定常状態があることが知られる。

iii) 貸借均衡解

この解には特異な点はない。純粋に自由な市場取引から結果される，ある意味で最も自然な解である。この解を求めるには，(16) から無取引解 $c_h=e_h$ ($h=0, 1, \ldots n$) と生物的解 $p-\pi=0$ をぬき出してしまえばよい。すなはち，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(p^j\pi^{i-j})[c_i(p, p^2, \cdots, p^n)-e_i]=0, \quad c_h \neq e_h, \qquad h=0, \cdots, n \tag{22}$$

を解けばよい。その自然性は，この解が人口成長率，生涯所得流列ばかりでなく効用関数にも依存して決まることにある。しかも一般に複数存在している。しかし，c_h に関わっている効用関数の形状についてなんらかの制約を設けない限り，(22) の代数関数は明示的とはならず，解の静学的特性についてもこれ以上明らかとはならない。

貸借均衡解についてこのような考察に基づけば，われわれは，現在多くの動学的経済研究で用いられている 2 期間モデルが，実は経済分析の用具として望ましい一般性を備えていないことに気が付く。$n+1=2$ とおけば，(16) は

$$(p-\pi)(c_1-e_1)=0 \tag{23}$$

15) Gale[1973]，19頁，(2.4) 式を見よ。

となる。これは勿論，Gale[1973]が得た結果[15)]に一致している。すなはち，2期間モデルには貸借均衡解は全く含まれていない[16)]。この特殊性が，2期間モデルのがんじがらめの，しかし明快な結論を生む要因となっている。それゆえ，先にも述べたように，Samuelson 等が3期間モデルを主として論じたことは至当であった。3期間モデルは3種類の解を含む扱いやすい最小のミニチュアだからである。つまり，重複する世代同志が生存中に取引決済を完結するためには，最低3期間を要するのである。この自然な解が，規範的特性をもつ生物的解の真のライバルでなければならない。

第4節　線形モデルの定式化

いよいよ，$n+1$ 期間モデルの動学的性質を検討することにしよう。われわれの目的は，(8)，(9)，(10) で表される動学体系が時間の経過に伴い，長期において前節で言及したどの定常状態に到ることができるか，そしてとりわけ生物的解がこの意味で安定的な解となりうるか，という問いに答えることである。この問題に有益な解答を与えるためには，これまで保持してきたモデルの完全に一般的議論を一部犠牲にすることを避けることはできない。われわれの手元にあるのは，代数的に特定されない最大 $2n$ 階の非線形定差方程式体系だからである。動学的議論を容易にするひとつの方途は，長期均衡の局所的安定性に分析を限定することであろう。しかし，局所的安定性を検討することは，このモデルのように解が不特定多数ある場合にはあまり意味がないし，これまでの議論から，初期状態が均衡値近傍にあるかのように装うことにも論理上の無理がある。数学的取り扱いがこれと殆ど同等でありながら，大域的安定性を論ずるもうひとつの方途として考えられることは，

16) ただし，Gale は無取引解を貸借均衡解の特殊ケースとして取り扱っている。これは，誤りではないが，両者を区別することがわれわれは適当だと考える。2期間モデルでは，個人にとって関心のある生涯利子率はたった一つに過ぎず，このことが r の定常性と無取引解とを両立させているのである。

方程式体系を線形化する工夫である。これまでの論者達が選んだ道もそうであったように[17]，そのための効用関数の特定化は，おそらくなしうる最善の方法であろう。

効用関数（4）をつぎのようにおこう。

$$u(c_0^g,\ c_1^g,\ \cdots,\ c_n^g)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^i \log c_i^g, \qquad \delta>-1,\ \ c_i>0 \tag{24}$$

ここに，実定数δは効用関数（24）を規定する唯一のパラメータであり，個人の規則的な時間選好の態度を表している。βで，

$$\beta=\frac{1}{1+\delta}, \qquad \beta>0 \tag{25}$$

を表すことにすれば，主体的条件（9）はつぎのように書き直される。

$$\frac{1}{\beta^h}\frac{c_h^g}{c_0^g}=\frac{p_{g+h}}{p_g}, \qquad h=1,\ \cdots,\ n \tag{26}$$

（26）と主体的予算制約条件（8）より，c_h^gを求めると，

$$c_h^g=\frac{\beta^h}{\sum_{i=0}^{n}\beta^i}\left(\frac{p_g}{p_{g+h}}\right)K^g=\frac{\beta^h}{\sum_{i=0}^{n}\beta^i}\left[\prod_{i=0}^{h}(1+r_{g+i})\right]K^g, \qquad h=0,\cdots,n \tag{27}$$

を得る。ただし，K^gは（8）の右辺で示されるg期世代個人の生涯資産の生まれた時点における現在価値

$$K^g=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{P_{g+i}}{p_g}\right)e_i=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{i}\frac{1}{1+r_{g+j}}\right)e_i \tag{28}$$

である。

ここで，効用関数についての特定化（24）から何が生じているかを確かめておこう。対数線形型の効用関数は，いわば「昨夜のディナーが今朝の食欲に影響しない」選好を表すものと言える。このことは，周知のようにc_h^gに対する他期間消費の「価格交叉効果」における「代替項」と「所得項」とが丁度相殺し合う結果であり，（27）に見るように，c_h^gはh期までの利子率と

---

17) Gale [1973] は，対数線形型以外の関数についても論じているが，結果はほとんど変わることはなく，取り扱いの困難さが増すだけのように思われる。

K^g のみに依存して決められることになる。しかし，だからといって将来の利子率が現在の消費と無関係だということにはならない。将来の利子率は個人の生涯資産 K_h^g についての彼の予想に影響を与えることによって，現在の消費に関わってくるからである。Samuelson [1960] は彼のモデルが将来利子率とは全く無関係となることを気にしているが，それはこの特定化された効用関数のためだけではない[18)]。先にも指摘したように，e_n（ただし，$n=2$）を常にゼロとおくことによって，K^g を通ずる効果をも消滅させたためである。確かに，この「隠退型」所得流列パターンは貯蓄の本質的必要性をクローズアップする明快さをもつという点で魅力あるモデルを与えてくれるが，この設定が彼の「不可能性定理」に対する本間の有力な批判をひきおこすことになったのは皮肉である。$e_n=0$ からのほんのわずかな乖離が，モデル操作の容易さを大きく犠牲にしながらも，純粋消費賃借モデルのもつ本質を明らかにするのに十分だったにもかかわらず。われわれは，$e_n \geqq 0$ とおくことによって貯蓄の本質的必要性の理由をむしろ一般化したことになろう。つまり「将来に所得を完全に欠いている」代わりに「将来に所得はひどく少ない」と考えるのである。

