Negatively Transitive 関係に関する性質の一般化

Generalization of Properties of Negatively Transitive Relations

橋　本　　　寛

HASHIMOTO, Hiroshi

Abstract

Properties of negatively transitive relations are generalized to some extent and various properties are obtained as special cases. Negative transitivity and transitivity are dual concepts and they play an important role in applications of relation theory such as preference relations. Generalized properties of negatively transitive relations and their related properties are shown by using Boolean matrices. Some conditions on relationship between negatively transitive relations and transitive relations are examined.

1．はじめに

選好関係の議論などにおいてしばしば negatively transitive 関係が出現する [1, 3, 24]。この negatively transitive 関係は推移関係と双対な関係にある二項関係であり，様々な関係理論の応用分野において基本的な役割を果たしている。negatively transitive 関係についてはこれまでにも若干の初等的性質が知られているが [1, 3, 4, 5, 7, 12, 28]，本論文ではブール行列を用いて negatively transitive 関係に関する性質の一般化をおこない，いくつかの一般化された性質と関連する性質を示している。これらの一般化された性質から特別な場合として従来知られている negatively transitive 関係の性質が導かれ，推移関係と negatively transitive 関係の相互の関係すなわち両者が互いに同値条件となる前提条件などに関する性質が得られる。また，それらの性質における前提条件に関してとくに反対称性と連結性について考察を

おこない，よく知られている自明な条件も含めてそれらの同値条件として整理している。これらの条件の中には自明ではあるが一般にはあまり知られていないと思われるものも含まれている。

2．定義

本論文では二項関係を0，1の要素をもつブール行列で表現し，関係の性質をブール行列の性質として与える。n 次のブール行列を $R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$，$T=[t_{ij}]$ などで表す。とくに単位行列をI，零行列を O，すべての要素が1のブール行列を E で示す。

ブール行列に関する演算と記法は文献［22］などに従うものとするが，いくつかの主要な演算は次のとおりである。

$$R\times S=[(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})]$$

$$R\diamond S=[(r_{i1}\vee s_{1j})\wedge(r_{i2}\vee s_{2j})\wedge\cdots\wedge(r_{in}\vee s_{nj})]$$

また推移閉包に関する演算を次のように定める。

$$R^{+}=R\vee R^{2}\vee R^{3}\vee\cdots$$

$$R^{*}=I\vee R\vee R^{2}\vee\cdots$$

n 次ブール行列に対しては一般に $R^{+}=R\vee R^{2}\vee\cdots\vee R^{n}$，$R^{*}=I\vee R\vee\cdots\vee R^{n-1}$となることが知られている。なお $R^{0}=I$ とする。

推移関係を表現するブール行列 R は $R^{2}\leqq R$ となり，negatively transitive 関係は $(\overline{R})^{2}\leqq\overline{R}$ すなわち $R\diamond R\geqq R$ となる。また反対称的な関係は $R\wedge R'\leqq I$ となり，連結的な関係は $R\vee R'\vee I=E$ すなわち $\overline{R}\wedge\overline{R'}\leqq I$ となる。さらに非対称的な関係は $R\wedge R'=O$ となり，強連結的な関係は $R\vee R'=E$ すなわち $\overline{R}\wedge\overline{R'}=O$ となる。

3．結果

3．1　予備的な結果

以下の negatively transitive 関係およびそれの一般化に関する議論において必要な反対称性，連結性に関する基本的性質とそれらを若干一般化した性

質などについて考察をおこない，自明な性質も含めて整理し列挙する。

[性質 1]　次の条件は同値である。

(1) $S \wedge T' = O$　(5) $(S \times T) \wedge I = O$

(2) $T \wedge S' = O$　(6) $(T \times S) \wedge I = O$

(3) $\overline{S} \vee \overline{T'} = E$　(7) $(S' \times T') \wedge I = O$

(4) $\overline{T} \vee \overline{S'} = E$　(8) $(T' \times S') \wedge I = O$

(証明)　(1)⇔(2)⇔(3)⇔(4)　明らかである。

(1)⇒(5)　$S \times T$の(i, i)要素は$(s_{i1} \wedge t_{1i}) \vee (s_{i2} \wedge t_{2i}) \vee \cdots \vee (s_{in} \wedge t_{ni})$となるが，$S \wedge T' = O$から$s_{ik} \wedge t_{ki} = 0$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$だから$(S \times T) \wedge I = O$。

(5)⇒(1)　$(s_{i1} \wedge t_{1i}) \vee (s_{i2} \wedge t_{2i}) \vee \cdots \vee (s_{in} \wedge t_{ni}) = 0$だから$s_{ik} \wedge t_{ki} = 0$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$となり，$S \wedge T' = O$。

(2)⇔(6)　(1)⇔(5)の場合と同様である。

(6)⇔(7)　$(S \times T) \wedge I = O \Leftrightarrow (S \times T)' \wedge I = O \Leftrightarrow (T' \times S') \wedge I = O$

(5)⇔(8)　(6)⇔(7)の場合と同様である。　(証明終)

[性質 2]　次の条件は同値である。

(1) $S \vee T' = E$　(5) $(\overline{S} \times \overline{T}) \wedge I = O$

(2) $T \vee S' = E$　(6) $(\overline{T} \times \overline{S}) \wedge I = O$

(3) $\overline{S} \wedge \overline{T'} = O$　(7) $(\overline{S'} \times \overline{T'}) \wedge I = O$

(4) $\overline{T} \wedge \overline{S'} = O$　(8) $(\overline{T'} \times \overline{S'}) \wedge I = O$

(証明)　性質 1 においてS，Tをそれぞれ$\overline{S}$，$\overline{T}$とおく。　(証明終)

[性質 3]　次の条件は同値である。

(1) $S \wedge T = O$　(5) $(S \times T') \wedge I = O$

(2) $S' \wedge T' = O$　(6) $(T' \times S) \wedge I = O$

(3) $\overline{S} \vee \overline{T} = E$　(7) $(S' \times T) \wedge I = O$

(4) $\overline{S'} \vee \overline{T'} = E$　(8) $(T \times S') \wedge I = O$

(証明)　性質 1 においてTをT'とおく。　(証明終)

[性質 4]　次の条件は同値である。

(1) $S \vee T = E$

(2) $S' \vee T' = E$

(3) $\overline{S} \wedge \overline{T} = O$

(4) $\overline{S'} \wedge \overline{T'} = O$

(5) $(\overline{S} \times \overline{T'}) \wedge I = O$

(6) $(\overline{T'} \times \overline{S}) \wedge I = O$

(7) $(\overline{S'} \times \overline{T}) \wedge I = O$

(8) $(\overline{T} \times \overline{S'}) \wedge I = O$

(証明) 性質2において T を T' とおく。　(証明終)

[性質5]　次の条件は同値である。

(1) $S \leqq T$

(2) $S \wedge \overline{T} = O$

(3) $S' \wedge \overline{T'} = O$

(4) $\overline{S} \vee T = E$

(5) $\overline{S'} \vee T' = E$

(6) $(S \times \overline{T'}) \wedge I = O$

(7) $(\overline{T'} \times S) \wedge I = O$

(8) $(S' \times \overline{T}) \wedge I = O$

(9) $(\overline{T} \times S') \wedge I = O$

(証明) (1)⇔(2) 明らかである。

(2)⇔(3)⇔…⇔(9)　性質3において T を $\overline{T}$ とおく。　(証明終)

