ほとんど推移的な関係行列の性質

橋本　寛

1．はじめに

二項関係は数理科学や計算機科学などの基礎的な分野において重要な概念であり，その主要な基本的性質は従来からよく知られている。[(1)(10)-(12)]　一般に二項関係は，0，1の要素をもつブール行列によって表現できるので，[(9)] 与えられた二項関係を表現するブール行列である関係行列の性質を調べることによって，はじめの二項関係の性質を明らかにすることができる。とくに，ブール行列とそれに関する演算を用いて考察をおこなうことにより，もとの関係について直接考察した場合にはなかなか気付かない関係の別の側面の性質について調べることができる。

本論文では，ほとんど推移的な関係行列と呼ぶ特殊な関係行列の初等的な性質を調べている。このほとんど推移的な関係行列は推移関係行列の一つの一般化となっていて，推移関係行列と密接な関連があり，いくつかの興味深い性質を有している。ほとんど推移的な関係行列については，すでに，変更された推移性をもつ関係行列としてその若干の性質を調べて報告している。[(6)] ここでは，その後得られた性質や前回の結果を精密化したものについて述べている。すなわち，本論文では，まずほとんど推移的な関係行列のもっている基本的性質について，また与えられた関係行列がほとんど推移的となるための条件および必要十分条件について調べている。次に，与えられた関係行列が連結性のもとでほとんど推移的となるための条件や必要十分条件，そしてさらに反対称性を追加した場合のそれらの条件など

について考察をおこなっている。

2．定義

0，1の要素をもつ正方のブール行列に関する記法および演算を以下のように定める。いま$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$をn次ブール行列とするとき

$$R\vee S=[r_{ij}\vee s_{ij}]=[\max(r_{ij},\ s_{ij})]$$

$$R\wedge S=[r_{ij}\wedge s_{ij}]=[\min(r_{ij},\ s_{ij})]$$

$$\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]=[1-r_{ij}]$$

$$R\times S=[(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})]$$

$$R^{k+1}=R^k\times R\quad(k=1,\ 2,\ \cdots),\quad R^1=R$$

$$R^k=[r_{ij}^{(k)}]\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$R'=[r_{ji}]$$

$$\Delta R=R\wedge\overline{R'}$$

$$\nabla R=R\wedge R'$$

$$R\leqq S\iff r_{ij}\leqq s_{ij},\quad i,j=1,2,\ \cdots,\ n$$

と定める。

特殊な行列として，単位行列を$I=[\delta_{ij}]$で，零行列をOで，全要素が1の行列をEで表わす。$R\vee R'\vee I=E$なる関係行列Rは連結的といわれ，$\nabla R\leqq I$なるRは反対称的であるといわれる。また$R^2\leqq R$なる関係行列Rは推移的であるといわれるが，ここで$R^2\leqq R\vee I$なるRをほとんど推移的な関係行列と呼ぶことにする。本論文では，主としてこのほとんど推移的な行列Rに関して考察をおこなっている。ほとんど推移的な関係行列は，推移的な関係行列を一般化した形になっており，適当な条件を付加すれば，推移的な関係行列となる。たとえば，明らかに

$$R^2\leqq R\vee I,\ I\leqq R\Rightarrow R^2=R$$

であるし，また第3節の結果において示すように

$$R^2\leqq R\vee I,\ \nabla R\leqq I\Rightarrow R^2\leqq R\qquad\text{(性質25)}$$

$R^2 \leqq R \vee I,\ R^n = O \Longrightarrow R^2 \leqq R$　(性質32)

などが成立する。さらに，ほとんど推移的な関係行列から，次のようにして推移関係行列を得ることができる。

$R^2 \leqq R \vee I \Longleftrightarrow (R \vee I)^2 = R \vee I$　(性質12)

$R^2 \leqq R \vee I \Longrightarrow (R \vee R^2)^2 \leqq R \vee R^2$　(性質 8)

すなわち，R がほとんど推移的であれば，$R \vee I$ や $R \vee R^2$ は推移的となる。これらの性質については，第3節においてより一般的な性質とともに述べる。