さて，モデルに立ち帰ろう。(27)，(28) を市場均衡条件を表す (10) に代入することにより，つぎの動学式を得る。

$$a_0 p_{t+n} + a_1 p_{t+n-1} + \cdots\cdots + a_n p_t + \cdots\cdots + a_{2n} p_{t-n} = 0, \qquad p_i > 0 \tag{29}$$

ただし，

$$a_i = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i} \beta^j \pi^j e_{n-i-j}\ , & i=0,\ \cdots\cdots,\ n-1 \\ \sum_{j=0}^{i} \beta^j \pi^j e_{n-i-j} - \left(\sum_{i=0}^{n} \beta^i\right)\left(\sum_{h=0}^{n} \pi^h e_h\right), & i=n \\ \sum_{j=i-n}^{n} \beta^j \pi^j e_{j-i+n}\ , & i=n+1,\ \cdots\cdots,\ 2n \end{cases} \tag{30}$$

18) これは，Samuelson モデルの短所であると同時に長所でもあると言える。安定分析が，それによって初等数学のレベルで扱い得るものとなったからである。

である。これがとりもなおさず（8），（9），(10) を集約した陽表的表現にほかならない。これは p に関する最大 $2n$ 階の線形同次定差方程式である。いま，生涯所得流列について

$$\begin{aligned} s &= \min\{i \mid e_i \neq 0,\ 0 \leqq i \leqq n\} \\ l &= \max\{i \mid e_i \neq 0,\ 0 \leqq i \leqq n\} \end{aligned} \tag{31}$$

とおこう。そうすれば，係数定数を表す (30) から，(29) は $n+(l-s)$ 階の定差体系となることが分かる。たとえば，Samuelson の3期間モデルは，$n=2$，$s=0$，$l=1$ なるケースであるから，定差体系は3階であり，最大階数4より1階退化している。退化が，効用関数の仮定と「隠退型」所得パターンの仮定の合成結果であることは明らかである。

この l と s を用いて，生涯所得流列の「所得完備型」と「中年稼得型」をつぎのように定義しておく。

定義1

$l=n$，かつ $s=0$ ならば，生涯所得流列は「所得完備型」と呼ばれる。

$n-1 \leqq l+s \leqq n+1$ ならば，生涯所得流列は「中年稼得型」と呼ばれる。

「所得完備型」は説明を要すまい。「中年稼得型」とは，$e_h=0$ の期間があるとすれば，少なくともそれは生涯の初めの方か終わりの方，また両方にあり，その両端期間数の差，$s-(n-l)$ が ± 1 の範囲にある場合である。「所得完備型」はこの「中年稼得型」の特殊ケースである。また，「中年稼得型」には，$e_{h0} \neq 0$ と $e_{h1} \neq 0$ の間に $e_h=0$ なる $h(h_0<h<h_1)$ 期間が1つ以上あってもよい。

ところで，これまで動学体系の線形化は（7）で表された現在価値因子 p について試みられてきたのであって，市場利子率 r についてではなかった。$r \rightarrow p$ の変換によって r は (29) の解とどう関わっているかを明確にしなければならない。この変換を用いて消費貸借モデルを取り扱う方法を確立した

のは本間[1975]である。いま，(29) の特性多項式を$F(\lambda)$ で示せば，

$$F(\lambda) = a_{n-l}\lambda^{n+l-s} + a_{n-l+1}\lambda^{n+l-s-1} + \cdots\cdots + a_{2n-s-1}\lambda + a_{2n-s} = 0 \tag{32}$$

の特性根λを用いて (29) をつぎのよう解くことができる。

$$p_t = \sum_{i=0}^{2n+l-s} A_i \lambda_i^t \tag{33}$$

係数Aは初期値によって定まる定数である。$n+l-s$個の根のうち絶対値において最大のものを$\lambda_{\max}$とすれば，(7) より，

$$\frac{1}{1+r_t} = \frac{p_t}{p_{t-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{2n+l-s} A_i \lambda_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}}\right)^{t-1}}{\sum_{i=0}^{2n+l-s} A_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}}\right)^{t-1}} \tag{34}$$

と表されるので，期間tを十分大きくとれば，

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+r_t}\right) = \lambda_{\max} \tag{35}$$

となる。すなはち，市場利子率は ($\lambda_{\max}^{-1} - 1$) に向かう傾向があることが分かる。

問題は$\lambda_{\max}$がいかなる根であるかということである。とりわけ，$\lambda_{\max} = \pi$を満たすような$F(\lambda)$ の係数 (30) が，果たしてモデルの諸パラメータe_h, δ, νによって与えられ得るかが主要な関心事となる。

第5節　安定の必要十分条件

この節では，$\lambda_{\max} = \pi$となるための，つまり生物的解が長期的に安定となるための代数学条件を求める。第2節で明らかにしたように，(32) には生物的解が必ず含まれている。それゆえ，生物的解以外の解の中に絶対値でπより大きいものがあるかどうかを見究めることで，この問題にアプローチ

することができよう。

(32) に数学的操作を加える前に，この線形定差方程式における定常解の著しい特徴について述べておこう。多公式の係数 (30) を吟味すれば，

$$a_i \begin{cases} >0, & i=n-l, \cdots, n-1 \\ <0, & i=n \\ >0, & i=n+1, \cdots, 2n-s \end{cases} \tag{36}$$

であることに気付く。「デカルトの符号律」によれば，多項方程式の正なる実根は係数の符号が変わる回数かそれより偶数少ない数だけ存在する。この場合その数は2だから，正実根は2個ないし0である。しかし，生物的解の存在定理より $\lambda=\pi$ なる正根は必ず1根は存在するから，もう1根だけ正根が存在しなければならない。つまり，この場合の経済学的に意味のある貸借均衡解は一般に唯一しか存在しないのである[19)]。このことはあらゆる（このように特定化された）$n+1$ 期間モデルについて正しく，以外な事実である。

定理「貸借均衡解存在の一意性」

$n+1$ 期間消費貸借モデルは，$n \geqq 2$ で，効用関数が対数線形（またはコブ・ダグラス）型ならば，貸借均衡解である定常解を必らずひとつだけもつ。

さて，(32) から $\lambda=\pi$ をぬき出してしまうことから始めよう。

$$F(\lambda)=(\lambda-\pi)f(\lambda) \tag{37}$$

と書くことができるから，一般にもはや $f(\lambda)=0$ には生物的解は含まれて

19) このことには Gale [1973] も気付いている。それにもかかわらず，彼が安定性について楽観視していたことは不思議である。デカルトの符号律については，高木 [1985] など代数学のテキストを参照せよ。

