局所凸線型位相空間における多目的計画法

南　　正　義

1. まえがき

1965年，ソ連の Dubovitskii-Milyutin [1] は数理計画法における Kuhn-Tucker の定理や最適制御理論におけるポントリャーギンの最大原理などの最適化問題を統一的にとらえて Banach 空間の中の集合上で定義された非線型実数値汎関数の極値問題として考え，Lagrange の未定乗数法の一般化を考えた。

更に1972年，アメリカの Holmes [2] は定義域の空間を局所凸線型位相空間に拡張して，Dubovitskii-Milyutin の最適基準を一般化(非凸)計画問題の最適解のための必要条件として厳密に定式化し，更に通常の凸計画問題に対しては，一般化された Kuhn-Tucker の条件が最適解のための必要十分条件であることを厳密に定式化した。

また，1972年，ソ連の Girsanov [3] は Dubovitskii-Milyutin の最適基準が局所凸線型位相空間の中の凸集合上で定義された実数値目的関数を連続な凸関数にした場合の一般化凸計画問題の最適解のための必要十分条件になっていることを指摘した。

一方，多目的最適化問題に関しては，有限次元ユークリッド空間の中の集合上で定義されたベクトル値目的関数を最小化する多目的計画問題を考えて，経済学者 V. Parato によってはじめて提唱された Parato 最適解 (非劣解) の概念，更には弱 Parato 最適解の概念を導入すると，Parato 最適解のための必要条件や十分条件，更には弱 Parato 最適解のための必要条件や十分条件として，通常の実数値目的関数の場合の Kuhn-Tucker の定理と同じ形の結果が得られることがよく知られている (志水清孝 [5] を参照されたい)。

更に，最近では，1977年，岩橋亮輔[6]は多目的関数の Parato 最適化問題だけでなく，最適制御問題をベクトル値目的関数の場合に一般化した Parato 最適制御問題を考えて，Parato 最適解のための必要条件として，通常の場合のポントリャーギンの最大原理と全く同じ形の最大原理が成立することを，ソ連の Boltyanskii [7]によってはじめて導入されたテントの方法を用いて示した。

本論文の目的は Dubovitskii-Milyutin [1] によって定式化された最適化問題を局所凸線型位相空間の中の集合上で定義されたベクトル値目的関数の場合に拡張して，弱 Parato 最適解のための必要条件と十分条件が実数値目的関数の場合と同様に Dubovitskii-Milyutin の補助定理を応用してやはり得られることを示すことである。

2. 弱 Parato 最適解のための必要条件

問題 I（一般化計画問題）

「実係数体上の局所凸線型位相空間Xからm次元ユークリッド空間R^mへの写像 $f = (f_1, \cdots, f_m)$ と条件集合といわれるXの部分集合 Λ と Ω_i ($i = 1, \cdots, n$)が与えられているとき，$\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \cap \Lambda$ とする。$x_0 \in \Omega$ に対して，$f(x) < f(x_0)$ となる $x \in \Omega$ が存在しないとき，x_0 を**弱 Parato 最適解**という。ここで，$f^1 = (f_1^1, \cdots, f_m^1) \in R^m$，$f^2 = (f_1^2, \cdots, f_m^2) \in R^m$ に対して，$f^1 < f^2$ は $f_j^1 < f_j^2$ ($j = 1, \cdots, m$) を意味する。

このとき，弱 Parato 最適解 $x_0 \in \Omega$ を求めよ。」

という問題を考えることにしよう。この問題を (Ω, f) と書こう。

まず，

[定義1]

$\bar{x} \in X$ が**Xの部分集合 Λ に関する $x_0 \in X$ での接方向**(tangent direction of Λ at x_0)であるとは，適当な $\varepsilon > 0$ があって，$0 \leqq t \leqq \varepsilon$ なるすべての t に対して，次のような性質をもつ関数 $r(t)$が存在するときいう。すなわち，

$$x_0+t\bar{x}+r(t)\in\Lambda(0\leqq t\leqq\varepsilon)\text{ かつ }\frac{r(t)}{t}\to\mathbf{0}(t\downarrow 0\text{ のとき})$$