3．結果

まず，$R^2 \leqq R \vee I$ なる関係行列 R のもつ基本的性質について述べ，次に，与えられた関係行列 R が $R^2 \leqq R \vee I$ となるための条件や必要十分条件について述べる。また反対称性や連結性のもとで，与えられた R が $R^2 \leqq R \vee I$ となるための条件や必要十分条件について述べる。最後に，$R^2 \leqq R \vee I$ なる R の特別な場合となっている $R^2 \leqq \Delta R \vee I$ なる R に関していくつかの性質を述べる。

〔性質 1〕[4]

$R^2 \leqq R \vee I \Longrightarrow$ すべての $l\,(l=1,2,\cdots)$ に対して $R^l \leqq R \vee I$

〔性質 2〕

$R^2 \leqq R \vee I \Longrightarrow$ すべての $l\,(l=1,2,\cdots)$ に対して $R^l \leqq R \vee R^2$

(証明)　性質 1 によって，$k=1,2,\cdots$ に対し

$$R^k \leqq R \vee I$$

となるので

$$R^{k+1} \leqq R^2 \vee R$$

ここで $l=k+1$ とおけば，$l=2,3,\cdots$ に対して

$$R^l \leqq R^2 \vee R = R \vee R^2$$

また，明らかに $R \leqq R \vee R^2$ であるので，$l=1,2,\cdots$ に対して

$R^l \leqq R \vee R^2$ (証明終)

上の性質2は，$R^2 \leqq R \vee I$ のとき $R \vee R^2$ が推移閉包 $R \vee R^2 \vee R^3 \vee \cdots$ に等しくなることを示している。

〔性質3〕

$R^2 \leqq R \vee I \iff R^2 \leqq R \vee (R^2 \wedge I)$

(証明) (1) $R^2 \leqq R \vee I$ のとき

$R^2 \wedge R^2 = R^2 \wedge (R \vee I)$

$R^2 = (R^2 \wedge R) \vee (R^2 \wedge I) \leqq R \vee (R^2 \wedge I)$

(2) $R^2 \leqq R \vee (R^2 \wedge I)$ のとき

$R^2 \leqq R \vee (R^2 \wedge I) \leqq R \vee I$ (証明終)

〔性質4〕 すべての l ($l=1,2,\cdots$) に対して

(1) $R \wedge I \leqq R^l \wedge I \leqq R^l$

(2) $R^2 \wedge I \leqq R^{2l} \wedge I \leqq R^{2l}$

(証明) (1) $r_{ii}=1$ とすれば $r_{ii}^{(l)}=1$ となるから

$R \wedge I \leqq R^l \wedge I \leqq R^l$

(2) (1)による。 (証明終)

〔性質5〕 $R^2 \leqq R \vee I$ で，ある l ($l=1,2,\cdots$) に対して $R^{2l} \wedge I \leqq S \leqq R \vee I$ のとき

(1) $R^2 \leqq R \vee S$

(2) $(R \vee S)^2 \leqq R \vee S$

(証明) (1) 性質3および性質4によって

$R^2 \leqq R \vee (R^2 \wedge I) \leqq R \vee (R^{2l} \wedge I) \leqq R \vee S$

(2) $(R \vee S)^2 = (R \vee S) \times (R \vee S)$

$\leqq (R \vee R \vee I) \times (R \vee S)$

$= R^2 \vee R \times S \vee R \vee S$

$\leqq R^2 \vee R \times (R \vee I) \vee R \vee S$

$= R^2 \vee R \vee S$

$= R \vee S$ (上の(1)による) (証明終)

〔性質 6〕

$R^2 \leqq R \vee I \iff$ すべての l $(l=1,2,\cdots)$ に対して

$$(R \vee (R^{2l} \wedge I))^2 \leqq R \vee (R^{2l} \wedge I)$$

(証明) (1) $R^2 \leqq R \vee I$ のとき

性質 5(2)によって，すべてのl $(l=1,2,\cdots)$ に対し

$$(R \vee (R^{2l} \wedge I))^2 \leqq R \vee (R^{2l} \wedge I)$$

(2) すべての l $(l=1,2,\cdots)$ に対して$(R \vee (R^{2l} \wedge I))^2 \leqq R \vee (R^{2l} \wedge I)$ のとき

$l=1$ とおいて

$$(R \vee (R^2 \wedge I))^2 \leqq R \vee (R^2 \wedge I)$$

$$R^2 \leqq (R \vee (R^2 \wedge I))^2 \leqq R \vee (R^2 \wedge I) \leqq R \vee I$$ (証明終)