いない[20]。$f(\lambda)$を実際に求めてみよう。$(\lambda-\pi)$ が一次であるため，この場合組み立て除法を用いることができる。この結果，$f(\lambda)$は，ゼロでない係数の次数から始めて，

$$f(\lambda)=b_{n-l}\lambda^{n+l-s-1}+b_{n-l+1}\lambda^{n+l-s-2}+\cdots\cdots+b_{2n-s-1}=0 \tag{38}$$

と表される。ここに，係数 b は，

$$\begin{aligned}
b_{n-l} &= e_l \\
b_{n-l+1} &= (1+\beta)\pi e_l+e_{l-1} \\
b_{n-l+2} &= (1+\beta+\beta^2)\pi^2 e_l+(1+\beta)\pi e_{l-1}+e_{l-2} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
b_n &= -(\beta^n+\beta^{n-1}+\cdots+\beta^{l+1})\pi^l e_l-(\beta^n+\beta^{n-1}+\cdots+\beta^l)\pi^{l-1}e_{l-1}\cdots-(\beta^n+ \\
&\quad \cdots+\beta^{s+1})\pi^s e_s \\
&\cdots\cdots\cdots \\
b_{2n-s-2} &= -\beta^n\pi^{n-1}e_{s+1}-(\beta^{n-1}+\beta^{n-2})\pi^{n-2}e_s \\
b_{2n-s-1} &= -\beta^n\pi^{n-1}e_s
\end{aligned} \tag{39}$$

である[21]。言うまでもないが，多項式$f(\lambda)$ の係数は，今度は1回限り符号を変えるに過ぎない。

$$b_i\begin{cases} >0, & i=n-l,\ \cdots,n-1 \\ <0, & i=n,\ \cdots,2n-s-1 \end{cases} \tag{40}$$

20) $\lambda=\pi$ が重根の場合は，この限りではない。以下の議論では，われわれは重根のケースを排除して考える。偶然にそうなる場合はあるが，とくにとりあげる意味はない。

21) 計算の詳細については，付録の数学註を見よ。そこで示しているように，組み立て除法の適用にあたっては，$F(\lambda)$ が $(\lambda-\pi)$ で丁度割り切れる―――存在定理―――という性質を利用して，高次および低次の双方から計算すると，比較的容易に結果を求めることができる。また，結果をもっとてっとり早く求めようと思えば，(22) の一般形の c_i に (26) を直接適用すればよい。両者が同じ結果になることは勿論である。

ここで，線形定差方程式の安定条件に関する数学上の成果について述べておこう。周知のように，線形定差方程式が安定解をもつためには，その特性根がすべて1より小さい絶対値をもたなければならない。そこで探求されたことは，多項方程式がそのような根をもつために係数が満たすべき条件は何かということであった。その必要かつ十分な条件としては，これまで2つのものが知られている。ひとつはSamuelson [1962] によって与えられたもので，微分方程式の安定性条件として有名なRouth-Hurwitzの条件をもとに，適切な変数変換を施すことによって得られたものである。いまひとつは，Routh-Hurwitz条件とは独立に探求されたSchur-Cohnの条件として知られているものである[22]。もちろん，両者は数学的に同値の条件であることが確かめられてはいるが，どちらを用いる方がよいかは応用上の便宜によって判断すべきである。

まず，より直接的な適用が容易なSchur-Cohn条件によって，われわれの問題の安定条件を叙述してみよう。(38) の多項方程式のすべての根が絶対値でπより小さいとすれば，

$$\lambda = \pi x \tag{41}$$

なるxは1より小さい絶対値をもつ。それゆえ，(41) で (38) を変数変換して得られるxについての多項方程式

$$\psi(x) = x^{n+l-s-1} + m_1 x^{n+l-s-2} + \cdots\cdots + m_{n+l-s-1} = 0 \tag{42}$$

$$m_i = \pi^{-i}\left(\frac{b_{n-l-i}}{b_{n-l}}\right),\quad i = 1,\ \cdots,\ n+l-s-1 \tag{43}$$

について，Schur-Cohn条件を適用すればよい。それはつぎのように示される。

22) Schur-Cohn条件の経済学への適用については，安井 [1971]，Chipman [1950] などの文献がある。

安定の必要十分条件S-C

$n+1$期間消費貸借モデルにおける生物的解が，対数線形（コブ・ダグラス）型効用関数（24）の仮定の下で，安定であるための必要かつ十分な条件は，多項式$\psi(x)$の係数を要素とするつぎの行列式M_1，M_2，.. M_kがすべて正となることである。

$$M_k=\begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_2 & \cdots & m_{k-1} & m_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & m_1 & \cdots & m_{k-2} & m_{k-1} & m_k & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_k \\ m_k & m_{k-1} & m_{k-2} & \cdots & m_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_k & m_{k-1} & \cdots & m_2 & m_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_k & m_{k-1} & m_{k-2} & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix},\quad k=n+l-s-1 \tag{44}$$

〔$M_{k-i}(i=0,\ \cdots,\ k-1)$は$M_k$から第$k\sim(k-i+1)$行第$k\sim(k-i+1)$列と，第$2k\sim(2k-i+1)$行第$2k\sim(2k-i+1)$列とをとり除いた行列式である。〕

つぎに，もうひとつの形の必要十分条件を示そう。まず，zをつぎのように定義する。

$$\lambda=\pi\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \tag{45}$$

この「複素変換」によって，λのガウス平面における原点を中心とした半径πの円内領域をすべて，zのガウス平面における虚数軸の左半分の領域に移すことができる[23]。　（45）を（38）に代入すれば，

23）Samuelson[1962]，435-6頁（同書和訳，452～3頁）を見よ。

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \sum_{i=0}^{n+l-s-1} b_{n-l-i}\,\pi^{n+l-s-1-i}(z+1)^{n+l-s-1-i}(z-1)^{i} \\ &= d_0 z^{n+l-s-1} + d_1 z^{n+l-s-2} + \cdots\cdots + d_{n+l-s-1} = 0,\quad d_0 \neq 0\end{aligned} \tag{46}$$

を得る。これによって，問題は多項方程式 $\phi(z)=0$ のすべての根の実数部が負となる条件を求めることに帰着する。そこで，よく知られた Routh-Hurwitz 条件を適用することができる。