ただし，$\mathbf{0}$ はXの原点とする。

このような $\bar{x}$ の全体を $\mathrm{K}_0\equiv\mathrm{C}(x_0,\Lambda)$ で表わそう。

[補助定理 1]

$\mathrm{K}_0=\mathrm{C}(x_0,\Lambda)$ はXの原点 $\mathbf{0}$ における錐(cone)である。

(証明略)。

[定義 2]

$\bar{x}\in\mathrm{X}$ が **X の部分集合 $\boldsymbol{\Omega_i}$ に関する $\boldsymbol{x_0}$ での許容方向** (admissible direction with respect to Ω_i at x_0) であるとは，適当な $\varepsilon>0$ と適当な $\bar{x}$ の近傍Vがあって，$0<t<\varepsilon$，$x\in\mathrm{V}$ なるすべての t，x に対して，$x_0+tx\in\Omega_i$ となることで，このような $\bar{x}$ の全体を $\mathrm{K}_i\equiv\mathrm{C}(x_0,\Omega_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ で表わそう。

[補助定理 2]

$\mathrm{K}_i=\mathrm{C}(x_0,\Omega_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ はXの原点 $\mathbf{0}$ における開錐 (open cone) である。

(証明略)。

[定義 3]

$\bar{x}\in\mathrm{X}$ が **$\boldsymbol{x_0}\in\mathbf{X}$ において $\boldsymbol{f_j}$ の減少方向** (direction of decrease of f_j at x_0) であるとは，適当な $\varepsilon>0$ と適当な $\bar{x}$ の近傍 V をとれば，$0<t<\varepsilon$，$x\in\mathrm{V}$ なるすべての t，x に対して，

$$f_j(x_0+tx)<f_j(x_0)$$

が成立することで，このような $\bar{x}$ の全体を $\mathrm{K}_{n+j}\equiv\mathrm{C}(x_0,f_j)$ $(j=1,\cdots,m)$ で表わそう。

[補助定理 3]

$\mathrm{K}_{n+j}=\mathrm{C}(x_0,f_j)$ $(j=1,\cdots,m)$ はXの原点 $\mathbf{0}$ における開錐 (open cone) である。 (証明略)。

［**定義4**］

Xから実数空間R^1への連続線型汎関数の全体をX^*と書き，Xの**双対空間**(dual space)という。

［**定義5**］

Xの部分集合Kに対して，

$$K^\circ \equiv \{\phi \in X^* : \sup_{x \in K} \phi(x) \leqq 1\}$$

をKの**極集合**(polar set)という。ただし，supは上限を意味するものとする。

さて，いよいよ弱Parato最適解であるための必要条件として，次の基本定理を述べておこう。

［**定理1**］

$K_i (i=0, 1, \cdots, n+m)$を凸集合と仮定する。このとき，$x_0$が一般化計画問題$(\Omega, f)$の弱Parato最適解ならば，すべてが$\mathbf{0}^*$ではない適当な$y_i \in K_i^\circ (i=0, 1, \cdots, n+m)$が存在して，

$$y_0 + y_1 + \cdots + y_{n+m} = \mathbf{0}^*$$

が成立する。ただし，$\mathbf{0}^*$はX^*の原点とする。

定理1を証明するために，次の基本的補題を準備しておく。

［**補助定理4**(Dubovitskii-Milyutin)］

K_0をXの原点$\mathbf{0}$を頂点とする凸錐(convex cone)とし，$K_1, \cdots, K_{n+m}$を開凸錐(open convex cone)と仮定する。このとき，

$$\bigcap_{i=0}^{n+m} K_i = \emptyset$$

(便宜上，$\emptyset$は空集合を意味する)であるための必要かつ十分条件は，すべてが$\mathbf{0}^*$ではない適当な$y_i \in K_i^\circ (i=0, 1, \cdots, n+m)$が存在して，