〔性質 7〕

$R^2 \leqq R \vee I \Longrightarrow$ すべての l $(l=1,2,\cdots)$ に対して

$$(R \vee R^{2l})^2 \leqq R \vee R^{2l}$$

(証明) 性質 1 によって$R^{2l} \leqq R \vee I$ となり，また$R^{2l} \wedge I \leqq R^{2l}$ であるから性質 5(2)において $S=R^{2l}$ とおけば

$$(R \vee R^{2l})^2 \leqq R \vee R^{2l}$$ (証明終)

〔性質 8〕

$$R^2 \leqq R \vee I \Longrightarrow (R \vee R^2)^2 \leqq R \vee R^2$$

(証明) 性質 7 による。 (証明終)

上の性質 8 に関して，その逆の

$$(R \vee R^2)^2 \leqq R \vee R^2 \Longrightarrow R^2 \leqq R \vee I$$

は成立しない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば,

$$R^2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

となり，$(R\vee R^2)^2\leqq R\vee R^2$となるけれども$R^2\leqq R\vee I$ とはならない。

〔性質 9〕

$R^2\leqq R\vee I \Rightarrow (R\vee R^4)^2\leqq R\vee R^4$

(証明)　性質 7 による。　(証明終)

〔性質10〕　$R^2\wedge I\leqq S\leqq R\vee I$ のとき

$R^2\leqq R\vee I \iff (R\vee S)^2\leqq R\vee S$

(証明)　(1)　$R^2\leqq R\vee I$ のとき

性質 5 (2)によって　$(R\vee S)^2\leqq R\vee S.$

(2)　$(R\vee S)^2\leqq R\vee S$ のとき

$R^2\leqq(R\vee S)^2\leqq R\vee S\leqq R\vee I$　(証明終)

〔性質11〕

$R^2\leqq R\vee I \iff (R\vee(R^2\wedge I))^2\leqq R\vee(R^2\wedge I)$

(証明)　性質10による。　(証明終)

〔性質12〕

$R^2\leqq R\vee I \iff (R\vee I)^2=R\vee I$

(証明)　(1)　$R^2\leqq R\vee I$ のとき

性質10によって

$(R\vee I)^2\leqq R\vee I$

ところで $I\leqq R\vee I$ であるから

$(R\vee I)^2=R\vee I$

(2)　$(R\vee I)^2=R\vee I$ のとき

$R^2\leqq(R\vee I)^2=R\vee I$　(証明終)

〔性質13〕

$R^2\leqq R\vee I \Rightarrow$ すべての l $(l=1,2,\cdots)$ に対して

$(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq R\vee\overline{R}'\vee I$

(証明)　性質12によって $(R\vee I)^2=R\vee I$だから

$(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq R^{3l-1}\leqq(R\vee I)^{3l-1}=R\vee I\leqq R\vee\overline{R}'\vee I$　(証明終)

〔性質14〕

$$R^2\leqq R\vee I,\ R^2\leqq\overline{R}\vee I \iff R^2\leqq I$$

(証明)　(1)　$R^2\leqq R\vee I$, $R^2\leqq\overline{R}\vee I$ のとき

$$R^2\wedge R^2\leqq(R\vee I)\wedge(\overline{R}\vee I)$$

$$R^2\leqq(R\wedge I)\vee(I\wedge\overline{R})\vee I=I$$

(2)　$R^2\leqq I$ のとき

$$R^2\leqq I\leqq R\vee I$$

$$R^2\leqq I\leqq\overline{R}\vee I$$

(証明終)

〔性質15〕　次の条件は同値である。

(1)　$R^2\leqq R\vee I$

(2)　$(R\vee I)^2=R\vee I$

(3)　$(R\vee I)^2\leqq R\vee I$

(4)　すべてのl　($l=1,2,\cdots$)　に対して $R^l\leqq R\vee I$

(証明)　(1) $\iff$ (2)　性質12による。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らかである。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　$R^2\leqq(R\vee I)^2\leqq R\vee I$

(1) $\Longrightarrow$ (4)　性質１による。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　明らかである。　(証明終)