[性質6]　次の条件は同値である。

(1) $S \wedge S' = O$

(2) $\overline{S} \vee \overline{S'} = E$

(3) $S^2 \wedge I = O$

(4) $(S')^2 \wedge I = O$

(証明) 性質1において $T = S$ とおく。　(証明終)

上の性質6は非対称性の条件であるがよく知られているであろう。$S \wedge S' = O$ と同値な条件についてはこれら以外にもいくつか知られている[4, 18, 20]。

[性質7]　次の条件は同値である。

(1) $S \vee S' = E$

(2) $\overline{S} \wedge \overline{S'} = O$

(3) $(\overline{S})^2 \wedge I = O$

(4) $(\overline{S'})^2 \wedge I = O$

(証明) 性質2において $T = S$ とおく。　(証明終)

この条件(1)の同値条件として上記以外にも若干の条件が知られている[4, 9, 10, 16, 21]。

[性質8] (1) $S \wedge T \wedge \overline{R} = (S \wedge \overline{R}) \wedge (T \vee R) = (T \wedge \overline{R}) \wedge (S \vee R)$

(2) $S \vee T \vee R = (S \wedge \overline{R}) \vee (T \vee R) = (T \wedge \overline{R}) \vee (S \vee R)$

(証明) 明らかである。 (証明終)

[性質9] (1) $S\wedge T\leqq R \Leftrightarrow (S\wedge\overline{R})\wedge(T\vee R)=O \Leftrightarrow (T\wedge\overline{R})\wedge(S\vee R)=O$

(2) $S\vee T\vee R=E \Leftrightarrow (S\wedge\overline{R})\vee(T\vee R)=E \Leftrightarrow (T\wedge\overline{R})\vee(S\vee R)=E$

(証明) $S\wedge T\leqq R \Leftrightarrow S\wedge T\wedge\overline{R}=O$ であるから性質8による。 (証明終)

上の性質9 (1)の $S\wedge T\leqq R$ に関してはいくつかの同値な表現が知られている [17]。

[性質10] 次の条件は同値である。

(1) $S\wedge T'\leqq I$

(2) $(S\wedge\overline{I})\wedge(T'\vee I)=O$

(3) $(T'\wedge\overline{I})\wedge(S\vee I)=O$

(4) $T\wedge S'\leqq I$

(5) $\overline{S}\vee\overline{T'}\vee I=E$

(6) $\overline{T}\vee\overline{S'}\vee I=E$

(7) $((S\wedge\overline{I})\times(T\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(8) $((T\wedge\overline{I})\times(S\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(9) $((S'\wedge\overline{I})\times(T'\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(10) $((T'\wedge\overline{I})\times(S'\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(11) $(S\times(T\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(12) $((T\wedge\overline{I})\times S)\wedge I=O$

(13) $(S'\times(T'\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(14) $((T'\wedge\overline{I})\times S')\wedge I=O$

(15) $((S\wedge\overline{I})\times T)\wedge I=O$

(16) $(T\times(S\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(17) $((S'\wedge\overline{I})\times T')\wedge I=O$

(18) $(T'\times(S'\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(証明) (1)$\Leftrightarrow$(2) $\Leftrightarrow$(3) 性質9による。

(1)$\Leftrightarrow$(4) $\Leftrightarrow$(5)$\Leftrightarrow$(6) 明らかである.

(1)$\Leftrightarrow$(7) $\Leftrightarrow$(8)$\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$(18) $S\wedge T'\leqq I \Leftrightarrow (S\wedge\overline{I})\wedge(T\wedge\overline{I})'=O$

$$\Leftrightarrow S\wedge(T\wedge\overline{I})'=O \Leftrightarrow (S\wedge\overline{I})\wedge T'=O$$

であるから性質1による。 (証明終)

[性質11] 次の条件は同値である。

(1) $S\vee T'\vee I=E$

(2) $(S\wedge\overline{I})\vee(T'\vee I)=E$

(3) $(T'\wedge\overline{I})\vee(S\vee I)=E$

(4) $T\vee S'\vee I=E$

(5) $\overline{S}\wedge\overline{T'}\leqq I$

(10) $((\overline{T'}\wedge\overline{I})\times(\overline{S'}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(11) $(\overline{S}\times(\overline{T}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(12) $((\overline{T}\wedge\overline{I})\times\overline{S})\wedge I=O$

(13) $(\overline{S'}\times(\overline{T'}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(14) $((\overline{T'}\wedge\overline{I})\times\overline{S'})\wedge I=O$

(6) $\overline{T}\wedge\overline{S'}\leqq I$

(7) $((\overline{S}\wedge\overline{I})\times(\overline{T}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(8) $((\overline{T}\wedge\overline{I})\times(\overline{S}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(9) $((\overline{S'}\wedge\overline{I})\times(\overline{T'}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(15) $((\overline{S}\wedge\overline{I})\times\overline{T})\wedge I=O$

(16) $(\overline{T}\times(\overline{S}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(17) $((\overline{S'}\wedge\overline{I})\times\overline{T'})\wedge I=O$

(18) $(\overline{T'}\times(\overline{S'}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(証明) (1)⇔(2) ⇔(3) 性質9による。

(1)⇔(4) ⇔(5)⇔…⇔(18) 性質10において S, T をそれぞれ $\overline{S}$, $\overline{T}$ とおく。

(証明終)

[性質12]　次の条件は同値である。

(1) $S\wedge T\leqq I$

(2) $(S\wedge\overline{I})\wedge(T\vee I)=O$

(3) $(T\wedge\overline{I})\wedge(S\vee I)=O$

(4) $S'\wedge T'\leqq I$

(5) $\overline{S}\vee\overline{T}\vee I=E$

(6) $\overline{S'}\vee\overline{T'}\vee I=E$

(7) $((S\wedge\overline{I})\times(T'\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(8) $((T'\wedge\overline{I})\times(S\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(9) $((S'\wedge\overline{I})\times(T\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(10) $((T\wedge\overline{I})\times(S'\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(11) $(S\times(T'\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(12) $((T'\wedge\overline{I})\times S)\wedge I=O$

(13) $(S'\times(T\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(14) $((T\wedge\overline{I})\times S')\wedge I=O$

(15) $((S\wedge\overline{I})\times T')\wedge I=O$

(16) $(T'\times(S\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(17) $((S'\wedge\overline{I})\times T)\wedge I=O$

(18) $(T\times(S'\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(証明) 性質10において T を T' とおけばよい。　(証明終)

[性質13]　次の条件は同値である。

(1) $S\vee T\vee I=E$

(2) $(S\wedge\overline{I})\vee(T\vee I)=E$

(3) $(T\wedge\overline{I})\vee(S\vee I)=E$

(4) $S'\vee T'\vee I=E$

(5) $\overline{S}\wedge\overline{T}\leqq I$

(6) $\overline{S'}\wedge\overline{T'}\leqq I$

(7) $((\overline{S}\wedge\overline{I})\times(\overline{T'}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(8) $((\overline{T'}\wedge\overline{I})\times(\overline{S}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(9) $((\overline{S'}\wedge\overline{I})\times(\overline{T}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(10) $((\overline{T}\wedge\overline{I})\times(\overline{S'}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(11) $(\overline{S}\times(\overline{T'}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(12) $((\overline{T'}\wedge\overline{I})\times\overline{S})\wedge I=O$

(13) $(\overline{S'}\times(\overline{T}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(14) $((\overline{T}\wedge\overline{I})\times\overline{S'})\wedge I=O$