安定の必要十分条件R-H

$n+1$ 期間消費貸借モデルにおける生物的解が，対数線形型効用関数 (24) の仮定の下で，安定であるための必要かつ十分な条件は，多項式 $\phi(z)$ の係数を用いて表現されるつぎの行列 $[D]$ の首座小行列式の符号がすべて正となることである。

$$[D] = \begin{pmatrix} d'_1 & d'_3 & d'_5 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & d'_2 & d'_4 & & \vdots \\ 0 & d'_1 & d'_3 & & \vdots \\ \vdots & 1 & d'_2 & d'_4 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & d'_k \end{pmatrix}, \qquad k = n+l-s-1$$

$$d'_i = \frac{d_i}{d_0} \tag{47}$$

第６節　完全不可能性定理

われわれは問題の核心に到った。本節では，S-C 条件または R-H 条件成立の可否を論じよう。

いずれの条件も，$k=n+l-s-1$個の不等号条件式を含んでいる。したがって，$n+1$期間モデルについて同時に満たされなければならない条件式は，最大$2n-1$個，最小$n-1$個となる。個数に関する限り，nとともに条件式は加速度的に増加するから，$n=1$または2について保証された安定性が，Galeのように，それ以上の多期間モデルでも同様の可能性をもつと期待することには，かなり無理があると言わなければならない。しかも，安定性に肯定的な答えを見出だそうとする試みは，上記の行列式の数学的特性法則を何か一般的に導き出すことができない限り，果てしなくかつ技術上極めて困難な仕事となろう[24)]。「勝馬に賭ける」ことが得策である。つまり，体系の不安定性を追及し，「不可能性定理」を証明することである。なぜなら，そのためにはk個のうちただひとつの条件式不成立の証拠を挙げれば十分だからである。

しかし，その前につぎのことを想起しよう。われわれは分析を，任意に与えられた生涯所得流列（e_h）の前提の下で競われる自由市場ゲームの帰結を追う形で進めたきた。これに対し，「不可能性定理」について批判的議論を展開した本間[1982]は，今日一般に許容されていると思われるわずかな政策的介入が生物的解へ向かう市場の自律性の回復に役立つという「誘導定理」を主張した[25)]。このタイプの議論を敷延させ，「偉大な社会」建設に邁進する全知全能の政府が裁量的に選びだす好ましい動学経路の数学問題を検討することも興味深いことである。そうした政策経路を選びだすことは完全に可能である。だが，政府が「何でもなしたいことをなしうる」ほどの全能性とコンセンサスをかちえているのではないならば，可能な政策的関与を本間流「政府」の範囲に留めておくことは隠当であると思われる。

そこで，政策Hをつぎのように定義する。

24）筆者の知る限り，代数学の分野でもこれらの特殊な行列式に関するそのような法則は明らかにされてはいない。現実的アプローチとしては，電子計算機利用による数値例の網羅的計算によることが考えられる。

25）とは言え，誘導定理は「隠退型」3期間モデルについてのみ正しいことが示されたに過ぎない。このケースが特殊な「退化」体系であることは，先に述べた。

定義 2

i）政策 H は，すべての個人の h 歳期所得を v_h だけ増加（負なら減少）させる。

ii）$v_h > -e_h$, つまり，個人の財産権が各期100％侵害されることはない。

iii）政策 H の予算は毎期均衡する。

iii）は，財が耐久性を欠くこのモデルでは，単に非効率な使用を禁止しているにすぎないが，v_h が各期においてつぎの制約を満たすことを要求する。

$$\textstyle\sum_{i=0}^{n}(1+\nu)^{n-i}v_i = 0 \tag{48}$$

したがって，政策 H は各期における経済全体の財の総供給量 E_t に影響を与えず，その世代間への分配のみに関係している。明らかに，政策 H の結果得られる生涯所得流列の集合は（e_h）のとり得る可能な集合に一致する。本間[1982]が用いた「租税政策」と「年金制度」がこの政策 H に含まれることは，言うまでもない。

さて，「完全不可能性定理」を以下のように証明しよう。一見すると S-C 条件の方が取り扱いやすそうだが，われわれは R-H 条件がどうしても満たされない場合があることを示すことを通じて，証明を与える。

(46) の多項式 $\phi(z)$ の係数 d_h（$h=0$，1,.. $n+l-s-1$）は，つぎのように表される。

$$d_h = \sum_{i=0}^{k}(b_{n-1+i}\,\pi^{k-i})\sum_{j=0}^{k}\binom{k-i}{h-j}(-1)^j\binom{i}{j}, \qquad h=0,\ \cdots,\ k$$

$$k = n+l-s-1$$

$$\binom{i}{j} = \begin{cases} \dfrac{i!}{j!\,(i-j)!}, & (i \geqq j,\ j \geqq 0) \\ 0, & (i < j) \\ 0, & (j < 0) \end{cases} \tag{49}$$

R-H 条件の困難さは，[*D*]の首座小行列式の計算が複雑であるばかりでなく，そもそも要素 d_h' それ自体の符号が明確とならないために生じている。しかし，小行列式の中には特殊なものがある。D_1 と D_k である。

$$D_1 = d_1', \quad D_k = d_k' \cdot D_{k-1}, \quad k = n+l-s-1 \tag{50}$$

要素 d_k' が常に孤立することは，[*D*]行列の特徴である。他方，*R-H* 条件はその必要条件として

$$D_1 > 0, \quad D_{k-1} > 0, \quad D_k > 0, \quad k = n+l-s-1 \tag{51}$$

を要求している。したがって，d_0，d_1，d_k は同符号でなければならない[26]。付録の数学註で証明しているように，このうち d_0 については一般に符号を確定できないが，d_k については，

$$d_k \begin{cases} < 0, & (l \text{ が偶数}) \\ > 0, & (l \text{ が奇数}) \end{cases}, \quad k = n+l-s-1 \tag{52}$$

であり，d_1 については，

$$n-1 \geqq l+s \geqq n+1 \text{ のとき}, \qquad d_1 > 0 \tag{53}$$

が確かめられる。もっとも，(53) の「中年稼得型」(**定義 1** を見よ) 所得流列パターンへの限定は，やや強すぎる制限であり，もう少し広い範囲で $d_1 > 0$ が満たされる可能性がある。

(52) と (53) から，つぎのような定理が証明される。

完全不可能性定理

対数線形型効用関数の仮定の下で，任意の $n+1$ 期間純粋消費貸借市

26) Smithies [1942] が提示した2つの安定のための必要条件は，このうち d_0 と d_k にかかわるものであった。

場均衡解は，lが偶数で，生涯所得流列が「中年稼得型」ならば，人口成長率ν，時間選好率δ，および生涯所得流列e_hのどのような可能な値の組み合わせについても，長期において必ず生物的解$r=\nu$以外の解に収束する。

