# 情報の中のあいまいな概念の実例

橋　本　　　寛

## 1．はじめに

言語情報の中では，あいまいなクラスを議論することがしばしばあり，そのようなクラスに関してはZadehによるfuzzy集合として多くの研究がなされている〔1〕。このfuzzy集合の実例として示されたこれまでのものは，説明のためだけの例がほとんどであったようにおもわれるが，このfuzzy集合が重要な役割を演じている分野として，行列論とくにその数値計算の分野がある。この行列論におけるfuzzy集合の実例について考察をおこなっている。

いうまでもなく，現在数多くの分野において行列論が応用されている。たとえば，数値解析，実験計画法，制御理論，回路理論，グラフ理論，多変量解析，連関分析など多数の分野をあげることができる。中には，マトリクスまたは行列という名を冠した分野もある。マトリクス構造解析，マトリクス力学，マトリクス経済学，行列簿記，行列ゲームなどである。このように行列論は理工系のみならず文科系においても多数の分野で応用されている。制御工学においては，行列論に精通しておくことは必須のこととされている〔2〕。経済学においても同様であろう。

これらの応用分野において，多数の特殊な行列が出現する。たとえば，対称行列，直交行列，アダマール行列，エルミット行列などである。これらの定義は一応明確であって，確定的な概念である。これに対して先に示したような分野の文献の中では，たとえば，ほとんど特異な行列とか，また0要素の多い行列といった定義のあいまいな概念にしばしば出合う。これらの行列

のクラスの境界はあいまいであって，連続的に変化していると考えることができる。これらをとりあつかうには，最近展開されてきたfuzzy集合の理論を用いると都合がよいとおもわれる。

このあいまいな概念は，数値計算においては重要な役割を演じている。たとえば，数値計算の世界における正則行列と特異行列の境界は不明確である。G. E. フォーサイスとC. B. モウラーはほとんど特異な行列に関連してつぎのように述べている〔3〕。

「特異行列と正則行列のはっきりした数学的区別は，実数という数学者の観念上の世界にのみ存在するという事実が事情を非常に複雑なものとしている.」

また一松はつぎのように述べている〔4〕。

「…数学の理論では，任意の数$a$は0か0でないか，いずれかにきっぱりと割り切れるとして論ずる．ところが実用上の数値には，誤差がつきまとうため，$a$が本当に0なのか，それとも0と僅かでも違うのか，が判然としないという状況がよくおこる．…じっさい線形独立，次元，階数といった基本的概念がすべて，せんじつめるとある量$a$が0か，0でないか，という判定に本質的に依存している…」(…部は省略)

結局，数値計算の世界では，ある量が0であるのか，0でないのかは明確でない。同じ内容のことが一松により別のところでも述べられている〔5〕。

さらに，計量経済学における重複共線性の問題に関して坂下はつぎのように述べている〔6〕。**X**はデータ行列である。

「現実に起こるのは，**X**の各列がほとんど1次従属に近くなり，したがって行列式$|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$がほとんどゼロとなる（特異になる）という，極端に近い重複共線性（near extreme multicollinearity）あるいは準特異性（near singularity）の場合である.」

あいまいな概念は数値計算法の選択に関して用いられることが多い。たとえば芝はバリマックス法に関してつぎのように述べている〔7〕。

「…もちいられる相関行列によっては，この方法が，その利点を発揮で

きないことがある。非対角成分の絶対値が全体的にかなり低い相関行列にバリマックス法を適用してみると，えられた構造ベクトルは，たしかに単純構造を満たしてはいるが，それは一般にあまり有用な結果ではないのである.」(…部は省略)

同様にJ. R. ウエストレイクは連立一次方程式の解法に関してつぎのように述べている〔8〕。

「反復法はほとんど三重対角に近い場合，あるいは対角の比重が大きい(対角優位，diagonal-dominantの) 問題にとくに適しており，そのような場合には収束が速い.」

このように，多くの分野においてあいまいな概念が出現し，しかも本質的な役割を果している。ここでは，行列に関する数値計算の分野からあいまいな概念の具体例を収集し，それに若干の検討を加える。また，その定式化についても議論をおこない，その基本的性質を明らかにしていく。