〔性質16〕

$$R^2\leqq R\vee I \iff R^2\wedge\overline{I}\leqq R$$

(証明)　一般に

$$P\leqq T\vee S \iff P\wedge\overline{S}\leqq T$$

であるから

$$P=R^2,\ S=I,\ T=R$$

とおいて

$$R^2\leqq R\vee I \iff R^2\wedge\overline{I}\leqq R$$

(証明終)

〔性質17〕[6]

$R \vee R' \vee I = E$，ある l $(l=1,2,\cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{3l-1} \leqq R \vee \overline{R}' \vee I$

$\Rightarrow R^2 \leqq R \vee I$

〔性質18〕

$\overline{R}' \leqq R \vee I$，ある l $(l=1,2,\cdots)$ に対して $(R \wedge \overline{I})^{3l-1} \leqq \overline{R}' \vee I$

$\Rightarrow R^2 \leqq R \vee I$

（証明）　一般に

$$\overline{R}' \leqq R \vee I \iff R \vee R' \vee I = E$$

であるから，[12]性質17によって $R^2 \leqq R \vee I$。　（証明終）

〔性質19〕[8]

$R \vee R' \vee I = E$，$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}' \vee I \Rightarrow R^2 \leqq R \vee I$

上の性質19に関して，

$R \vee R' \vee I = E$，$R^2 \leqq R \vee I \Rightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}' \vee I$

とはいえない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = E$$

とおけば，$(R \wedge \overline{I})^2 = E$ となるが，$\overline{R}' \vee I = E$ とはならない。

なお，一般に

$$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}' \vee I \iff (R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$$

となり，[5][6]次の性質が成立する。

〔性質20〕[3]

$R \vee R' \vee I = E$，$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O \Rightarrow R^2 \leqq R \vee I$

〔性質21〕

$R \vee R' \vee I = E$，ある l $(l=1,2,\cdots)$ に対して $R^{3l} \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R \vee I$

（証明）　$r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき，$r_{ij} \vee \delta_{ij} = 1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから，$i \neq j$ とする。いま，もし $r_{ij} = 0$ とすれば $r_{ji} = 1$ とな

る。よって$r_{ii}^{(3)}=1$となり，$r_{ii}^{(3l)}=1$，$r_{ii}=1$となる。したがって$r_{ii}^{(3l-2)}\wedge r_{ik}\wedge r_{kj}=1$となり，$R^{3l}\leqq R$によって$r_{ij}=1$となり，矛盾が生ずる。ゆえに$r_{ij}=1$となる。 (証明終)

〔性質22〕

$$R\vee R'\vee I=E,\ R^3\leqq R \Longrightarrow R^2\leqq R\vee I$$

(証明) 性質21による。 (証明終)

上の性質22に関して

$$R\vee R'\vee I=E,\ R^2\leqq R\vee I \Longrightarrow R^3\leqq R$$

とはならない。いま

$$R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$R\vee R'\vee I=E$，$R^2\leqq R\vee I$とはなるが，$R^3\leqq R$とはならない。

次の性質はほとんど明らかであるが，念のため証明を与える。

〔性質23〕

$$R\vee R'\vee I=E \Longleftrightarrow R\vee\overline{R}'=R\vee I$$

(証明) (1) $R\vee R'\vee I=E$のとき

$$\begin{aligned}R\vee\overline{R}'&=R\vee\overline{R}'\vee I\\&=(R\vee\overline{R}'\vee I)\wedge E\\&=(R\vee\overline{R}'\vee I)\wedge(R\vee R'\vee I)\\&=R\vee I\end{aligned}$$

(2) $R\vee\overline{R}'=R\vee I$のとき

$$R\vee\overline{R}'\vee R'=R\vee I\vee R'$$

$$R\vee R'\vee I=E$$ (証明終)

なお，一般に$R\vee\overline{R}'=R\vee\overline{R}'\vee I$であるから

$$R\vee R'\vee I=E \Longleftrightarrow R\vee\overline{R}'\vee I=R\vee I$$

も成立する。

〔性質24〕 $R\vee R'\vee I=E$のとき

$R^2 \leqq R \vee \overline{R}' \iff R^2 \leqq R \vee I$

(証明)　性質23による。　(証明終)