(15) $((\overline{S}\wedge\overline{I})\times\overline{T'})\wedge I=O$

(16) $(\overline{T'}\times(\overline{S}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(17) $((\overline{S'}\wedge\overline{I})\times\overline{T})\wedge I=O$

(18) $(\overline{T}\times(\overline{S'}\wedge\overline{I}))\wedge I=O$

(証明) 性質11において T を T' とおく。　(証明終)

[性質14] 次の条件は同値である。

(1) $S \leqq T \vee I$

(2) $S \wedge \overline{I} \leqq T$

(3) $S \wedge \overline{T} \leqq I$

(4) $(S \wedge \overline{I}) \wedge (\overline{T} \vee I) = O$

(5) $(\overline{T} \wedge \overline{I}) \wedge (S \vee I) = O$

(6) $S' \wedge \overline{T'} \leqq I$

(7) $\overline{S} \vee T \vee I = E$

(8) $\overline{S'} \vee T' \vee I = E$

(9) $((S \wedge \overline{I}) \times (\overline{T'} \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(10) $((\overline{T'} \wedge \overline{I}) \times (S \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(11) $((S' \wedge \overline{I}) \times (\overline{T} \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(12) $((\overline{T} \wedge \overline{I}) \times (S' \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(13) $(S \times (\overline{T'} \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(14) $((\overline{T'} \wedge \overline{I}) \times S) \wedge I = O$

(15) $(S' \times (\overline{T} \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(16) $((\overline{T} \wedge \overline{I}) \times S') \wedge I = O$

(17) $((S \wedge \overline{I}) \times \overline{T'}) \wedge I = O$

(18) $(\overline{T'} \times (S \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(19) $((S' \wedge \overline{I}) \times \overline{T}) \wedge I = O$

(20) $(\overline{T} \times (S' \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(証明) (1)⇔(2) ⇔(3) 明らかである。

(3)⇔(4) ⇔…⇔(20) 性質12において T を $\overline{T}$ とおけばよい。　(証明終)

[性質15] 次の条件は同値である。

(1) $S \wedge S' \leqq I$

(2) $(S \wedge \overline{I}) \wedge (S' \vee I) = O$

(3) $(S' \wedge \overline{I}) \wedge (S \vee I) = O$

(4) $\overline{S} \vee \overline{S'} \vee I = E$

(5) $(S \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$

(6) $(S' \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$

(7) $(S \times (S \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(8) $((S \wedge \overline{I}) \times S) \wedge I = O$

(9) $(S' \times (S' \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(10) $((S' \wedge \overline{I}) \times S') \wedge I = O$

(証明) 性質10において $T = S$ とおく。　(証明終)

上の性質15における反対称性の条件に関しては上記以外にも多数の同値条件が知られている [5, 6, 8, 10, 11, 13, 17, 18]。

[性質16] 次の条件は同値である。

(1) $S \vee S' \vee I = E$

(2) $(S \wedge \overline{I}) \vee (S' \vee I) = E$

(3) $(S' \wedge \overline{I}) \vee (S \vee I) = E$

(4) $\overline{S} \wedge \overline{S'} \leqq I$

(6) $(\overline{S'} \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$

(7) $(\overline{S} \times (\overline{S} \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(8) $((\overline{S} \wedge \overline{I}) \times \overline{S}) \wedge I = O$

(9) $(\overline{S'} \times (\overline{S'} \wedge \overline{I})) \wedge I = O$

(5) $(\overline{S}\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$　　　(10) $((\overline{S'}\wedge\overline{I})\times\overline{S'})\wedge I=O$

(証明) 性質11において $T=S$ とおく。(証明終)

上の性質16の連結性の条件に関してはこれら以外にも同値な条件が知られている [8, 10, 15]。なお，性質23においても連結性の同値条件を与える。

[性質17] [19]　$S\wedge T=O,\ S\vee T=E\Leftrightarrow S=\overline{T}\Leftrightarrow T=\overline{S}$

[性質18] (1) $S\wedge T'=O,\ S\vee T'=E\Leftrightarrow S=\overline{T'}\Leftrightarrow S'=\overline{T}\Leftrightarrow T=\overline{S'}\Leftrightarrow T'=\overline{S}$

(2) $S\wedge\overline{T}=O,\ S\vee\overline{T}=E\Leftrightarrow S=T$

(証明) 性質17による。(証明終)

上記の性質18(2)に関しては

$$S\wedge\overline{T}=O\Leftrightarrow S\leqq T;\quad S\vee\overline{T}=E\Leftrightarrow\overline{S}\wedge T=O\Leftrightarrow T\leqq S$$

となり，$S\leqq T$ かつ $T\leqq S$ であれば $S=T$ となる。

[性質19] 次の条件は同値である。

(1) $S\wedge T\wedge\overline{R}=O,\ S\vee T\vee R=E$

(2) $S\wedge\overline{R}=\overline{T}\wedge\overline{R}$

(3) $\overline{S}\wedge\overline{R}=T\wedge\overline{R}$

(証明) (1)⇔(2) 性質8によって，$S\wedge T\wedge\overline{R}=O\Leftrightarrow(S\wedge\overline{R})\wedge(T\vee R)=O;\ S\vee T\vee R=E\Leftrightarrow(S\wedge\overline{R})\vee(T\vee R)=E$

性質17によって，$(S\wedge\overline{R})\wedge(T\vee R)=O,\ (S\wedge\overline{R})\vee(T\vee R)=E$

$$\Leftrightarrow S\wedge\overline{R}=\overline{T\vee R}=\overline{T}\wedge\overline{R}$$

(1)⇔(3) 性質8によって，$S\wedge T\wedge\overline{R}=O\Leftrightarrow(T\wedge\overline{R})\wedge(S\vee R)=O,$

$S\vee T\vee R=E\Leftrightarrow(T\wedge\overline{R})\vee(S\vee R)=E$

性質17によって

$$(T\wedge\overline{R})\wedge(S\vee R)=O,\ (T\wedge\overline{R})\vee(S\vee R)=E$$

$$\Leftrightarrow T\wedge\overline{R}=\overline{S\vee R}=\overline{S}\wedge\overline{R}$$

(証明終)

上の性質19 (2)，(3)において R を $\overline{R}$ を T を $\overline{T}$ とおけば，一般に

$$S\wedge R=T\wedge R\Leftrightarrow\overline{S}\wedge R=\overline{T}\wedge R$$

が成立する。

[性質20] (1) $S\wedge T\leqq R,\ S\vee T\vee R=E\Leftrightarrow S\wedge\overline{R}=\overline{T}\wedge\overline{R}$

$\Leftrightarrow \overline{S} \wedge \overline{R} = T \wedge \overline{R}$

(2) $S \wedge T \leqq I,\ S \vee T \vee I = E \Leftrightarrow S \wedge \overline{I} = \overline{T} \wedge \overline{I} \Leftrightarrow \overline{S} \wedge \overline{I} = T \wedge \overline{I}$

(3) $S \wedge T' \leqq I,\ S \vee T' \vee I = E \Leftrightarrow S \wedge \overline{I} = \overline{T'} \wedge \overline{I} \Leftrightarrow \overline{S} \wedge \overline{I} = T' \wedge \overline{I}$

(4) $S \wedge \overline{T} \leqq I,\ S \vee \overline{T} \vee I = E \Leftrightarrow S \wedge \overline{I} = T \wedge \overline{I} \Leftrightarrow \overline{S} \wedge \overline{I} = \overline{T} \wedge \overline{I}$