## 2．確定的な概念とあいまいな概念

すでに述べたように，二つのタイプの概念がある。これらは互いに密接な関係をもっている。両者を比較検討するために，まず確定的な概念の例を表1に示す。これらの定義は明確に与えることができ，その点でのあいまいさはない。

確定的な概念に対して，本質的にあいまいな概念が存在する。そのようなあいまいな概念の例を表2に示す。

これらの具体例を検討してみると，あいまいな概念はつぎの三種に分類できそうである。

（1）行列に対して与えられるある実数の特性値によって記述されているもの

（2）対応する確定的な概念に近いものまたは似ているものとして記述されているもの

（3）あいまいな概念と確定的な概念の複合であるもの

**表1　確定的な概念**

| | |
|---|---|
| C 1．アダマール行列 | C11．単位行列 |
| C 2．エルミット行列 | C12．置換行列 |
| C 3．交代行列 | C13．直交行列 |
| C 4．三角行列 | C14．特異行列 |
| C 5．三重対角行列 | C15．非負行列 |
| C 6．巡回行列 | C16．非負定符号行列 |
| C 7．正規行列 | C17．優対角行列 |
| C 8．正則行列 | C18．ユニタリ行列 |
| C 9．対角行列 | C19．零行列 |
| C10．対称行列 | C20．歪エルミット行列 |

**表2　あいまいな概念**

D 1．密な行列，比較的0の要素の少ない行列
D 2．小さくて密な行列
D 3．疎な行列，粗い行列，スパース行列，過疎行列，要素中に0の多い行列
D 4．大きくてしかも疎な行列，疎大行列
D 5．正定符号のスパース行列
D 6．ほとんど特異な行列，特異に近い行列
D 7．行列式の絶対値が小さい行列
D 8．行列式の絶対値が非常に小さい行列
D 9．行列式の絶対値が非常に大きい行列
D10．行列式の絶対値が小さくて条件の悪くない行列
D11．条件数が比較的小さい行列
D12．条件数が比較的大きい行列
D13．条件の良い行列
D14．条件の悪い行列
D15．条件の非常に悪い行列
D16．条件の良い正定符号行列
D17．正定符号で条件の良い三重対角行列
D18．悪条件の正定符号行列
D19．正定符号で条件の非常に悪い行列

D20. 条件の良い非対称行列
D21. 悪条件の対称行列
D22. 連立方程式の係数行列として条件の良い行列
D23. 固有値計算に対し条件の良い行列
D24. 固有値計算の条件がきわめて悪い行列
D25. 固有値は分離されているが悪条件の行列
D26. 固有値が重根に近い行列
D27. すべての固有値が互いに接近している行列
D28. 最大固有値の絶対値が小さい行列
D29. 最大固有値が1に近い行列
D30. 帯行列に近い行列
D31. 大きな帯状の行列
D32. ほとんど三重対角に近い行列
D33. ほとんど三角形に近い行列
D34. 近似的に対称行列とみなせる行列
D35. 近似的に対角行列とみなせる行列
D36. 0でない要素が対角の近くだけにある行列
D37. 非対角要素の絶対値が全体的にかなり低い行列
D38. 対角の比重が大きい行列
D39. 列ベクトルが近似的に一次独立である行列
D40. 各列がほとんど一次従属に近い行列
D41. 行ベクトルがほとんど一次従属である行列
D42. 非常に大きな行列
D43. ノルムの大きな行列

特性値によって述べられている例は

密な行列

疎な行列

などであって，この場合の特性値は0でない要素の割合すなわち密度である。特性値としては，この他にも，次数，行列式，条件数，最大固有値などがある。この特性値の大小の表現にさらに「比較的」，「かなり」，「非常に」，「きわ

めて」などの修飾語のついたものもある。なお，正則行列$\boldsymbol{x}$の条件数cond($\boldsymbol{x}$)は，一般に$\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{-1}\|$（$\|\cdot\|$は適当なノルム）によって定義されるもので，採用されるノルムによって条件数は異なる。条件数が小さいとき条件が良いといわれ，条件数が大きいとき条件が悪いといわれる。しかし，ある目的に対して条件が良くても，他の目的に対しては条件が悪いこともある。たとえば，ある種の行列は連立方程式の係数行列としては条件が良いが，固有値計算に関してはきわめて条件が悪い。