この定理においては，「中年稼得型」の定義に注意しなければならない。それは「所得完備型」を含んでいた。それゆえ，第4節で考察したように，「所得完備型」であらゆる状況が表される（$e_h=0$は限りなく0に近い有限値e_hに置き換えられる）とするならば，少なくとも，3，5，.. の奇数期間モデルでは「完全不可能性」から抜け出すことはできないことになる。しかも，$e_n=0$にこだわってlを奇数とみなすことは，対数線形型効用関数の仮定がもたらすモデルの弱点を露呈することでもあった。さらに，$e_h=0$をどこかに含むモデルだとしても，なお「中年稼得型」は広い適用範囲をもっていることに注意すべきである。

「所得完備型」について言うならば，可能性の頼りの綱は，2，4，.. の偶数期間モデルであろう。しかし，上記の定理は不可能性の十分条件を与えているに過ぎない。それは偶数期間「所得完備型」モデルが安定的となることを保証してはいない。唯一の例外は2期間モデルである。このケースはkが1であるから，Gale[1973]も証明したように，R-H条件は

$$d_0>0,\quad d_1>0 \tag{54}$$

の2式のみである。このうち第2式は (52) ($l=1$) より満たされているので，残りの$d_0>0$条件が決め手となっている。この結果，安定的な「古典派的ケース」と不安定な「サミュエルソン的ケース」とが存在することとなるのである。しかし，第3節で定常状態について明らかにしたように，これはライバルとしての貸借均衡解を全くもたない硬直的な特殊モデルであった。

さらには，$n+1$，lがともに偶数（0を含む）であるならば，たとえば（e_0，0）（e_0，e_1，e_2，0）など「最終隠退型」とも呼ぶべきケースで

は，上記の定理があてはまっている。「個人は最後には完全に隠退する」と考えるならば，可能性論者にとってこれは半ば絶望的帰結であろう。ところがこれとは反対に，「最終隠退型」であっても Samuelson [1958] が不可能とみなした $n+1=3$，$l=1$ のケースは，皮肉なことに，「完全不可能性定理」からはずれている。これはむしろ，Gale の2期間「所得完備型」ケースに似ている。時間選好率（Samuelson は ν と同じゼロと仮定した）との関係で「古典派的ケース」を含み得るのである[27)]。

偶数期間モデル・奇数期間モデルを含め，定理に含まれない他のあらゆるケースが可能性として残されているが，それらがどうなるかを厳密な数学的証明のレベルで究めることは，かなり困難であるように思われる。筆者は，4期間モデルの「所得完備型」（$d_1>0$，$d_5>0$）など $n+1=4$ 以上で定理からもれているケースについて，多数の数値例の計算を電子計算機で試みたが，これまでのところ R-H 条件を満たすものをまだ見付けてはいない。S-C 条件の検討も今後に残された課題である。これについても，(52)，(53) のようなとり扱い易い条件を，筆者は見出だすことはできなかった。

最後に，まだ政策 H のなしうることを調べてみる仕事が残されている。すでに示したように，政策 H は，個人にとって与件たる生涯所得流列を変換するに過ぎず，これまでの分析に含まれるモデルの所得流列ベクトルについての可能な集合を何ら変更するものではない。ただ，政策 H によって，l と s とを変えることはできる。しかし，定義2の ii）により，$e_h>0$ を0に変換することはできないから，l を減らすことと s を増やすことはできない。そこで，さらにつぎのように「所得保障型」を定義しよう。

---

27) このケースは3次方程式をもたらす。生物的解を除いた2根のうち1根は正実根———貸借均衡解———でなければならず，残りの1根は負の実根であることが判明する。これら2根の絶対値を生物的解が上回ればよい。これと同様なことを5次，7次………で確かめ得るかどうかは分からない。5次以上の方程式の代数的解法は不可能だからである。高木[1985]第7章を見よ。

定義 3

政策 H によって l が大きくなるか，または s が小さくなるならば，政策 H は「所得保障型」と呼ばれる。

そうすると，「完全不可能性定理」より，新たな「政策不可能性定理」をつぎのように導くことができる。

政策不可能性定理

対数線形型効用関数の仮定の下で，任意の $n+1$ 期間純粋消費貸借市場を考える。

i）l が偶数で，生涯所得得流列が「中年稼得型」ならば，人口成長率 ν，時間選好率 δ，および政策前の生涯所得流列 e_h のどのような可能な値の組み合わせについても，この市場均衡解を，「所得保障型」ではない政策 H によって，長期において生物的解に誘導することはできない。

ii）また，どのような「所得保障型」の政策 H も，それによって l が偶数で，生涯所得流列が「中年稼得型」となるならば，この市場均衡解を長期において生物的解に誘導することはできない。

本間[1982]が，彼の「租税政策」によって「誘導定理」を示したのは，$n=2$，$l=1$ のケースであった。これは上記定理 i）のあてはまらないケースである。3期間「所得完備型」が不可能性ケースであることを考えると，これが全くきわどい幸運な（おそらく最後の）ケースであったことが分かる。同じモデルに「年金制度」を適用した結果生ずる「所得完備型」への転化ケースの結論は留保されたままであったが，われわれは，これがii）に触れるゆえに不可能性ケースであることを結論することができる。つまり，この場合の「年金制度」は「無効」というより「有害」と言わなければならない。

これは驚くべき帰結である。一般に社会保障制度は「所得完備型」所得流列の実現を目指すであろうから，それが政策 H であるなら，「悪しき社会的契約」となる可能性が多分にあるからである。いまのところ，「所得保障型」政策 H を用いることが好ましい（場合がある）と確実に言えるのは，2期間（e_0，0）ケースと3期間（e_0，0，0）ケースだけである。

第7節　不可能ケース解について

「完全不可能性定理」により，少なくとも l が偶数で，「中年稼得型」ケースの生物的解は動学的に不安定であることが明らかとなった。それでは，これらのケースでは長期市場均衡解はどこに到ろうとするのだろうか。われわれは，生物的解以外の可能な定常状態として，無取引解と貸借均衡解をもっていた。経済的に意味のある貸借均衡解は正実根でなければならず，これは常に唯一存在していた。この貸借均衡解がそうであろうか。