(5) $S \wedge S' \leqq I,\ S \vee S' \vee I = E \Leftrightarrow S \wedge \overline{I} = \overline{S'} \wedge \overline{I} \Leftrightarrow \overline{S} \wedge \overline{I} = S' \wedge \overline{I}$

(証明) (1) $S \wedge T \leqq R \Leftrightarrow S \wedge T \wedge \overline{R} = O$であるから性質19による。

(2) (1)において$R = I$とおく。

(3) (2)のTをT'とおく。

(4) (2)のTを$\overline{T}$とおく。

(5) (3)において$T=S$とおく。　(証明終)

[性質21] $R \wedge \overline{R'} \wedge S = O,\ R \vee R' \vee S = E \Leftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{R'} = \overline{R'} \wedge S$

(証明)　性質19(1)⇔(2)においてTをR，RをR'とおけば

$S \wedge R \wedge \overline{R'} = O,\ S \vee R \vee R' = E \Leftrightarrow S \wedge \overline{R'} = \overline{R} \wedge \overline{R'}$　(証明終)

[性質22] [21] $R \wedge \overline{R'} \wedge S = O,\ R \vee R' \vee S = E \Leftrightarrow R \wedge \overline{R'} = \overline{R'} \wedge \overline{S}$

(証明) 性質19(1)⇔(3)においてTをR，RをR'とおけば

$S \wedge R \wedge \overline{R'} = O,\ S \vee R \vee R' = E \Leftrightarrow \overline{S} \wedge \overline{R'} = R \wedge \overline{R'}$　(証明終)

[性質23] $R \vee R' \vee I = E \Leftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{R'} = \overline{R'} \wedge I \Leftrightarrow R \wedge \overline{R'} = \overline{R'} \wedge \overline{I}$

$\Leftrightarrow \overline{R'} \wedge \overline{R} = \overline{R} \wedge I \Leftrightarrow R' \wedge \overline{R} = \overline{R} \wedge \overline{I}$

(証明) 性質21および性質22において$S = I$とおけば

$R \wedge \overline{R'} \wedge I = O,\ R \vee R' \vee I = E \Leftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{R'} = \overline{R'} \wedge I$

$\Leftrightarrow R \wedge \overline{R'} = \overline{R'} \wedge \overline{I}$

一般に$R \wedge \overline{R'} \wedge I = O$であるから

$R \vee R' \vee I = E \Leftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{R'} = \overline{R'} \wedge I \Leftrightarrow R \wedge \overline{R'} = \overline{R'} \wedge \overline{I}$

$\Leftrightarrow \overline{R'} \wedge \overline{R} = \overline{R} \wedge I \Leftrightarrow R' \wedge \overline{R} = \overline{R} \wedge \overline{I}$　(証明終)

上の性質23における$R \vee R' \vee I = E \Leftrightarrow R' \wedge \overline{R} = \overline{R} \wedge \overline{I}$は次の形でも知られている [15]。

$R \vee R' \vee I = E \Leftrightarrow R \vee \overline{R'} = R \vee I$

なお，$R \vee R' \vee I = E$の同値条件についてはすでに性質16においても示し

ている。

[性質24] $I \leqq S$のとき，(1) $R \times S \leqq R \Leftrightarrow R \times S = R$

(2) $S \times R \leqq R \Leftrightarrow S \times R = R$

(証明) 明らかである。　(証明終)

[性質25] (1) $R \times S \leqq R \Leftrightarrow R \times S^* \leqq R \Leftrightarrow R \times S^* = R \Leftrightarrow R \times S^+ \leqq R$

(2) $S \times R \leqq R \Leftrightarrow S^* \times R \leqq R \Leftrightarrow S^* \times R = R \Leftrightarrow S^+ \times R \leqq R$

(証明) (1) $R \times S \leqq R \Rightarrow R \times S^* \leqq R \Rightarrow R \times S^* = R \Rightarrow R \times S^+ \leqq R \Rightarrow R \times S \leqq R$の順に示す。$R \times S \leqq R$のとき，$R \times S^2 \leqq R \times S \leqq R$，$R \times S^3 \leqq R \times S \leqq R$，…。したがって$R \times (I \vee S \vee S^2 \vee S^3 \cdots) \leqq R$すなわち$R \times S^* \leqq R$。ところで$I \leqq S^*$であるので性質24(1)によって$R \times S^* = R$。また，このとき$R \times S \leqq R \times S^+ \leqq R \times S^* = R$。

(2) (1)と同様である。　(証明終)

[性質26] (1) $R \times R^* = R^* \times R = R^+$

(2) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow R^+ \leqq R \Leftrightarrow R^+ = R$

(3) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (\overline{R})^+ \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (\overline{R})^+ = \overline{R}$

(証明) R^*，R^+の定義から明らかである。　(証明終)

[性質27] [2, 23, 25, 26]　$S \times T \leqq R \Leftrightarrow S \leqq R \diamond \overline{T'} \Leftrightarrow T \leqq \overline{S'} \diamond R$

$\Leftrightarrow \overline{R'} \times S \leqq \overline{T'} \Leftrightarrow T \times \overline{R'} \leqq \overline{S'} \Leftrightarrow S' \times \overline{R} \leqq \overline{T} \Leftrightarrow \overline{R} \times T' \leqq \overline{S}$

[性質28]

(1) $\overline{R} \times S \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times S' \leqq R$　(3) $S \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow S' \times R \leqq R$

(2) $R \times S \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times S' \leqq \overline{R}$　(4) $S \times R \leqq R \Leftrightarrow S' \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(証明)(1) 性質27を用いて，$\overline{R} \times S \leqq \overline{R} \Leftrightarrow S \leqq R' \diamond \overline{R} \Leftrightarrow S \times R' \leqq R'$

$\Leftrightarrow R \times S' \leqq R$

(2) (1) においてRを$\overline{R}$とおく。

(3) (1) と同様である。

(4) (3) による。　(証明終)

3．2　主要な結果

まず negatively transitive 関係の性質を一般化したある一つの性質を示す。次にその一般化された性質の特別な場合として，いくつかの性質と従来よく知られている negatively transitive 関係の基本的な性質を導く。また推移関係と negatively transitive 関係が互いに同値となる場合の条件などについて考察をおこなう。

[性質29] $S \wedge T' \leqq I$のとき

(1) $\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Rightarrow R \times T \leqq R$　　(3) $\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Rightarrow T \times R \leqq R$

(2) $\overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R} \Rightarrow R \times S \leqq R$　　(4) $\overline{T} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Rightarrow S \times R \leqq R$

(証明) (1) $r_{ik} = t_{kj} = 1$とおく。このとき$r_{ij} = 1$となることを示す。

(a) $k = j$のとき：$r_{ij} = t_{jj} = 1$

(b) $k \neq j$のとき：$t_{kj} = 1$から$s_{jk} = 0$。このとき，もし$r_{ij} = 0$ならば$\overline{r_{ij}} \wedge \overline{s_{jk}} = 1$から$\overline{r_{ik}} = 1$となり矛盾するので$r_{ij} = 1$。

(2) 性質10によって $S \wedge T' \leqq I \Leftrightarrow T \wedge S' \leqq I$となるから上記の(1)による。

(3) (1)と同様である。

(4) 性質10によって $S \wedge T' \leqq I \Leftrightarrow T \wedge S' \leqq I$であるから上記の (3) による。　(証明終)