ある確定的概念に近いものとして述べられているものは

対称行列に近い行列

三重対角行列に近い行列

などである。大部分の確定的概念に対して，これらの例のような形であいまいな概念を述べることができる。この問題については，またあとで議論する。この種のあいまいな概念に対しては，対応する確定的概念との近さまたは距離を定義すれば，それを特性値として，それらのあいまいな概念を述べることができる。

## 3．あいまいな概念のモデル

あいまいな概念の数学的モデルとして，メンバーシップ関数があらかじめ明確に与えられる fuzzy 集合を考える。したがって定義上のあいまいさはない。それゆえ，ここではそれを分布概念とよび，これに対して確定的な概念を集中概念とよぶことにする。

### 3.1　分布概念の定義

いま$X$を空でない集合とし，その任意の要素$\boldsymbol{x}\in X$に対して

$$f(\boldsymbol{x})\in[0,\ 1]$$

とする。具体的には$X$は行列の集合で，$\boldsymbol{x}$は行列である。このとき

$$D=\{(\boldsymbol{x},y)\,|\,\boldsymbol{x}\in X, 0\leqq y\leqq f(\boldsymbol{x})\}$$

を$f(\boldsymbol{x})$に関する分布概念とよぶ。$X$がその定義域である。また関数$f(\boldsymbol{x})$を

分布関数とよぶことにする。通常の fuzzy 集合の定義では

$$\{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in X, y = f(\boldsymbol{x})\}$$

とすることが多いが，ここではそうはしない。その理由はいずれ明らかになる。

任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して，$f(\boldsymbol{x})$ が実数値をとるとき，すなわち

$$-\infty < f(\boldsymbol{x}) < \infty$$

のときは，適当な正規化$N$によって

$$0 \leqq N(f(\boldsymbol{x})) \leqq 1$$

とする。たとえば，つぎのようにして正規化できる。

$$0 < \frac{1}{\pi}\tan^{-1} f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2} < 1$$

行列式の値に関して，その値が大きい行列という概念は，実行列の範囲で考えれば

$$-\infty < \det(\boldsymbol{x}) < \infty$$

であるから

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\det(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}$$

を用いて，その概念を

$$\{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f(\boldsymbol{x})\}$$

によって定めることができる。

また，行列式の絶対値が小さい行列という概念は

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\det(\boldsymbol{x})| + 1}$$

を用いて定義できよう（$|\cdot|$は絶対値を示す)。もちろん

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(\det(\boldsymbol{x}))^2 + 1}$$

とすることもできる。このように一つの目的に対して，いくつかの分布関数が考えられるが，その分布関数の構成が異なれば，それによって定められる分布概念は異なる分布概念と考える。

行列式の絶対値が小さいという概念に関する上の二つの定義は，いずれも $\det(\boldsymbol{x})=0$ のとき $f(\boldsymbol{x})=1$ となる。したがって

$$f_0(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0\cdots\det(\boldsymbol{x})\neq 0\text{ のとき}\\1\cdots\det(\boldsymbol{x})=0\text{ のとき}\end{cases}$$

と定義し

$$C=\{(\boldsymbol{x},y)|\boldsymbol{x}\in X,0\leqq y\leqq f_0(\boldsymbol{x})\}$$

とおけば，$f_0(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{x})$であって

$$D=\{(\boldsymbol{x},y)|\boldsymbol{x}\in X,0\leqq y\leqq f(\boldsymbol{x})\}$$

に対して

$$C\subseteqq D$$

となる。なお，包含関係$\subseteqq$は通常の定義によるものであって，fuzzy 集合の理論におけるそれではない。

上記の $f_0(\boldsymbol{x})$で定義されるような概念$C$を，ここでは集中概念とよぶことにする。この場合の$C$は特異行列に相当するものである。集中概念は分布概念の特別な場合であると考え，その分布関数は定義域において0または1の値をとるとする。ある種の集中概念に対しては，それを含む分布概念を構成できる。そのような分布概念を，もとの集中概念の周辺概念とよぶことにする。