$$y_0 + y_1 + \cdots + y_{n+m} = \mathbf{0}^*$$

が成立することである。

(証明はHolmes [2], pp. 51～52を参照されたい)。

定理 1 (必要性)の証明：

補助定理 4 により，$\bigcap_{i=0}^{n+m} \mathrm{K}_i = \emptyset$ を示せばよい。

もし，$\bar{x} \in \bigcap_{i=0}^{n+m} \mathrm{K}_i$ が存在すると仮定すると，$\bar{x} \in \mathrm{K}_i (i = 1, \cdots, n)$。したがって，$\bar{x}$ が Ω_i に関する x_0 での許容方向であるから，適当な $\bar{x}$ の近傍 V_i と適当な $\varepsilon_i > 0$ が存在して，任意の $t (0 < t < \varepsilon_i)$ と任意の $x \in \mathrm{V}_i$ に対して，$x_0 + tx \in \Omega_i (i = 1, \cdots, n)$ となる。また，$\bar{x} \in \mathrm{K}_{n+j} (j = 1, \cdots, m)$，すなわち，$\bar{x}$ が x_0 において f_j の減少方向であるから，適当な $\bar{x}$ の近傍 V_{n+j} と適当な $\varepsilon_{n+j} > 0$ が存在して，任意の $t (0 < t < \varepsilon_{n+j})$ と任意の $x \in \mathrm{V}_{n+j}$ に対して，

$$f_j(x_0 + tx) < f_j(x_0) \quad (j = 1, \cdots, m)$$

となる。また，$\bar{x} \in \mathrm{K}_0$，すなわち，$\bar{x}$ が Λ に関する x_0 での接方向であるから，適当な $\varepsilon_0 > 0$ と適当な $r(t)$ が存在して，

$$x_0 + t\left(\bar{x} + \frac{r(t)}{t}\right) \in \Lambda (0 \leqq t \leqq \varepsilon) \text{ かつ } \frac{r(t)}{t} \longrightarrow \mathbf{0} \ (t \downarrow 0 \text{ のとき})$$

が成立する。

いま，$\mathrm{V} \equiv \bigcap_{i=1}^{n+m} \mathrm{V}_i$ かつ $\varepsilon \equiv \min_{0 \leqq i \leqq n+m} \varepsilon_i$ とおくと，任意の $t (0 < t < \varepsilon)$ と任意の $x \in \mathrm{V}$ に対して，

$f_j(x_0 + tx) < f_j(x_0) \ (j = 1, \cdots, m)$ かつ $x_0 + tx \in \Omega_i (i = 1, \cdots, n)$ が成立する。然るに，$\bar{x} \in \mathrm{V}$ であるから，十分小さい $t > 0$ に対して，

$$\bar{x} + \frac{r(t)}{t} \in \mathrm{V}$$

となる。

したがって，適当な $t_1 > 0$ と適当な

$$x_1 = \bar{x} + \frac{r(t_1)}{t_1} \in \mathrm{V}$$

が存在して，

$$x_0 + t_1 x_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \cap \Lambda = \Omega$$

$$\text{かつ} \quad f_j(x_0 + t_1 x_1) < f_j(x_0) \ (j = 1, \cdots, m)$$

が成立する。

これは x_0 が (Ω, f) の弱 Parato 最適解でないことを示しているから，矛盾である。

$$\therefore \quad \bigcap_{i=0}^{n+m} \mathrm{K}_i = \emptyset$$

したがって，補助定理4により，すべてが $\mathbf{0}^*$ ではない適当な $y_i \in \mathrm{K}_i^\circ (i = 0, 1, \cdots, n+m)$ が存在して，$\sum_{i=0}^{n+m} y_i = \mathbf{0}^*$ が成立する。　（証明終）

3. 弱 Parato 最適解のための必要十分条件

次に，

問題 II（一般化凸計画問題）

「一般化計画問題 (Ω, f) で，特に，$f_j (j = 1, \cdots, m)$ を連続な凸汎関数とし，Λ と $\Omega_i (i = 1, \cdots, n)$ を X の凸部分集合とするとき，弱 Parato 最適解 x_0 を求めよ。」

という問題を考えることにしよう。

ここで次のような仮定を設定しておく。

［正則性の仮定 A］

Ω_i の内部を int Ω_i とおくとき，

$$\bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{int}\, \Omega_i) \cap \Lambda \neq \emptyset$$