上記の性質29における $S \wedge T' \leqq I$をすでに性質10で示している条件で置き換えることができる。

[性質30] $S \vee T' \vee I = E$のとき

(1) $R \times S \leqq R \Rightarrow \overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R}$　　(3) $S \times R \leqq R \Rightarrow \overline{T} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $R \times T \leqq R \Rightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R}$　　(4) $T \times R \leqq R \Rightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(証明) $S \vee T' \vee I = E \Leftrightarrow \overline{S} \wedge (\overline{T})' \leqq I$であるから性質29において$R$, S, Tをそれぞれ$\overline{R}$，$\overline{S}$，$\overline{T}$とおく。　(証明終)

[性質31] $S \wedge T' \leqq I$, $S \vee T' \vee I = E$のとき

(1) $\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times T \leqq R$　　(3) $\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow T \times R \leqq R$

(2) $\overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times S \leqq R$　　(4) $\overline{T} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) (1) 性質29 (1) によって，$\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Rightarrow R \times T \leqq R$。性質30 (2)

によって$R \times T \leqq R \Rightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R}$。

(2)－(4)　(1)と同様である。　(証明終)

[性質32]　$S \wedge \overline{I} = \overline{T'} \wedge \overline{I}$のとき

(1)　$\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times T \leqq R$　　(3)　$\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow T \times R \leqq R$

(2)　$\overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times S \leqq R$　　(4)　$\overline{T} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明)　性質20（3）によって，$S \wedge T' \leqq I$，$S \vee T' \vee I = E \Leftrightarrow S \wedge \overline{I} = \overline{T'} \wedge \overline{I}$であるから性質31による。　(証明終)

[性質33]　$S \wedge T' \leqq I$のとき，(1)　$\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times ((\overline{S})^* \vee (T')^*) \leqq \overline{R}$

(2)　$\overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times ((S')^* \vee (\overline{T})^*) \leqq \overline{R}$

(3)　$\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow ((\overline{S})^* \vee (T')^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(4)　$\overline{T} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow ((S')^* \vee (\overline{T})^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(証明)　(1)　$\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R}$から性質25（1）によって$\overline{R} \times (\overline{S})^* \leqq \overline{R}$。また性質29（1）から$R \times T \leqq R$なので$R \times T^* \leqq R$。これから

$$T^* \leqq \overline{R'} \diamond R \Rightarrow T^* \times \overline{R'} \leqq \overline{R'} \Rightarrow \overline{R} \times (T')^* \leqq \overline{R}$$

よって，$\overline{R} \times ((\overline{S})^* \vee (T')^*) \leqq \overline{R}$となり，$\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \times ((\overline{S})^* \vee (T')^*) \leqq \overline{R}$となる。

(2)　性質10によって，　$S \wedge T' \leqq I \Leftrightarrow T \wedge S' \leqq I$であるから上の（1）による。

(3)　(1)と同様である。

(4)　性質10によって，$S \wedge T' \leqq I \Leftrightarrow T \wedge S' \leqq I$であるから上の（3）による。

(証明終)

上記の 性質33における各条件は次の性質34および性質35の対応する同値な条件で置き換えることができる。以下この種の置き換えについてはとくに言及しない。

[性質34]　(1)　$\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times (\overline{S})^* \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times (\overline{S})^+ \leqq \overline{R}$

$\Leftrightarrow R \times \overline{S'} \leqq R \Leftrightarrow R \times (\overline{S'})^* \leqq R \Leftrightarrow R \times (\overline{S'})^+ \leqq R$

(2)　$\overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times (\overline{T})^* \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times (\overline{T})^+ \leqq \overline{R}$

$\Leftrightarrow R \times \overline{T'} \leqq R \Leftrightarrow R \times (\overline{T'})^* \leqq R \Leftrightarrow R \times (\overline{T'})^+ \leqq R$

(3)　$\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (\overline{S})^* \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (\overline{S})^+ \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

$\Leftrightarrow \overline{S'}\times R\leqq R \Leftrightarrow (\overline{S'})^{*}\times R\leqq R \Leftrightarrow (\overline{S'})^{+}\times R\leqq R$

(4) $\overline{T}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow (\overline{T})^{*}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow (\overline{T})^{+}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

$\Leftrightarrow \overline{T'}\times R\leqq R \Leftrightarrow (\overline{T'})^{*}\times R\leqq R \Leftrightarrow (\overline{T'})^{+}\times R\leqq R$

(証明) 性質25および性質28による。　(証明終)

上の性質34 (1) に関して，性質25によれば，

$\overline{R}\times(\overline{S})^{*}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow \overline{R}\times(\overline{S})^{*}=\overline{R};\ R\times(\overline{S'})^{*}\leqq R \Leftrightarrow R\times(\overline{S'})^{*}=R$

他の場合についても同様である。

[性質35] (1) $\overline{R}\times((\overline{S})^{*}\vee(T')^{*})\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times((\overline{S'})^{*}\vee T^{*})\leqq R$

(2) $\overline{R}\times((S')^{*}\vee(\overline{T})^{*})\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times(S^{*}\vee(\overline{T'})^{*})\leqq R$

(3) $((\overline{S})^{*}\vee(T')^{*})\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow ((\overline{S'})^{*}\vee T^{*})\times R\leqq R$

(4) $((S')^{*}\vee(\overline{T})^{*})\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow (S^{*}\vee(\overline{T'})^{*})\times R\leqq R$

(証明) 性質28による。　(証明終)

上の性質35 (1) に関しては$I\leqq(\overline{S})^{*}\vee(T')^{*}$であるので，性質24 (1) によって $\overline{R}\times((\overline{S})^{*}\vee(T')^{*})\leqq\overline{R} \Leftrightarrow \overline{R}\times((\overline{S})^{*}\vee(T')^{*})=\overline{R}$となる。他の場合についても同様である。また，$\overline{R}\times((\overline{S})^{*}\vee(T')^{*})\leqq\overline{R}$に関しては，一般に

$$
\begin{aligned}
&\overline{R}\times((\overline{S})^{*}\vee(T')^{*})\leqq\overline{R}\\
\Leftrightarrow\ &\overline{R}\times((\overline{S})^{*}\vee(T')^{+})\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times((\overline{S'})^{*}\vee T^{+})\leqq R\\
\Leftrightarrow\ &\overline{R}\times((\overline{S})^{+}\vee(T')^{*})\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times((\overline{S'})^{+}\vee T^{*})\leqq R\\
\Leftrightarrow\ &\overline{R}\times((\overline{S})^{+}\vee(T')^{+})\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times((\overline{S'})^{+}\vee T^{+})\leqq R
\end{aligned}
$$

となる。さらに，反射的推移閉包の演算*を含むものについては，$\overline{R}\times((\overline{S})^{*}\vee(T')^{*})\leqq\overline{R}$の場合で示しているように，等号が成立する。

[性質36] $S\vee T'\vee I=E$のとき

(1) $R\times S\leqq R \Leftrightarrow R\times(S^{*}\vee(\overline{T'})^{*})\leqq R$

(2) $R\times T\leqq R \Leftrightarrow R\times((\overline{S'})^{*}\vee T^{*})\leqq R$

(3) $S\times R\leqq R \Leftrightarrow (S^{*}\vee(\overline{T'})^{*})\times R\leqq R$

(4) $T\times R\leqq R \Leftrightarrow ((\overline{S'})^{*}\vee T^{*})\times R\leqq R$

(証明) 性質33においてR，S，Tをそれぞれ$\overline{R}$，$\overline{S}$，$\overline{T}$とおく。　(証明終)