たとえば，集中概念の対称行列に対して，対称行列に近い行列，またはほとんど対称な行列という分布概念すなわち周辺概念は，つぎのようにして定義できる。対称行列は

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$$

なる行列 $\boldsymbol{x}$ であるから（$'$ は行列の転置を示す），たとえば

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|+1}$$

とすることにより，分布概念 $D$ を

$$D=\{(\boldsymbol{x},y)|\boldsymbol{x}\in X, 0\leqq y\leqq f(\boldsymbol{x})\}$$

と定めることができる($\|\cdot\|$は適当なノルムまたはそれに類するものである)。これは対称行列に近い行列という概念に相当している。

このように，多くの場合集中概念に対してそれに関連する分布概念を，集中概念を包含するものとして定義することができる。しかし，つぎのような例もある。正則行列は

$$\det(\boldsymbol{x})\neq 0$$

なる行列 $\boldsymbol{x}$ であるが，これに関する周辺概念はどう定めればよいだろうか。ほとんど特異な行列は，たとえば分布関数

$$f_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{|\det(\boldsymbol{x})|+1}$$

を用いて

$$D_1=\{(\boldsymbol{x},y)|\boldsymbol{x}\in X, 0\leqq y\leqq f_1(\boldsymbol{x})\}$$

と定義できるから，正則行列の周辺概念としては

$$D_1^*=\{(\boldsymbol{x},y)|\boldsymbol{x}\in X, 0\leqq y\leqq 1-f_1(\boldsymbol{x})\}$$

と定めればよいようにおもわれる。ところが，

$$f_0(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0\cdots\det(\boldsymbol{x})=0\\ 1\cdots\det(\boldsymbol{x})\neq 0\end{cases}$$

とおくとき，正則行列の集中概念 $C$ は

$$C=\{(\boldsymbol{x},y)|\boldsymbol{x}\in X, 0\leqq y\leqq f_0(\boldsymbol{x})\}$$

で与えられ

$$D_1^*\supseteqq C$$

とはなっていない。たとえば，$\det(\boldsymbol{x})=1$ とすれば $f_1(\boldsymbol{x})=0.5$，$1-f_1(\boldsymbol{x})=0.5$，$f_0(\boldsymbol{x})=1$ となり，$1-f_1(\boldsymbol{x})<f_0(\boldsymbol{x})$ であって $D_1^*\supseteqq C$ とはならない。

それゆえ，正則行列の周辺概念を定めるためには，正則行列を

$$\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = a\}$$

の形で定義するものをもってくる必要がある。これに合うものとして，つぎの定義がある。正方行列 $\boldsymbol{x}$ の次数を $n(\boldsymbol{x})$ で示せば，正則行列は

$$\{\boldsymbol{x} \mid \mathrm{rank}(\boldsymbol{x}) - n(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

と定義することもできる。よって，たとえば分布関数を

$$f_2(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{rank}(\boldsymbol{x})}{n(\boldsymbol{x})}$$

とすることにより，正則行列の周辺概念を定義できることになる。この $f_2(\boldsymbol{x})$ をもちいて

$$D_2 = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_2(\boldsymbol{x})\}$$

と定めれば，確かに

$$C \subseteqq D_2$$

となっている。

このように確定的概念に関しては，基本的につぎの二つのタイプの定義が存在することがわかる。

$$\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = a\}$$
$$\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \neq a\}$$

前者に対しては周辺概念を容易に定めることができるが，後者に対しては適当な工夫が必要であろう。

### 3.2　分布概念に関する演算

分布概念によってある種の命題を表現できる。たとえば，いま $0 \leqq f_1(\boldsymbol{x})$, $f_2(\boldsymbol{x}) \leqq 1$ なる関数があって

$$\forall\ \boldsymbol{x} \in X \quad f_1(\boldsymbol{x}) \leqq f_2(\boldsymbol{x})$$

であれば

$$D_1 = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_1(\boldsymbol{x})\}$$
$$D_2 = \{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_2(\boldsymbol{x})\}$$

と定めるとき

$$D_1 \subseteqq D_2$$

となる。さらに $0 \leqq f_3(\boldsymbol{x}) \leqq 1$ であって,

$$\forall \boldsymbol{x} \in X \quad f_2(\boldsymbol{x}) \leqq \max(f_1(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x}))$$

という命題が成立するならば，この命題は

$$D_3 = \{(\boldsymbol{x}, y) | \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_3(\boldsymbol{x})\}$$