問題にされている不可能ケースでは，必ず $d_k < 0$ であったが，(38) の $f(\lambda)$ を思い出せば，この条件式は

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i b_{n-l+i} \pi^{k-i} = \begin{cases} f(-\pi), & (k\text{が偶数}) \\ -f(-\pi), & (k\text{が奇数}) \end{cases} \tag{55}$$

$$k = n + l - s - 1$$

を表していることが分かる。$f(\lambda)$ の最高次の係数 $b_{n-l} = e_l$ は正であるから，

$$\lim_{\lambda \to -\infty} f(\lambda) = \begin{cases} -\infty, & (k\text{が奇数}) \\ +\infty, & (k\text{が偶数}) \end{cases}, \quad k = n + l - s - 1 \tag{56}$$

が成り立つ。したがって，連続関数についての中間値の定理を用いることにより，

$$
\begin{aligned}
&f(-\pi) > f(\lambda_{-}) = 0 > f(-\infty),\ (k\text{が奇数}) \\
&f(-\pi) < f(\lambda_{-}) = 0 < f(-\infty),\ (k\text{が偶数}) \\
&-\pi > \lambda_{-} > -\infty
\end{aligned}
\tag{57}
$$

なる負の実数λ_{-}が必ず存在することが明らかとなる。つまり，$f(\lambda)=0$は，絶対値でπより大きい負の実根を，少なくとも1つはもつのである。

他方，数学註より，d_0は

$$
d_0 = \sum_{i=0}^{k} b_{n-l+i}\,\pi^{k-i} = f(\pi), \qquad k = n-l-s-1 \tag{58}
$$

と表せることが分かるので，唯一の正実根（経済的に意味のある貸借均衡解）をλ_Bで表せば，

$$
\begin{aligned}
&0 = f(\lambda_B) < f(\pi) < f(+\infty), \qquad (d_0 > 0) \\
&f(\pi) < f(\lambda_B) = 0 < f(+\infty), \qquad (d_0 < 0)
\end{aligned}
\tag{59}
$$

となる。それゆえ，

$$
\begin{aligned}
&0 < \lambda_B < \pi,\ (d_0 < 0) \\
&\lambda_B > \pi > 0,\ (d_0 > 0)
\end{aligned}
\tag{60}
$$

を得る。

(57) と (60) とから，不可能ケースについてつぎの定理が成り立つ。

市場逃避定理

対数線形型効用関数の仮定の下における純粋消費貸借市場均衡解は，完全不可能性定理が成り立ち，かつ (38) の$f(\lambda)$が

$$
f\left(\frac{1}{1+\nu}\right) < 0 \tag{61}
$$

を満たすような人口成長率 ν，時間選好率 δ，および生涯所得流列 e_h の下では，長期において生物的解及び貸借均衡解のいずれにも収束しない。

このようなケースでは，$\lambda_{\max}$ は負の実根または複素根となり，動学体系は，生物的解からも貸借均衡解からも遊離して振動してゆく運動法則をもっている。その結果，早晩市場取引からの退避が生じ，人々は無取引解に引き籠ってしまうと考えられる。しかし，この場合に生涯所得流列が「所得完備型」でなく，$c_h=e_h=0$ を含んでいるとすれば，対数線形型効用関数では $u=-\infty$ を意味し，拒絶されるであろうから，個人は再び何とか取引を実現したいと思うであろう。だが，これ以上何が起こるかを検討することは出来ない。この定理も十分条件を与えているに過ぎないから，たとえ $d_0=f(\pi)>0$ であっても，貸借均衡解（正実根）の安定性が保証されているわけではない。とくに，n が大きくなるにつれて，ふえる根は負根か複素根ばかりであるので，この絶望的な定理の適用可能範囲は大きくなりそうである。

先に Samuelson，本間等が取り扱った3期間（e_0，e_1，0）ケースが可能性の幸運なケースであったことを述べたが，さらにこのケースが，たとえ $d_0<0$ で生物的解が不安定であったとしても，無取引解に陥らないですむことを確かめ得る最後のケースであるという意味でも，幸運であることを指摘することができる。たとえば，$e_0=e_1=1$，$\nu=\delta=0$ である Samuelson の言う「不可能性定理」ケースは，貸借均衡解たる正実根に偶然にも収束し得るからである。それゆえ，このような二次的可能性を残しているケースは，「次善可能」ケースとでも呼ぶべきであろう。

結　語

われわれの分析は，勿論純粋消費貸借モデルの完全な一般的分析ではない。

動学問題においては，それがなしうる最善だとは思われるが，対数線形型効用関数の仮定を用いたからである。非線形モデルでは，有効な正実根の貸借均衡解が複数個存在するかもしれない。しかし，その場合でも，生物的利子率がこれらのライバル解からおびやかされる可能性が高いということは十分予想されるところである。つまり，多くの場合が高々「次善可能」ケースとなるに止どまるであろう。この意味で，われわれの「完全不可能性定理」が広く妥当すると考えられる。

このように考えると，貸借均衡解がふえてゆくというそのこと自体に，多期間がもつ本質的「不可能性」がひそんでいると言わなければならない。反対から言えば，2期間モデルのように特異な生物的利子率で「いやおうなく」取引しなければならないという設定自体に，いわば仕掛けのすべてがあったのである。それがわずかにゆるめられた3期間モデルにもその形跡が残るのは当然であろう。こうして，Samuelsonの「生物的利子理論」は，それが存在し得ることは分かっているが，実際に手に入れることがほとんど不可能な「不老長寿薬」のごときものなのである。少なくとも，放任的分権経済の下では。

話をわれわれの分析の範囲に戻そう。対数線形型モデルに留まるとしても，探求すべき課題は残されている。定理の証明の際留保されたままのケースについて，「完全不可能性定理」が延長され得るかという問題である。とくに注目されるのは $n+1=l+1$ （$\geqq 4$）が偶数で，$s=0$ となる偶数期間「所得完備型」ケースの動学的特性についてである。筆者の試みた多くの数値計算例では，R-H 条件，S-C 条件のいずれについても，それらが求めている不等号条件式のどれかが交わるがわる符号を満たさなかった。当面，$n+1=l+1=4$，$s=0$ にしぼって，明確な結論を追及することを勧める。

しかし，この仕事が困難なことそれ自体が「政策不可能性」のもつ意味あいを強めている。まだ明らかにされていないそれらのケースの中から可能性ケースを捜し出す苦労は，分析者とともに，政策担当者にも要求されるからである。どちらにしても，多期間モデルの「政策不可能性定理」の帰結は，

政策 H の有効性に重大な疑問を投げかけている。どうやら，消費貸借モデルの一般分析は，資本市場がSamuelsonが当初論じた以上に強い市場介入を必要とすることを示唆しているようである。しかも，それはSamuelsonに批判を加えた本間流の「政策 H」よりも強いものでなければならない。動学的資源配分問題の解決のためには，はじめから市場と「政府」は密接なパートナーであることが要求されていると言ってよいだろう。このことは，近年のBarro等の政策無効性議論に対する重要な反論ともなろう[28)]。そこで，今後に残されたもうひとつの興味深い課題には，政策 H よりどの程度「強い」政策であれば，「可能性定理」がよみがえるかを探求することがあげられよう。

28) Barro[1974]の議論は2期間モデルである。しかも，この議論の決め手となる遺産・贈与変数は，われわれの政策Hの手段と同質だと思われる。

参 考 文 献

1) Barro, R. J. (1974) "Are Government Bonds Net Wealth?". *Journal of Political Economy*, 82, 1095−117.