[性質37] (1) $R\times S\leqq R \Leftrightarrow R\times S^{*}\leqq R \Leftrightarrow R\times S^{+}\leqq R$

$\Leftrightarrow \overline{R} \times S' \leqq \overline{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{R} \times (S')^{*} \leqq \overline{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{R} \times (S')^{+} \leqq \overline{R}$

(2) $R \times T \leqq R \Leftrightarrow R \times T^{*} \leqq R \Leftrightarrow R \times T^{+} \leqq R$

$\Leftrightarrow \overline{R} \times T' \leqq \overline{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{R} \times (T')^{*} \leqq \overline{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{R} \times (T')^{+} \leqq \overline{R}$

(3) $S \times R \leqq R \Leftrightarrow S^{*} \times R \leqq R \Leftrightarrow S^{+} \times R \leqq R$

$\Leftrightarrow S' \times \overline{R} \leqq \overline{R} \;\Leftrightarrow\; (S')^{*} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \;\Leftrightarrow\; (S')^{+} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(4) $T \times R \leqq R \Leftrightarrow T^{*} \times R \leqq R \Leftrightarrow T^{+} \times R \leqq R$

$\Leftrightarrow T' \times \overline{R} \leqq \overline{R} \;\Leftrightarrow\; (T')^{*} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \;\Leftrightarrow\; (T')^{+} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(証明) 性質34において R, S, T をそれぞれ $\overline{R}$, $\overline{S}$, $\overline{T}$ とおく。　(証明終)

この性質37の一部はすでに性質28で示されている。

[性質38] $S \wedge T' = O$ のとき

(1) $\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Rightarrow R \times T \leqq R$　(3) $\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Rightarrow T \times R \leqq R$

(2) $\overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R} \Rightarrow R \times S \leqq R$　(4) $\overline{T} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Rightarrow S \times R \leqq R$

(証明) 性質29による。　(証明終)

[性質39] $S \vee T' = E$ のとき

(1) $R \times S \leqq R \Rightarrow \overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R}$　(3) $S \times R \leqq R \Rightarrow \overline{T} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $R \times T \leqq R \Rightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R}$　(4) $T \times R \leqq R \Rightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(証明) 性質30による。　(証明終)

[性質40] $S \wedge T' = O$, $S \vee T' = E$ のとき

(1) $\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times T \leqq R$　(3) $\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow T \times R \leqq R$

(2) $\overline{R} \times \overline{T} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times S \leqq R$　(4) $\overline{T} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) 性質31による。　(証明終)

[性質41]

(1) $\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times \overline{S'} \leqq R$　(3) $\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{S'} \times R \leqq R$

(2) $\overline{R} \times S' \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times S \leqq R$　(4) $S' \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) 性質18 (1) によって, $S \wedge T' = O$, $S \vee T' = E \Leftrightarrow T = \overline{S'}$ であるから, 性質40において $T = \overline{S'}$ とおく。　(証明終)

上記のようにして得られた性質41は, すでに示している性質34および性質37に含まれている。また, この性質41は 性質27を用いても得られる。たと

えば，(1) は次のようにして得られる。

$$\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ \overline{S}\leqq R'\diamondsuit\overline{R}\ \Leftrightarrow\ \overline{S}\times R'\leqq R'\ \Leftrightarrow\ R\times\overline{S'}\leqq R$$

[性質42] $S\wedge T'=O$ のとき，(1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ \overline{R}\times((\overline{S})^*\vee(T')^*)\leqq\overline{R}$

(2) $\overline{R}\times\overline{T}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ \overline{R}\times((S')^*\vee(\overline{T})^*)\leqq\overline{R}$

(3) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ ((\overline{S})^*\vee(T')^*)\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(4) $\overline{T}\times\overline{R}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ ((S')^*\vee(\overline{T})^*)\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) 性質33による。　(証明終)

[性質43] $S\vee T'=E$ のとき，(1) $R\times S\leqq R\Leftrightarrow R\times(S^*\vee(\overline{T'})^*)\leqq R$

(2) $R\times T\leqq R\Leftrightarrow R\times((\overline{S'})^*\vee T^*)\leqq R$

(3) $S\times R\leqq R\Leftrightarrow (S^*\vee(\overline{T'})^*)\times R\leqq R$

(4) $T\times R\leqq R\Leftrightarrow ((\overline{S'})^*\vee T^*)\times R\leqq R$

(証明) 性質36による。　(証明終)

[性質44] $S\wedge T=O$ のとき

(1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}\ \Rightarrow\ R\times T'\leqq R$　(3) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}\ \Rightarrow\ T'\times R\leqq R$

(2) $\overline{R}\times\overline{T'}\leqq\overline{R}\ \Rightarrow\ R\times S\leqq R$　(4) $\overline{T'}\times\overline{R}\leqq\overline{R}\ \Rightarrow\ S\times R\leqq R$

(証明) 性質38において T を T' とおく。　(証明終)

[性質45] $S\vee T=E$ のとき

(1) $R\times S\leqq R\Rightarrow\overline{R}\times\overline{T'}\leqq\overline{R}$　(3) $S\times R\leqq R\Rightarrow\overline{T'}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(2) $R\times T'\leqq R\Rightarrow\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$　(4) $T'\times R\leqq R\Rightarrow\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) 性質39において T を T' とおく。　(証明終)

[性質46] $S\wedge T=O$, $S\vee T=E$ のとき

(1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ R\times T'\leqq R$　(3) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ T'\times R\leqq R$

(2) $\overline{R}\times\overline{T'}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ R\times S\leqq R$　(4) $\overline{T'}\times\overline{R}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ S\times R\leqq R$

(証明) 性質40において T を T' とおく。　(証明終)

なお，上の 性質46に関しては 性質17によって，$S\wedge T=O$, $S\vee T=E$ $\Leftrightarrow$ $T=\overline{S}$ となるから，$T=\overline{S}$ とおけば，性質41と同一の結果が得られる。

[性質47] $S\wedge T=O$ のとき，(1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ \overline{R}\times((\overline{S})^*\vee T^*)\leqq\overline{R}$

(2) $\overline{R}\times\overline{T'}\leqq\overline{R}\ \Leftrightarrow\ \overline{R}\times((S')^*\vee(\overline{T'})^*)\leqq\overline{R}$

(3) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow ((\overline{S})^{*}\vee T^{*})\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(4) $\overline{T'}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow ((S')^{*}\vee(\overline{T'})^{*})\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) 性質42において T を T' とおく。　(証明終)

[性質48] (1) $\overline{R}\times\overline{T'}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow \overline{R}\times(\overline{T'})^{*}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow \overline{R}\times(\overline{T'})^{+}\leqq\overline{R}$

$\Leftrightarrow R\times\overline{T}\leqq R \Leftrightarrow R\times(\overline{T})^{*}\leqq R \Leftrightarrow R\times(\overline{T})^{+}\leqq R$

(2) $\overline{T'}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow (\overline{T'})^{*}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow (\overline{T'})^{+}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

$\Leftrightarrow \overline{T}\times R\leqq R \Leftrightarrow (\overline{T})^{*}\times R\leqq R \Leftrightarrow (\overline{T})^{+}\times R\leqq R$

(証明) 性質34(2), (4)において T を T' とおく。　(証明終)

[性質49] (1) $\overline{R}\times((\overline{S})^{*}\vee T^{*})\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times((\overline{S'})^{*}\vee(T')^{*})\leqq R$

(2) $\overline{R}\times((S')^{*}\vee(\overline{T'})^{*})\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times(S^{*}\vee(\overline{T})^{*})\leqq R$