とおくとき

$$D_2 \subseteqq D_1 \cup D_3$$

と表現できる。この演算$\cup$は通常の演算であってfuzzy集合のそれではない。

一般に，$0 \leqq f_i(\boldsymbol{x}) \leqq 1$ ( $i = 1, 2, 3$ )のとき

$$D_i = \{(\boldsymbol{x}, y) | \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_i(\boldsymbol{x})\}$$

とおけば

$$D_1 \cup D_2 = \{(\boldsymbol{x}, y) | \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_1(\boldsymbol{x}) \vee f_2(\boldsymbol{x})\}$$
$$D_1 \cap D_2 = \{(\boldsymbol{x}, y) | \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_1(\boldsymbol{x}) \wedge f_2(\boldsymbol{x})\}$$

が成立する。ただし，ここでの$\vee$, $\wedge$はつぎのように定義する。$\alpha$, $\beta \in [0, 1]$に対して

$$\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$$
$$\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$$

である。演算$\cup$，$\cap$は通常の集合算である。また，一般に分布概念

$$D = \{(\boldsymbol{x}, y) | \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f(\boldsymbol{x})\}$$

に対して

$$D^* = \{(\boldsymbol{x}, y) | \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq 1 - f(\boldsymbol{x})\}$$

と定義すれば

$$(D_1 \cap D_2)^* = D_1^* \cup D_2^*$$
$$(D_1 \cup D_2)^* = D_1^* \cap D_2^*$$
$$D_1^{**} = D_1$$

が成立する。

分布概念 $D_1$，$D_2$ に対して，包含関係の成立の度合を

$$D_1 \rightharpoonup D_2 = \inf_{x \in X}(f_1(\boldsymbol{x}) \rightarrow f_2(\boldsymbol{x}))$$

と定めることができる。ただし

$$f_1(\boldsymbol{x}) \rightarrow f_2(\boldsymbol{x}) = \min(f_2(\boldsymbol{x}) - f_1(\boldsymbol{x}) + 1,\ 1)$$

とする。このとき

$$0 \leqq D_1 \rightharpoonup D_2 \leqq 1$$

であって

$$D_1 \subseteqq D_2 \Longleftrightarrow D_1 \rightharpoonup D_2 = 1$$

となる。一般に，分布概念 $D_1, D_2, D_3$ に対して，つぎの関係が成立する。

$$(D_1 \cup D_2) \rightharpoonup D_3 = (D_1 \rightharpoonup D_3) \wedge (D_2 \rightharpoonup D_3)$$

この関係が成立することは，つぎのようにして示される。

$$\begin{aligned}(D_1 \cup D_2) \rightharpoonup D_3 &= \{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_1(\boldsymbol{x}) \vee f_2(\boldsymbol{x})\} \\ &\quad \rightharpoonup \{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in X, 0 \leqq y \leqq f_3(\boldsymbol{x})\} \\ &= \inf_{x \in X}((f_1(\boldsymbol{x}) \vee f_2(\boldsymbol{x})) \rightarrow f_3(\boldsymbol{x})) \\ &= \inf_{x \in X}((f_1(\boldsymbol{x}) \rightarrow f_3(\boldsymbol{x})) \wedge (f_2(\boldsymbol{x}) \rightarrow f_3(\boldsymbol{x}))) \\ &= \inf_{x \in X}(f_1(\boldsymbol{x}) \rightarrow f_3(\boldsymbol{x})) \wedge \inf_{x \in X}(f_2(\boldsymbol{x}) \rightarrow f_3(\boldsymbol{x})) \\ &= (D_1 \rightharpoonup D_3) \wedge (D_2 \rightharpoonup D_3)\end{aligned}$$

同様にして，以下の関係も成立することがわかる。

$$(D_1 \cap D_2) \rightharpoonup D_3 \geqq (D_1 \rightharpoonup D_3) \vee (D_2 \rightharpoonup D_3)$$

$$D_1 \rightharpoonup (D_2 \cap D_3) = (D_1 \rightharpoonup D_2) \wedge (D_1 \rightharpoonup D_3)$$

$$D_1 \rightharpoonup (D_2 \cup D_3) \geqq (D_1 \rightharpoonup D_2) \vee (D_1 \rightharpoonup D_3)$$

$$D_1 \rightharpoonup D_2 = D_2^* \rightharpoonup D_1^*$$

つぎに分布概念間の距離は，関数間の距離として

$$d(D_1, D_2) = \sup_{x \in X}(f_1(\boldsymbol{x}) \vartriangle f_2(\boldsymbol{x}))$$