2) Cass, D. & M. E. Yaari (1966) "A Re-examination of the Pure Consumption Loans Model", *Journal of Political Economy*, 74, 353−67.

3) Chipman, J. S. (1950) "The Multi-Sector Multiplier", *Econometrica*, 18, 355−74.

4) Diamond, P. A. (1965) "National Debt in a Neoclassical Growth Model", *American Economic Review*, 55, 1126−50.

5) Gale, D. (1973) "Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models", *Journal of Economic Theory*, 6, 12−36.

6) 本間正明 (1975)「利子学説の一断面：サミュエルソンの生物学的利子理論と時差説について」, **大阪大学経済学**, 24, 4, 12−22.

7) Homma, M. (1977) "A Characteristic Feature of the Consumption-loan Model", *Journal of Economic Theory*, 16, 490−5.

8) 本間正明 (1982)「通時的経済における租税政策の役割」,**『租税の経済理論』**第8章, 創文社.

9) Lerner, A. P. (1959a) "Consumption-Loan Interest and Money", *Journal of Political Economy*, 67, 512−8.

10) Lerner, A. P. (1959b) "Rejoinder", *Journal of Political Economy*, 67,523−5.

11) Malinvaud, E. (1953) "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources". *Econometrica*. 21. 233—68.

12) Meckling, W. H. (1960a) "An Exact Consumption-Loan Model of Interest: A Comment", *Journal of Political Economy*, 68, 72−6.

13) Meckling, W. H. (1960b) "Rejoinder", *Journal of Political Economy*, 68, 83−4.

14) Phelps, E. S. (1965) "Second Essay on the Golden Rule of Accumulation", *American Economic Review*, 55, 638−48.

15) Samuelson, P. A. (1958) "An Exact Consumption-loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy*, 66, 467−82.

16) Samuelson, P. A. (1959) "Reply", *Journal of Political Economy*, 67, 518−22.

17) Samuelson, P. A. (1960) "Infinity, Unanimity, and Singularity: A Reply", *Journal of Political Economy*, 68, 76−83.

18) Samuelson, P. A. (1962) *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, (佐藤隆三訳**『経済分析の基礎』**, 勁草書房, 1967).

19) Smithies, A. (1942) The Stability of Competitive Equilibrium", *Econometrica*, 10, 258−274.

20) Starrett. D. A. (1972) "On Golden Rules, the "Biological Theory of Interest". and Competitive Inefficiency". *Journal of Political Economy*, 80. 276—91.

21) Stein, J. L. (1969) A Minimal Role of Government in Achieving Optimal Growth", *Economica*, 36, 139−50.
22) 高木貞治（1985）**『代数学講義』**改訂新版，共立出版.
23) 安井琢磨（1971）「経済的均衡の動学的安定条件」，熊谷尚夫他編**『安井琢磨著作集』**第Ⅲ巻，創文社.

付録　数学註

A．$f(\lambda)$の導出

$F(\lambda)$を$(\lambda-\pi)$で割り，$f(\lambda)$を求めるために，組立除法を用いる。まず，高次の項から適用し，b_nまでの係数を求めよう。

$$b_{n-l}=a_{n-l}=e_l$$
$$b_{n-l+1}=a_{n-l+1}+\pi b_{n-l}=(1+\beta)\pi e_l+e_{l-1}$$
$$b_{n-l+2}=a_{n-l+2}+\pi b_{n-l+1}=(1+\beta+\beta^2)\pi^2 e_l+(1+\beta)\pi e_{l-1}+e_{l-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{aligned}b_n=a_n+\pi b_{n-1}=&-(\beta^n+\cdots\cdots\cdots+\beta^{l+1})\pi^l e_l\\&-(\beta^n+\cdots\cdots+\beta^l)\pi^{l-1}e_{l-1}\\&-(\beta^n+\cdots+\beta^{s+1})\pi^s e_s\end{aligned}$$

次に，$F(\lambda)$が$(\lambda-\pi)$で丁度割り切れるゆえに，最低次の項から逆に組立除法を適用する。

$$b_{2n-s-1}=\pi^{-1}(-a_{2n-s})=-\beta^n\pi^{n-1}e_s$$
$$b_{2n-s-2}=\pi^{-1}(b_{2n-s-1}-a_{2n-s-1})=-\beta^n\pi^{n-1}e_{s+1}-(\beta^{n-1}+\beta^{n-2})\pi^{n-2}e_s$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

B．$d_h(h=0,\ 1,\ \cdots n+l-s-1)$の計算

$k=n+l-s-1$とおく。$\phi(z)$を展開し，次数ごとに整理すれば，各次数項の係数d_hを求めることができる。

i）$d_0=\sum_{i=0}^{k} b_{n-l+i}\pi^{k-i}=f(\pi)$，これは容易に求まる。

ii）d_1はz^{k-1}の係数である。$(z+1)^{k-i}$を展開すれば，

$$(z+1)^{k-i}=g_0^i z^{k-i}+g_1^i z^{k-i-1}+\cdots\cdots+g_{k-i}^i$$

$$\text{ここに，}\ g_j^i=\begin{pmatrix}k-i\\k-i-j\end{pmatrix}$$

である。これに$(z-1)$を乗ずる。

$$(z+1)^{k-i}(z-1)=(z+1)^{k-i}\cdot z-(z+1)^{k-i}$$
$$=g_0^i z^{k-i+1}+(g_1^i-g_0^i)z^{k-i}+(g_2^i-g_1^i)z^{k-i-1}\cdots\cdots\cdots-g_{k-i}^i$$

さらに $(z-1)$ を乗ずると，

$$(z+1)^{k-i}(z-1)^2=g_0^i z^{k-i+2}+[(g_1^i-g_0^i)-g_0^i]z^{k-i+1}+[(g_2^i-g_1^i)-(g_1^i-g_0^i)]z^{k-i}+\cdots\cdots$$