(3) $((\overline{S})^{*}\vee T^{*})\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow ((\overline{S'})^{*}\vee(T')^{*})\times R\leqq R$

(4) $((S')^{*}\vee(\overline{T'})^{*})\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow (S^{*}\vee(\overline{T})^{*})\times R\leqq R$

(証明) 性質35において T を T' とおく。　(証明終)

[性質50] $S\vee T=E$ のとき, (1) $R\times S\leqq R \Leftrightarrow R\times(S^{*}\vee(\overline{T})^{*})\leqq R$

(2) $R\times T'\leqq R \Leftrightarrow R\times((\overline{S'})^{*}\vee(T')^{*})\leqq R$

(3) $S\times R\leqq R \Leftrightarrow (S^{*}\vee(\overline{T})^{*})\times R\leqq R$

(4) $T'\times R\leqq R \Leftrightarrow ((\overline{S'})^{*}\vee(T')^{*})\times R\leqq R$

(証明) 性質43において T を T' とおく。　(証明終)

[性質51] (1) $R\times T'\leqq R \Leftrightarrow R\times(T')^{*}\leqq R \Leftrightarrow R\times(T')^{+}\leqq R$

$\Leftrightarrow \overline{R}\times T\leqq\overline{R} \Leftrightarrow \overline{R}\times T^{*}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow \overline{R}\times T^{+}\leqq\overline{R}$

(2) $T'\times R\leqq R \Leftrightarrow (T')^{*}\times R\leqq R \Leftrightarrow (T')^{+}\times R\leqq R$

$\Leftrightarrow T\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow T^{*}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow T^{+}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) 性質37(2), (4)において T を T' とおく。　(証明終)

[性質52] $S\wedge S'\leqq I$ のとき, (1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R} \Rightarrow R\times S\leqq R$

(2) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Rightarrow S\times R\leqq R$

(証明) 性質29において $T=S$ とおく。　(証明終)

[性質53] $S\vee S'\vee I=E$ のとき, (1) $R\times S\leqq R \Rightarrow \overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$

(2) $S\times R\leqq R \Rightarrow \overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) 性質30において $T=S$ とおく。 (証明終)

[性質54] $S\wedge S'\leqq I$, $S\vee S'\vee I=E$ のとき

(1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times S\leqq R$　(2) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow S\times R\leqq R$

(証明) 性質52および性質53による。 (証明終)

[性質55] $S\wedge\overline{I}=\overline{S'}\wedge\overline{I}$ のとき

(1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times S\leqq R$　(2) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow S\times R\leqq R$

(証明) 性質20(5)および性質54による。 (証明終)

[性質56] $S\wedge S'\leqq I$ のとき, (1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow \overline{R}\times((S')^*\vee(\overline{S})^*)\leqq\overline{R}$

(2) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow ((S')^*\vee(\overline{S})^*)\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) 性質33において $T=S$ とおく。 (証明終)

[性質57] (1) $\overline{R}\times((S')^*\vee(\overline{S})^*)\leqq\overline{R} \Leftrightarrow R\times(S^*\vee(\overline{S'})^*)\leqq R$

(2) $((S')^*\vee(\overline{S})^*)\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Leftrightarrow (S^*\vee(\overline{S'})^*)\times R\leqq R$

(証明) 性質35(2), (4)において $T=S$ とおく。 (証明終)

[性質58] $S\vee S'\vee I=E$ のとき, (1) $R\times S\leqq R \Leftrightarrow R\times(S^*\vee(\overline{S'})^*)\leqq R$

(2) $S\times R\leqq R \Leftrightarrow (S^*\vee(\overline{S'})^*)\times R\leqq R$

(証明) 性質36において $T=S$ とおく。 (証明終)

上の性質58における各条件はすでに示している性質37, 性質57の対応する同値条件で置き換えることができる。

[性質59] $R\wedge S'\leqq I$ のとき

(1) $\overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R} \Rightarrow R^2\leqq R$　(3) $\overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R} \Rightarrow R^2\leqq R$

(2) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R} \Rightarrow R\times S\leqq R$　(4) $(\overline{R})^2\leqq\overline{R} \Rightarrow S\times R\leqq R$

(証明) $R\wedge S'\leqq I \Leftrightarrow S\wedge R'\leqq I$ であるから性質29において $T=R$ とおく。

(証明終)

[性質60] $R\vee S'\vee I=E$ のとき

(1) $R\times S\leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$　(3) $S\times R\leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2\leqq\overline{R}$

(2) $R^2\leqq R \Rightarrow \overline{R}\times\overline{S}\leqq\overline{R}$　(4) $R^2\leqq R \Rightarrow \overline{S}\times\overline{R}\leqq\overline{R}$

(証明) $R\vee S'\vee I=E \Leftrightarrow S\vee R'\vee I=E$ であるから性質30において $T=R$ とおく。 (証明終)

[性質61] $R \wedge S' \leqq I$，$R \vee S' \vee I = E$ のとき

(1) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times S \leqq R \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) 性質59および性質60による。　(証明終)

[性質62] $R \wedge \overline{I} = \overline{S'} \wedge \overline{I}$ のとき，(1) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times S \leqq R \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) 性質20(3)によって，$R \wedge S' \leqq I$，$R \vee S' \vee I = E \Leftrightarrow R \wedge \overline{I} = \overline{S'} \wedge \overline{I}$ であるから，性質61による。　(証明終)

[性質63] $R \wedge S' \leqq I$ のとき，(1) $\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times ((R')^* \vee (\overline{S})^*) \leqq \overline{R}$

(2) $\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow ((R')^* \vee (\overline{S})^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(3) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times ((\overline{R})^* \vee (S')^*) \leqq \overline{R} \Leftrightarrow ((\overline{R})^* \vee (S')^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(証明) $R \wedge S' \leqq I \Leftrightarrow S \wedge R' \leqq I$ であるから性質33において $T = R$ とおく。

(証明終)

[性質64] (1) $\overline{R} \times ((R')^* \vee (\overline{S})^*) \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times (R^* \vee (\overline{S'})^*) \leqq R$

(2) $\overline{R} \times ((\overline{R})^* \vee (S')^*) \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times ((\overline{R'})^* \vee S^*) \leqq R$

(3) $((R')^* \vee (\overline{S})^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (R^* \vee (\overline{S'})^*) \times R \leqq R$

(4) $((\overline{R})^* \vee (S')^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow ((\overline{R'})^* \vee S^*) \times R \leqq R$

(証明) 性質35において $T = R$ とおく。　(証明終)

[性質65] $R \vee S' \vee I = E$ のとき

(1) $R \times S \leqq R \Leftrightarrow R \times ((\overline{R'})^* \vee S^*) \leqq R$

(2) $S \times R \leqq R \Leftrightarrow ((\overline{R'})^* \vee S^*) \times R \leqq R$

(3) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow R \times (R^* \vee (\overline{S'})^*) \leqq R \Leftrightarrow (R^* \vee (\overline{S'})^*) \times R \leqq R$

(証明) $R \vee S' \vee I = E \Leftrightarrow S \vee R' \vee I = E$ であるから性質36において $T = R$ とおく。　(証明終)

[性質66] $R \wedge S' = O$，$R \vee S' = E$ のとき

(1) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times S \leqq R \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) 性質61による。　(証明終)

上記の性質66の前提条件に関しては性質18 (1) により，$R \wedge S' = O$, $R \vee S' = E \Leftrightarrow R = \overline{S'} \Leftrightarrow S = \overline{R'}$となる。