〔性質25〕(4)　$\nabla R \leqq I$ のとき

$R^2 \leqq R \vee I \iff R^2 \leqq R$

なお，$\nabla R \leqq I$ のもとで $R^2 \leqq R$ と同値になるいくつかの条件が文献(8)で示されている。

〔性質26〕(6)

$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \iff (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \Delta R$

〔性質27〕　$\nabla R \leqq I$ のとき

$R^2 \leqq R \vee I \iff (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \Delta R$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq R \vee I$ のとき

性質25によって $R^2 \leqq R$。また性質26によって $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \Delta R$。

(2)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \Delta R$ のとき

性質26によって $R^2 \leqq R$ となるから，$R^2 \leqq R \vee I$。　(証明終)

〔性質28〕　$\nabla R \leqq I$ のとき

$R^2 \leqq R \vee I \Rightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}'$

(証明)　性質27による。　(証明終)

〔性質29〕　$R \vee R' \vee I = E,\ \nabla R \leqq I$ のとき

$R^2 \leqq R \vee I \iff (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}'$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq R \vee I$ のとき

性質28によって　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}'$。

(2)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}'$ のとき

性質19によって $R^2 \leqq R \vee I$。　(証明終)

〔性質30〕(4)　$R \vee R' \vee I = E,\ \nabla R \leqq I$ のとき

$R^2 \leqq R \iff (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}' \vee I$

〔性質31〕　$R \vee R' \vee I = E,\ \nabla R \leqq I$ のとき

$R^2 \leqq R \vee I \iff (R \wedge \overline{I})^2 \leqq \overline{R}' \vee I$

(証明)　性質25および性質30による。 (証明終)

なお，$R \vee R' \vee I = E$，$\nabla R \leqq I$ のとき，$R^2 \leqq R \vee I$ と同値になるいくつかの条件が文献(4)に示されている。

〔性質32〕　$R^n = O$ のとき

$$R^2 \leqq R \vee I \iff R^2 \leqq R$$

(証明)　$R^n = O$ のとき $\nabla R = O$ だから性質25によって

$$R^2 \leqq R \vee I \iff R^2 \leqq R$$

(証明終)

次の性質はほとんど自明であり，またよく知られている。

〔性質33〕[(2)]　$R^2 \leqq R$ のとき次の条件は同値である。

(1)　$R \wedge I = O$

(2)　$\nabla R = O$

(3)　$R^n = O$

〔性質34〕

$$R^2 \leqq R \vee I,\ \nabla R = O \iff R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq R \vee I$，$\nabla R = O$ のとき

性質25によって $R^2 \leqq R$ となる。また $\nabla R = O$ から $R \wedge I = O$。

(2)　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$ のとき

性質33によって $\nabla R = O$ となり，また明らかに

$$R^2 \leqq R \leqq R \vee I$$

(証明終)

〔性質35〕

$$R^2 \leqq R \vee I,\ R^n = O \iff R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O$$

(証明)　(1)　$R^2 \leqq R \vee I$，$R^n = O$ のとき

$R^n = O$ のとき $\nabla R = O$ であるから性質25によって $R^2 \leqq R$。また $R^n = O$ のとき $R \wedge I = O$ となる。

(2)　$R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$ のとき

性質33によって $R^n = O$ となり，また $R^2 \leqq R \leqq R \vee I$。 (証明終)

この $R^2 \leqq R$，$R \wedge I = O$ と同値ないくつかの条件が文献(2，6)に示されている。

〔性質36〕[6]

$R\vee R'\vee I=E$, あるl ($l=1,2,\cdots$) に対して $(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq\overline{R'}$

$\Rightarrow R^2\leqq\Delta R\vee I$

〔性質37〕 $R\vee R'=E$ のとき次の条件は同値である。

(1) あるl ($l=1,2,\cdots$)に対して $(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq\overline{R'}$

(2) $R^2=R=\Delta R\vee I$

(3) すべてのl ($l=1,2,\cdots$) に対して $(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq\overline{R'}$

