局所凸線型位相空間における多目的計画法〔II〕

南　　正義

1.　まえがき

本論文では，拙著〔1〕によって定式化された Dubovitskii–Milyutin 型の多目的計画問題を通常の凸計画問題に限定して，関数が連続かつ凸であるが必ずしも Gâteaux 微分可能でない場合を考える。

この場合には，劣微分形式 (subdifferential formula) によって表現された一般化 Kuhn–Tucker の条件が弱 Pareto 最適解 (弱非劣解) のための必要十分条件になることを示すことができる。

結果の厳密な証明は別の論文に譲ることにする。

2.　弱 Pareto 最適解のための必要十分条件

X を Hausdorff の分離公理を満足する実係数体上の局所凸な線型位相空間とする。

X上に定義された n 個の連続な実数値凸汎関数 g_1, g_2, …, g_n に対して，$\Omega_i=\{x\in \mathrm{X} : g_i(x)\leqq 0\}(i=1, 2, \cdots, n)$ とする。

Xの位相的双対空間 X^* の元 h_0 および実数値 α_0 に対して，$h(x)=h_0(x)+\alpha_0$, $x\in\mathrm{X}$ とし，$\Lambda=\{x\in\mathrm{X} : h(x)=0\}$ とする。

更に，X上に定義された m 個の連続な実数値凸汎関数 f_1, f_2, …, f_m により定まるXから m 次元ユークリッド空間 R^m への写像を $f=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ で表わす。

$\Omega=\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i\cap\Lambda$ とするとき，Ω の元 x_0 が (Ω, f) の**弱 Pareto 最適解**で

あるとは，$f_i(x) < f_i(x_0)$ ($i = 1, 2, \cdots, m$) を満足する Ω の元 x が存在しないことである。

このような弱 Pareto 最適解の存在を問題にする。

ここで次のことを仮定する。

正則性の仮定 (Slater's constraint qualification)：

$g_i(x) < 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) かつ $h(x) = 0$ を満足する点 $x \in \mathrm{X}$ が存在する。

このとき，次の主要定理を得る。

〔定理〕

$x_0 \in \Omega$ が (Ω, f) の弱 Pareto 最適解であるための必要十分条件は，適当な $\lambda_i \geqq 0$ ($i = 1, 2, \cdots, m$)（ただし，$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \neq (0, 0, \cdots, 0)$），$\mu_j \geqq 0$ ($j = 1, 2, \cdots, n$)，$\nu_0 \in \mathrm{R}^1$ と適当な $y_i \in \partial f_i(x_0)$注 ($i = 1, 2, \cdots, m$)，$z_j \in \partial g_j(x_0)$注 ($j = 1, 2, \cdots; n$) が存在して，次の関係式が成り立つことである。

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j z_j + \nu_0 h_0 = \mathbf{0}^*$$

かつ $\mu_j g_j(x_0) = 0$ ($j = 1, 2, \cdots, n$)

ここに，$\mathbf{0}^*$ は X^* の原点とする。

注：X上で定義された実数値凸汎関数 f および $x_0 \in \mathrm{X}$ に対して，すべての $x \in \mathrm{X}$ について，$f(x) - f(x_0) \geqq \phi(x - x_0)$ が成り立つような $\phi \in \mathrm{X}^*$ の全体を f の x_0 における**劣微分** (subdifferential) といい，$\partial f(x_0)$ で表わす。

上の主要定理は拙著〔1〕の定理2と次の補助定理を用いて証明される。

〔補助定理〕

f をX上で定義された連続な実数値凸汎関数とし，$x_0 \in \mathrm{X}$ とする。

このとき，

$$K = \{x \in X : f'(x_0 ; x) < 0\} \neq \emptyset$$

ならば,

$$K^{\circ} = \{\lambda y : \lambda \geqq 0,\ y \in \partial f(x_0)\}$$

が成り立つ。

ここに, $f'(x_0 ; x)$ は関数 f の x_0 における x の正方向の微分を表わし, K° は集合Kの極集合 (polar set) を表わし, $\emptyset$ は空集合を表わすものとする。

この補助定理は有限次元ユークリッド空間の場合における Y. Censor〔4〕の結果をそのまま無限次元空間に拡張したものである。

主要定理における条件(1)が次の条件(2)と同値であることは容易に示すことができる。

$$(2)\quad \min_{x \in X} \left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j g_j(x) + \nu_0 h(x) \right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_0)$$

かつ $\mu_j g_j(x_0) = 0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$, $h(x_0) = 0$, $x_0 \in \Omega$

参 考 文 献

〔1〕南正義, “局所凸線型位相空間における多目的計画法”, 山口経済学雑誌, 第28巻第3・4号, 1978, pp. 11～20.

〔2〕Girsanov, I. V., “Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems”, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 67, Springer-Verlag, 1972.

〔3〕Holmes, R. B., “A Course on Optimization and Best Approximation”, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 257, Springer-Verlag, 1972.

〔4〕Censor, Y., “Pareto Optimality in Multiobjective Problems”, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 4, No. 1, 1977, pp. 41～59.

(1979年6月28日稿)