とする。

このとき，次の基本定理を得る。

［定理 2］

x_0 が一般化凸計画問題 (Ω, f) の弱 Parato 最適解であるための必要かつ十分条件は，すべてが $\mathbf{0}^*$ ではない適当な $y_i \in \mathrm{K}_i^\circ (i = 0, 1, \cdots, n+m)$ が存在して，

$$y_0 + y_1 + \cdots + y_{n+m} = \mathbf{0}^*$$

が成立することである。

定理2(十分性)の証明：

x_0が(Ω, f)の弱Parato最適解でない，すなわち，$f_j(x_1) < f_j(x_0)$ $(j = 1, \cdots, m)$となる$x_1 \in \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \cap \Lambda$が存在すると仮定すると，矛盾することを示そう。

正則性の仮定Aにより，適当な$\tilde{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{int}\,\Omega_i) \cap \Lambda\ (\subset \Omega)$が存在する。

いま，$z_\lambda = \lambda\tilde{x} + (1-\lambda)x_1$とおくと，$\Omega$は凸集合であるから，$z_\lambda \in \Omega$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$となる。

ここで，f_jはΩで連続であるから，$f_j(z_\lambda) < f_j(x_0)$ $(j = 1, \cdots, m)$となるように，十分小さく$\lambda > 0$をとることができる。

また，f_jはΩで連続な凸関数であるから，

$$f_j'(x_0 \,;\, x) \equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{f_j(x_0 + tx) - f_j(x_0)}{t} \quad (j = 1, \cdots, m)$$

があらゆる$x \in \mathrm{X}$に対して存在して，

$$\mathrm{K}_{n+j} = \mathrm{C}(x_0, f_j) = \{x \in \mathrm{X} : f_j'(x_0 \,;\, x) < 0\} (j = 1, \cdots, m)$$

となり，かつ，

$$0 > f_j(z_\lambda) - f_j(x_0) \geqslant f_j'(x_0 \,;\, z_\lambda - x_0) \ (j = 1, \cdots, m)$$

も成立する。

$$\therefore \quad z_\lambda - x_0 \in \mathrm{K}_{n+j} (j = 1, \cdots, m)$$

更に，$\tilde{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{int}\,\Omega_i)$かつ$x_1 \in \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \cap \Lambda$であるから，$z_\lambda = \lambda\tilde{x} + (1-\lambda)x_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{int}\,\Omega_i)$となる。

然るに，

$$\mathrm{K}_i = \mathrm{C}(x_0, \Omega_i) = \{\mu(x - x_0) : \mu > 0,\ x \in \mathrm{int}\,\Omega_i\} \ (i = 1, \cdots, n)$$

と表わされるから，$z_\lambda - x_0 \in \mathrm{K}_i (i = 1, \cdots, n)$となる。

他方，Λは凸集合であるから，x_0，$z_\lambda \in \Lambda$ならば，$x_0 + \varepsilon(z_\lambda - x_0) \in \Lambda$ $(0 \leqq \varepsilon \leqq 1)$である。

$$\therefore \quad z_\lambda - x_0 \in \mathrm{K}_0 = \mathrm{C}(x_0, \Lambda)$$

結局，$z_\lambda - x_0 \in \bigcap_{i=0}^{n+m} \mathrm{K}_i$ となり，$\bigcap_{i=0}^{n+m} \mathrm{K}_i \neq \emptyset$ である。

これは補助定理4に矛盾する。　（証明終）

4. 通常の凸計画問題に対する弱 Parato 最適性の条件

まず，次の微分可能性の定義を述べておこう。

[定義6]

f をXから R^1 への写像として，x_0，$x \in \mathrm{X}$ のとき，

$$f'(x_0\,;\,x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}$$

とおく。$f'(x_0\,;\,\cdot) \in \mathrm{X}^*$ のとき，$\nabla f(x_0) = f'(x_0\,;\,\cdot)$ と書き，x_0 での f の**勾配** (gradient) という。$\nabla f(x_0)$ が存在するとき，f は x_0 で**微分可能**であるという。