(証明) (1)$\Rightarrow$(2) 性質36および$I\leqq R$によって

$$R^2\leqq\Delta R\vee I\leqq R$$

となる。また$I\leqq R$のとき$R^2\geqq R$であるから

$$R^2=\Delta R\vee I=R$$

(2)$\Rightarrow$(3) $S=R\wedge\overline{I}$とおく。いま$s_{ij}^{(3l-1)}=1$とおき$r_{ji}=0$となることを示す。このときある$k\neq i$に対して$s_{ik}\wedge s_{kj}^{(3l-2)}=1$となる。したがって$r_{ik}=1$, $r_{kj}^{(3l-2)}=1$となり, $R^2=R$だから, $r_{kj}=1$, $r_{ij}=1$となる。もし$i=j$とすれば, $r_{ik}=r_{ki}=1$となり, $R=\Delta R\vee I$から, $r_{ik}=(r_{ik}\wedge\overline{r}_{ki})\vee\delta_{ik}=0$となるが, これは矛盾するので, $i\neq j$となる。したがって$r_{ij}=(r_{ij}\wedge\overline{r}_{ji})\vee\delta_{ij}=1$によって$r_{ji}=0$となる。

(3)$\Rightarrow$(1) 明らかである。 (証明終)

上記の性質37は, 次の性質38が成立するから, 結局は反射的でかつ連結的な反対称的推移関係に関する性質ということになる。

また, この性質37に関して

$R\vee R'=E$, あるl ($l=1,2,\cdots$) に対して $(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq\overline{R'}\vee I$

$\Rightarrow R^2\leqq\Delta R\vee I$

は成立しない。いま

$$l=1,\quad R=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

とおけば, $(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R'}\vee I$であるけれども, $R^2\leqq\Delta R\vee I$とはならない。

しかし，性質44で示すように，この条件のもとで，$R^2=R$ となる。

なお，性質37の$3l-1$を$6l-1$とすれば，性質39が成立する。

〔性質38〕[7]　$R\vee R'=E$ のとき

$R^2\leqq R$，$\nabla R\leqq I \iff (R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R}'$

〔性質39〕[6] $R\vee R'\vee I=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　あるl（$l=1,2,\cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{6l-1}\leqq\overline{R}'\vee I$

(2)　$R^2\leqq\Delta R\vee(R\wedge I)$

(3)　すべてのl（$l=1,2,\cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{6l-1}\leqq\overline{R}'\vee I$

〔性質40〕　$R\vee R'=E$ のとき

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq\overline{R}' \iff R^2=R=\Delta R\vee I$

（証明）　性質37による。　（証明終）

〔性質41〕　$R\vee R'=E$ のとき

$(R\wedge\overline{I})^5\leqq\overline{R}' \iff R^2=R=\Delta R\vee I$

（証明）　性質37による。　（証明終）

〔性質42〕　$R\vee R'=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　ある l（$l=1,2,\cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{6l-4}\leqq\overline{R}'$

(2)　$R^2=R=\Delta R\vee I$

(3)　すべての l（$l=1,2,\cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{6l-4}\leqq\overline{R}'$

（証明）　$6l-4=3(2l-1)-1$であるから性質37による。　（証明終）

〔性質43〕[4]　$R\vee R'=E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　ある l（$l=1,2,\cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq R\vee\overline{R}'\vee I$

(2)　$R^2=R$

(3)　すべての l（$l=1,2,\cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq R\vee\overline{R}'\vee I$

〔性質44〕

$R\vee R'=E$，ある l（$l=1,2,\cdots$）に対して $(R\wedge\overline{I})^{3l-1}\leqq\overline{R}'\vee I \Longrightarrow R^2=R$

（証明）　性質43による。　（証明終）

〔性質45〕

ある l $(l=1,2,\cdots)$ に対して $(R\wedge\overline{I})^{2l-1}\leqq\overline{R}' \Longrightarrow R\leqq\Delta R\vee I$

(証明)　$r_{ij}=1$ とおき，$(r_{ij}\wedge\overline{r}_{ji})\vee\delta_{ij}=1$ となることを示す。$i=j$ のときは明らかであるから，$i\neq j$ とする。

(1)　$l=1$ のとき

$R\wedge\overline{I}\leqq\overline{R}'$ によって $r_{ji}=0$ となり，$r_{ij}\wedge\overline{r}_{ji}=1$。