によって定義できる。ここに

$$f_1(\boldsymbol{x}) \vartriangle f_2(\boldsymbol{x}) = |f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})|$$

である。このとき

$$0 \leqq d(D_1, D_2) \leqq 1$$
$$d(D_1, D_2) = d(D_2, D_1)$$
$$d(D_1, D_2) = 0 \Longleftrightarrow D_1 = D_2$$

が成立する。また

$$D(0) = \{(\boldsymbol{x}, 0) | \boldsymbol{x} \in X\}$$

とおけば

$$\sup f_1(\boldsymbol{x}) \vartriangle \sup f_2(\boldsymbol{x}) \leqq \sup(f_1(\boldsymbol{x}) \vartriangle f_2(\boldsymbol{x}))$$

であるから〔9〕

$$d(D_1, D(0)) \vartriangle d(D_2, D(0)) \leqq d(D_1, D_2)$$

が成立する。さらに

$$||f_1(\boldsymbol{x}) - f_3(\boldsymbol{x})| - |f_2(\boldsymbol{x}) - f_3(\boldsymbol{x})|| \leqq |f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})|$$

であるから

$$\begin{aligned} &\sup(f_1(\boldsymbol{x}) \vartriangle f_2(\boldsymbol{x})) \\ \geqq\ &\sup((f_1(\boldsymbol{x}) \vartriangle f_3(\boldsymbol{x})) \vartriangle (f_2(\boldsymbol{x}) \vartriangle f_3(\boldsymbol{x}))) \\ \geqq\ &\sup(f_1(\boldsymbol{x}) \vartriangle f_3(\boldsymbol{x})) \vartriangle \sup(f_2(\boldsymbol{x}) \vartriangle f_3(\boldsymbol{x})) \end{aligned}$$

となり，結局

$$d(D_1, D_3) \vartriangle d(D_2, D_3) \leqq d(D_1, D_2)$$

が成立する。なお $D(0)$ に関しては以下の関係が成立する。

$$D(0) \rightharpoonup D_1 = 1$$
$$D_1 \rightharpoonup D^*(0) = 1$$
$$D_1 \cap D(0) = D(0)$$
$$D_1 \cup D(0) = D_1$$

距離の定義において上限 sup があらわれ，またすでに下限 inf が包含関係の定義において使用されている。これらの sup，inf は論理的な性質をもっている。古典論理における述語論理と概念算（クラス計算）との関係に相当するものは，連続論理と分布概念の計算である。分布概念が通常の概念の拡張であるから，述語論理の全称記号∀，存在記号∃に相当するものは inf および sup である。これらは連続論理の限定作用素と考えられる。

また，∀，∃は inf, sup の2値の場合における解釈であるから，これらの間には共通の性質が数多くみられる。いくつかの例を示せば，つぎのとおりである。

$$\begin{cases}\forall_x(F(\boldsymbol{x})\wedge G(\boldsymbol{x}))\Longleftrightarrow\forall_x F(\boldsymbol{x})\wedge\forall_x G(\boldsymbol{x})\\ \inf\limits_x(f(\boldsymbol{x})\wedge g(\boldsymbol{x}))\ =\ \inf\limits_x f(\boldsymbol{x})\wedge\inf\limits_x g(\boldsymbol{x})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\exists_x(F(\boldsymbol{x})\vee G(\boldsymbol{x}))\Longleftrightarrow\exists_x F(\boldsymbol{x})\vee\exists_x G(\boldsymbol{x})\\ \sup\limits_x(f(\boldsymbol{x})\vee g(\boldsymbol{x}))\ =\ \sup\limits_x f(\boldsymbol{x})\vee\sup\limits_x g(\boldsymbol{x})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\forall_x F(\boldsymbol{x})\Longrightarrow\exists_x F(\boldsymbol{x})\\ \inf\limits_x f(\boldsymbol{x})\ \leqq\ \sup\limits_x f(\boldsymbol{x})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\forall_x(F(\boldsymbol{x})\to(G(\boldsymbol{x})\wedge H(\boldsymbol{x})))\Longleftrightarrow\forall_x(F(\boldsymbol{x})\to G(\boldsymbol{x}))\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\wedge\forall_x(F(\boldsymbol{x})\to H(\boldsymbol{x}))\\ \inf\limits_x(f(\boldsymbol{x})\to(g(\boldsymbol{x})\wedge h(\boldsymbol{x})))=\ \inf\limits_x(f(\boldsymbol{x})\to g(\boldsymbol{x}))\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\wedge\inf\limits_x(f(\boldsymbol{x})\to h(\boldsymbol{x}))\end{cases}$$