いま，

問題Ⅲ（通常の凸計画問題）

「Xは実係数体上の局所凸線型位相空間とする。f_1，…，f_m，g_1，…，g_n はX上で定義された連続でかつ微分可能な実数値凸汎関数とする。

$$\Omega_i = \{x \in \mathrm{X} : g_i(x) \leqq 0\}\ (i = 1, \cdots, n),$$
$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \text{（すなわち，} \Lambda = \mathrm{X}\text{）}$$

のとき，(Ω, f) の弱 Parato 最適解 $x_0 \in \Omega$ を求めよ。」

という問題を考えることにしよう。

ここで，次のような仮定を設定しておく。

[正則性の仮定B]

同時に $g_i(x) < 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ となる点 $x \in \mathrm{X}$ の存在性を仮定する。

[定理3]

$x_0 \in \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$ が通常の凸計画問題 $(\Omega,\ f)$ の弱 Parato 最適解であるための必要十分条件は，すべてが0ではない適当な $\lambda_i \leqq 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ と $\mu_j \leqq 0$ $(j = 1, \cdots, m)$ が存在して，

$$\lambda_i g_i(x_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla f_j(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = \mathbf{0}^*$$

が成立することである。

定理3の証明は次の補助定理5を用いると簡単である。

[補助定理5]

$f \in X^*(f \neq \mathbf{0}^*)$ のとき,

$$K = \{x \in X : f(x) < 0\}$$

ならば,

$$K^\circ = \{\lambda f : \lambda \leqq 0\}$$

である。

(証明は増田久弥[4], pp. 37〜38を参照されたい)。

定理3の証明:

定理2の証明中より,

$$K_{n+j} = C(x_0, f_j) = \{x \in X : f_j'(x_0\,;\,x) < 0\} \quad (j = 1, \cdots, m)$$

であり, f_j は x_0 で微分可能であるから, $\nabla f_j(x_0) = f_j'(x_0\,;\,\cdot) \in X^*$ である。したがって, 補助定理5より,

$$K_{n+j}^\circ = \{\mu_j \nabla f_j(x_0) : \mu_j \leqq 0\} \quad (j = 1, \cdots, m)$$

と表現される。

また, $\Omega_i = \{x \in X : g_i(x) \leqq 0\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ のとき, $g_i(x_0) = 0$ ならば,

$$K_i = C(x_0, \Omega_i) = \{x \in X : g_i'(x_0\,;\,x) < 0\}$$

と書き表わされて, g_i は x_0 で微分可能であるから, $\nabla g_i(x_0) = g_i'(x_0\,;\,\cdot) \in X^*$ である。したがって, 補助定理5により,

$$K_i^\circ = \{\lambda_i \nabla g_i(x_0) : \lambda_i \leqq 0\} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

と表現される。

故に, 定理2より定理3が導かれる。(証明終)

参　考　文　献

〔1〕 Dubovitskii, A. Ya., and Milyutin, A. A., "Extremum Problems in the Presence of Restrictions", USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 5, No. 3, 1965, pp. 1～80.

〔2〕 Holmes, R. B., "A Course on Optimization and Best Approximation", Lecture Notes in Mathematics, 257, Springer-Verlag, Berlin・Heidelberg・New York, 1972.

〔3〕 Girsanov, I. V., "Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 67, Springer-Verlag, Berlin・Heidelberg・New York, 1972.

〔4〕 増田久弥著, "最適問題序説", 東大数学教室セミナリー・ノート, 33, Tokyo, 1974.

〔5〕 志水清孝著,『システム最適化理論』, コロナ社, 1976, (4.多目的計画法, pp. 285～333).

〔6〕 岩橋亮輔, "Parato最適制御", オイコノミカ, Vol. 14, No. 1, 1977, pp. 1～15.

〔7〕 Bolt'yanskii, V. G., "The Method of Tents in the Theory of Extremal Problems", Russian Mathematical Surveys, Vol. 30, No. 3, 1975, pp. 1～54.

〔8〕 Neustadt, L. W., "An Abstract Variational Theory with Applications to a Broad Class of Optimization Problems, I. General Theory", SIAM. J. Control, Vol. 4, No. 3, 1966, pp. 505～527.

〔9〕 Christopeit, N., "Necessary Optimality Conditions with Application to a Variational Problem", SIAM J. Control and Optimization, Vol. 15, No. 4, 1977, pp. 682～698.