同様に，$(z-1)^i$ に到るまで $(z-1)$ を乗じてゆけば，$\phi(z)$ の $\sum$ 中の第 $i+1$ 項の z^{k-1} の係数は，こうしてできた多項式展開形の第 2 項の係数である。つまり，$g_1^i-ig_0^i$ に等しい。$g_0^i=1$，$g_1^i=k-i$ であるから，

$$g_1^i-ig_0^i=k-2i \quad (i=0,\ \cdots\cdots,\ k)$$

である。したがって，

$$d_1=\sum_{i=0}^{k}(k-2i)\cdot\pi^{k-i}\cdot b_{n-l+i}$$
$$=kb_{n-l}\pi^k+(k-2)b_{n-l+1}\pi^{k-1}+\cdots\cdots+(k-2i)b_{n-l+i}\pi^{k-i}+\cdots\cdots+(-k)b_k$$

を得る。

$$\begin{cases} i\leqq\dfrac{k}{2} & \text{のとき}\quad k-2i\geqq 0 \\[2ex] i\geqq\dfrac{k}{2} & \text{のとき}\quad k-2i\leqq 0 \end{cases}$$

他方，つぎのことを想起しよう。

$$\begin{cases} b_{n-l},\ b_{n-l+1},\ \cdots b_{n-1}\ \text{はすべて正。} \\ b_n,\ b_{n+1},\ \cdots,\ b_{2n-s}\ \text{はすべて負。} \end{cases}$$

そこで，d_1 が正となる十分条件として，$b_{n-l+i}(k-2i)$ がすべての i について正となることがあげられる。つまり，

$$n+1-l-s\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad n-l-s-1\leqq 0$$
$$\therefore\quad n-1\leqq l+s\leqq n+1$$

であればよい。

iii) d_k は末項である。いま，

$$\varDelta_i=\sum_{j=0}^{k}\binom{k-i}{k-j}(-1)^j\binom{i}{j}$$

を求めてみると，

$$\varDelta_0=1-\binom{k}{1}\cdot 0+\binom{k}{2}\cdot 0-\cdots\cdots=1$$
$$\varDelta_1=0-\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{1}\cdot 0-\cdots\cdots=-1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varDelta_i=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=(-1)^{-i}$$

となることが分かる。したがって，

$$d_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i b_{n-l+i}\pi^{k-i}=(-1)^k\cdot f(-\pi)$$

である。

つぎに，d_kの符号を調べてみよう。元になる多項式$F(\lambda)$の係数との関係を明示しておくために，bをもう一度aで表しておこう。組立除法の適用から明らかなように，

$$
\begin{aligned}
b_{n-l} &= a_{n-l} \\
b_{n-l+1} &= a_{n-l+1}+\pi a_{n-l} \\
b_{n-l+2} &= a_{n-l>2}+\pi a_{n-l+1}+\pi^2 a_{n-l} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{n-1} &= a_{n-1}+\pi a_{n-2}+\cdots\cdots+\pi^{l-1}a_{n-l} \\
b_n &= a'_n+\pi a_{n-1}+\cdots\cdots+\pi^{l-1}a_{n-l+1}+\pi^l a_{n-l}-Q_n \\
b_{n+1} &= -\pi^{-1}a_{n+2}-\pi^{-2}a_{n+3}-\cdots\cdots-\pi^{-2n+s}a_{2n-s} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{2n-s-3} &= -\pi^{-1}a_{2n-s-2}-\pi^{-2}a_{2n-s-1}-\pi^{-3}a_{2n-s} \\
b_{2n-s-2} &= -\pi^{-1}a_{2n-s-1}-\pi^{-2}a_{2n-s} \\
b_{2n-s-1} &= -\pi^{-1}a_{2n-s}
\end{aligned}
$$

ただし，$Q_n=(1+\beta+\cdots\cdots+\beta^n)(\pi^l e_l+\cdots\cdots+e_0)$

$a'_n=a_n+Q_n$

とおく。この関係をbに代入すれば，いくつかの項は相殺し合うので，

$$
\begin{aligned}
d_k=&(-1)^l\left(a'_n+\pi^2 a_{n-2}+\pi^4 a_{n-4}+\cdots\cdots+\left\{\begin{matrix}\pi^{l-1}a_{n-l-1}\\ \pi^l a_{n-l}\end{matrix}\right.\right)\pi^{n-s-1} \\
&+(-1)^l\left(\pi^{-1}a_{n+2}+\pi^{-3}a_{n+4}+\pi^{-5}a_{n+6}+\cdots\cdots+\left\{\begin{matrix}\pi^{-n+s+4}a_{2n-s-1}\\ \pi^{-n+s+3}a_{2n-s}\end{matrix}\right.\right)\pi^{n-s-2} \\
&+(-1)^l\pi^{n-s-1}Q_n,\qquad \text{ただし}\left\{\begin{matrix}l\text{ または }n-s\text{ が奇数の場合}\\ l\text{ または }n-s\text{ が偶数の場合}\end{matrix}\right.
\end{aligned}
$$

となる。ここで，各aとa'をeとπで表わし，注意深く計算すれば，

$$d_k=(-1)^l[\alpha-Q_n]$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\alpha=&\left(\beta^{\left\{\begin{smallmatrix}n-1\\ n\end{smallmatrix}\right.}+\beta^{\left\{\begin{smallmatrix}n-3\\ n-2\end{smallmatrix}\right.}+\cdots\cdots+\beta^{l+2}+\beta^l+\cdots\cdots+\beta^{\left\{\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right.}\right)\pi^l e_l \\
&+\left(\beta^{\left\{\begin{smallmatrix}n-1\\ n\end{smallmatrix}\right.}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\beta^{l+1}+\beta^{l-1}+\cdots\cdots+\beta^{\left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right.}\right)\pi^{l-1}e_{l-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\left(\beta^{\left\{\begin{smallmatrix}n-1\\ n\end{smallmatrix}\right.}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\beta^{s+2}+\beta^s+\cdots\cdots+\beta^{\left\{\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right.}\right)\pi^s e_s
\end{aligned}
$$

つまり，αの$\pi^j e_j$の係数は$\sum\beta^i$からひとつおきに項をとり出したものとなっている。

他方，Q_nは

$$Q_n=\left(\sum_{i=0}^{n}\beta^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\pi^j e_j\right)$$

であるから，

$$\alpha<Q_n$$

が明らかとなる。この結果，

lが偶数ならば，$d_k<0$

lが奇数ならば，$d_k>0$

が証明される。