ただし，論理式中の $F(\boldsymbol{x})$，$G(\boldsymbol{x})$，$H(\boldsymbol{x})$ は命題関数であり，∧，∨，→ はそれぞれ論理積，論理和，含意を示す。

連続論理, fuzzy 論理においては，∧，∨，→，△以外にも多くの演算が用いられている。たとえば，$\alpha$，$\beta\in[0,1]$ に対して

$$\alpha\odot\beta=\max(\alpha+\beta-1,0)$$
$$\alpha\oplus\beta=\min(\alpha+\beta,1)$$
$$\alpha\ominus\beta=\max(\alpha-\beta,0)$$
$$\alpha\leftrightarrow\beta=\min(1-\alpha+\beta,1-\beta+\alpha)$$

などの演算がある〔10〕。これらの演算とinf, supの関係を調べておくことも必要であろう。

## 4．まとめ

あいまいな概念の実例について検討をおこない，基本的性質をいくつか示した。従来，fuzzy 集合の例としては，あまり実用的でないものがあげられていたが，ここでは実際の場合に生ずる例として，行列の数値計算の分野であらわれるいくつかの例を示した。このような例は他の分野でも見うけられることであろう。あいまいな概念はそれぞれの分野で重要な役割を演じており，またそのあいまいさにもかかわらず便利なものであって，日常生活においてこれを使用せずにすませることは困難であろう。

たとえば，行列に関する数値解法の選択において，正定符号のスパース行列に対しては，ある解法は適しているが，条件の悪い問題に対しては収束が悪い，といった説明がなされている。このように，あいまいな概念に対して，適用される解法の議論がおこなわれており，解法の対象に関する記述において，あいまいな概念が必要となる。

ここでは，このあいまいな概念を定式化した数学的モデルとして分布概念なるものを考え，またその特別な場合として集中概念を定めた。定式化の過程においては，いわゆるfuzzy集合を通常の集合に変換して処理している。したがって，そこであらわれた演算$\cup$, $\cap$は通常の集合算であり，従来からよく知られている集合算に関する性質がそのまま利用できる。ただし，補集合の演算に対応するものとして特別な演算$*$を定義している。

現実のシステムにおいては，あいまいな概念はさけることのできないものであるから，ここでの議論は分布概念を採用する情報検索のモデルの構成において有用であると考えられる。

# 文　　献


1）Zadeh, L. A.: Fuzzy sets, Inform. Control, 8, 338-353 (1965).

2）真鍋：企業からみたシステム理論教育への要望，昭和51年電気四学会連合大会講演論文集〔7〕，297（3）（1976）．

3）G. E. フォーサイス，C. B. モウラー（渋谷，田辺訳）：計算機のための線形計算の基礎，培風館，1970，p. 69.

4）一松：線形数学，筑摩書房，1976，はしがき．

5）一松他：マトリックス（座談会），数理科学，No. 172（10，特集マトリックス），5-14（1977）．

6）坂下：計量経済学，東洋経済新報社，1973，p. 259.

7）芝：行動科学における相関分析法，東京大学出版会，1970，p. 139.

8）J. R. ウエストレイク（戸川訳）：コンピュータのための線形計算ハンドブック，培風館，1972，p. 38.

9）中岡：位相数学入門，朝倉書店，1976，p. 73.

10）水本，田中：Fuzzy 集合に対する限界和および限界差，電子通信学会論文誌 Vol. J59-D，No. 12，905-912（1976）．