(2)　$l\geqq 2$ のとき

もし $r_{ji}=1$ とすれば，$r_{ii}^{(2)}=1$ で，$r_{ii}^{(2(l-1))}\wedge r_{ij}=1$ となる。すなわち $r_{ij}^{(2l-1)}=1$ となるから $r_{ji}=0$ となり，矛盾が生ずる。したがって $r_{ji}=0$ となり $r_{ij}\wedge\overline{r}_{ji}=1$。　(証明終)

〔性質46〕

ある l $(l=1,2,\cdots)$ に対して $(R\wedge\overline{I})^{2l}\leqq\overline{I} \Longrightarrow \nabla R\leqq I$

(証明)　$i\neq j$ のとき，もし $r_{ij}\wedge r_{ji}=1$ とすれば $(R\wedge\overline{I})^{2l}$ の $(i,\ i)$ 要素は1となるが，$\overline{I}$ の $(i,\ i)$ 要素は0であるので，矛盾する。よって $r_{ij}\wedge r_{ji}=0$。　(証明終)

〔性質47〕

$I\leqq R$，ある l $(l=1,2,\cdots)$ に対して $(R\wedge\overline{I})^{l}\leqq\overline{R}' \Longrightarrow R=\Delta R\vee I$

(証明)　(1)　$l=2k-1$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

性質45によって $R\leqq\Delta R\vee I$。また $I\leqq R$ だから $\Delta \mathrm{R}\vee \mathrm{I}\leqq R$ となるので $R=\Delta R\vee I$。

(2)　$l=2k$　$(k=1,2,\cdots)$ のとき

性質46によって $\nabla R\leqq I$。したがって

$$\Delta R\vee I=\Delta R\vee I\vee\nabla R=R\vee I=R$$
(証明終)

この性質47と性質44を用いて，すでに示している性質37の(1) $\Longrightarrow$ (2)を得ることもできる。

なお，性質47に関連して，次の性質の成立することが知られている。

〔性質48〕[7]

$I\leqq R$，ある l $(l=1,2,\cdots)$ に対して $(R\wedge\overline{I})^{l}\leqq\overline{R}' \Longrightarrow \nabla R=I$

4．まとめ

ほとんど推移的な関係行列と呼ぶ特殊な関係行列についてその性質を調べ，いくつかの興味ある初等的性質を得た。この関係行列は推移関係行列の一つの一般化となっていて，その特別な場合として推移関係行列を含み，本文中で示したように推移性に関連した性質が成立する。ここで得た結果には自明のものも含まれているが，従来余り知られていないように思われる性質もあり，関係の理論における推移性の周辺の議論において有用であろうと考えられる。なお，ここで考察の対象としたほとんど推移的な関係行列は，もしそれが反射的であれば明らかに推移的となるので，結局反射的な推移関係行列についての対応する性質が得られることになる。これらの性質について考察をおこなうことは興味あることであると考えられ，それについては今後の課題としたい。

文　献

(1) Arrow, K.J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

(2) 橋本　寛："連結的推移関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第34巻，第3・4号，pp.387-405（昭和60年6月）．

(3) 橋本　寛："連結性のもとでの関係行列の性質"，山口経済学雑誌，第37巻，第1・2号，pp.75-88（昭和62年9月）．

(4) 橋本　寛："連結的関係行列の初等的性質"，山口経済学雑誌，第38巻，第3・4号，pp.557-576（平成元年7月）．

(5) 橋本　寛："関係の連結性に関するある種の十分条件について"，山口経済学雑誌，第38巻，第5・6号，pp.783-797　（平成元年11月）．

(6) 橋本　寛："変更された推移性と連結的関係行列"，山口経済学雑誌，第39巻，第3・4号，pp.397-416（平成2年11月）．

(7) 橋本　寛："反射的で反対称的な連結的推移関係"，山口経済学雑誌，第39巻，第5・6号，pp.621-637（平成3年7月）．

(8) 橋本　寛："反対称的推移関係"，山口経済学雑誌，第41巻，第5・6号，pp.473-489（平成6年5月）．

(9) Kim, K.H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York(1982).

(10) Kim, K.H. and Roush, F.W.: "Mathematics for Social Scientists," Elsevier, New York (1980).

(11) Roberts, F.S.: "Discrete Mathematical Models, with applications to social, biological, and environmental problems," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

(12) Schmidt, G. and Ströhlein, T.: "Relations and Graphs," Springer-Verlag, Berlin (1993).