[性質67] (1) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times R' \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R' \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

$\Leftrightarrow \overline{R} \times (R')^+ \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (R')^+ \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

$\Leftrightarrow \overline{R} \times (R')^* \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (R')^* \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

$\Leftrightarrow \overline{R} \times (R')^* = \overline{R} \Leftrightarrow (R')^* \times \overline{R} = \overline{R}$

(2) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times \overline{R'} \leqq R \Leftrightarrow \overline{R'} \times R \leqq R$

$\Leftrightarrow R \times (\overline{R'})^+ \leqq R \Leftrightarrow (\overline{R'})^+ \times R \leqq R$

$\Leftrightarrow R \times (\overline{R'})^* \leqq R \Leftrightarrow (\overline{R'})^* \times R \leqq R$

$\Leftrightarrow R \times (\overline{R'})^* = R \Leftrightarrow (\overline{R'})^* \times R = R$

(証明) (1) 性質66において$S = \overline{R'}$とおけば$R^2 \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times R' \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R' \times \overline{R} \leqq \overline{R}$。性質25によって，

$$\overline{R} \times R' \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times (R')^+ \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times (R')^* \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times (R')^* = \overline{R},$$

$$R' \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (R')^+ \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (R')^* \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (R')^* \times \overline{R} = \overline{R}$$

(2) (1)においてRを$\overline{R}$とおけばよい。　(証明終)

上の性質67における $R^2 \leqq R$の同値条件は上記以外にも多数知られている[13, 16, 18, 22]。この$R^2 \leqq R$に関する同値条件においてRを$\overline{R}$で置き換えれば$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$に関する同値条件が得られる。性質67(1)の$R^2 \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times R' \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R' \times \overline{R} \leqq \overline{R}$については，性質41の場合と同様，性質27を用いても容易に得られる。

[性質68] $\overline{R} \wedge S \leqq I$のとき

(1) $\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$　(3) $\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2) $R^2 \leqq R \Rightarrow R \times S \leqq R$　(4) $R^2 \leqq R \Rightarrow S \times R \leqq R$

(証明) $\overline{R} \wedge S \leqq I \Leftrightarrow S \wedge (\overline{R'})' \leqq I$であるから性質29において$T$を$\overline{R'}$とおき，性質67を用いる。　(証明終)

[性質69] $\overline{R} \vee S \vee I = E$のとき

(1) $R \times S \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$　(3) $S \times R \leqq R \Rightarrow R^2 \leqq R$

(2) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Rightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R}$　(4) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Rightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(証明) $\overline{R} \vee S \vee I = E \Leftrightarrow R \wedge \overline{S} \leqq I$であるから性質68において$R$を$\overline{R}$, Sを$\overline{S}$とおく。　(証明終)

[性質70] $\overline{R} \wedge S \leqq I$, $\overline{R} \vee S \vee I = E$のとき

(1) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow R \times S \leqq R \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) (1) 性質68(1), 性質69(2)によって$\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Rightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R}$。性質68(3), 性質69(4)によって$\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Rightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$。

(2) 性質68, 性質69を用いて(1)と同様にできる。　(証明終)

[性質71] $S \wedge \overline{I} = R \wedge \overline{I}$のとき, (1) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow R \times S \leqq R \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) (1) 性質20(4)および性質70による。　(証明終)

[性質72] $\overline{R} \wedge S \leqq I$のとき, (1) $\overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times ((\overline{R})^* \vee (\overline{S})^*) \leqq \overline{R}$

(2) $\overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow ((\overline{R})^* \vee (\overline{S})^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(3) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow \overline{R} \times ((R')^* \vee (S')^*) \leqq \overline{R} \Leftrightarrow ((R')^* \vee (S')^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(証明) 性質33において$T = \overline{R'}$とおき, 性質67を用いる。　(証明終)

[性質73] (1) $\overline{R} \times ((\overline{R})^* \vee (\overline{S})^*) \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times ((\overline{R'})^* \vee (\overline{S'})^*) \leqq R$

(2) $\overline{R} \times ((R')^* \vee (S')^*) \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times (R^* \vee S^*) \leqq R$

(3) $((\overline{R})^* \vee (\overline{S})^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow ((\overline{R'})^* \vee (\overline{S'})^*) \times R \leqq R$

(4) $((R')^* \vee (S')^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (R^* \vee S^*) \times R \leqq R$

(証明) 性質35において$T = \overline{R'}$とおく。　(証明終)

[性質74] $\overline{R} \vee S \vee I = E$のとき, (1) $R \times S \leqq R \Leftrightarrow R \times (R^* \vee S^*) \leqq R$

(2) $S \times R \leqq R \Leftrightarrow (R^* \vee S^*) \times R \leqq R$

(3) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times ((\overline{R'})^* \vee (\overline{S'})^*) \leqq R \Leftrightarrow ((\overline{R'})^* \vee (\overline{S'})^*) \times R \leqq R$

(証明) 性質36において$T = \overline{R'}$とおき, 性質67を用いる。　(証明終)

[性質75] $\overline{R} \wedge S = O$, $\overline{R} \vee S = E$のとき

(1) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{R} \times \overline{S} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow \overline{S} \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $R^2 \leqq R \Leftrightarrow R \times S \leqq R \Leftrightarrow S \times R \leqq R$

(証明) 性質70による。 (証明終)

上の性質75は 性質66において R を $\overline{R}$, S を S' とおくことによっても得られる。なお，この性質75に関しては，性質18(2)によって，$\overline{R} \wedge S = O$, $\overline{R} \vee S = E \Leftrightarrow S = R$ となる。

[性質76] $R \wedge R' \leqq I$ のとき，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Rightarrow R^2 \leqq R$

(証明) 性質59において $S = R$ とおく。 (証明終)

[性質77] [4, 28] $R \vee R' \vee I = E$ のとき，$R^2 \leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質53において $S = R$ とおく。 (証明終)

この性質77は性質60からも得られる。

[性質78] [4] $R \wedge R' \leqq I$, $R \vee R' \vee I = E$ のとき，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R^2 \leqq R$

(証明) 性質76および性質77による。 (証明終)

上記の性質78は性質54からも得られる。なお，$R \wedge R' \leqq I$ かつ $R \vee R' \vee I = E$ のとき $R^2 \leqq R$ と同値となる条件は多数知られている [8, 10, 12, 15]。

[性質79] (1) $R' \vee I = \overline{R} \vee I$ のとき，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R^2 \leqq R$

(2) $R \vee I = \overline{R'} \vee I$ のとき，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R^2 \leqq R$

(証明) 性質20(5)により

$$R \wedge R' \leqq I,\ R \vee R' \vee I = E \Leftrightarrow R \wedge \overline{I} = \overline{R'} \wedge \overline{I} \Leftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{I} = R' \wedge \overline{I}$$
$$\Leftrightarrow \overline{R} \vee I = R' \vee I \Leftrightarrow R \vee I = \overline{R'} \vee I$$

であるから性質78による。 (証明終)

[性質80] $R \wedge R' \leqq I$ のとき次の条件は同値である。

(1) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(2) $\overline{R} \times ((R')^* \vee (\overline{R})^*) \leqq \overline{R}$

(3) $((R')^* \vee (\overline{R})^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(4) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$, $R^2 \leqq R$

(証明) (1) - (3) 性質63において $S = R$ とおく。

(1) ⇔(4) 性質76による。 (証明終)

上の性質80(2)から $\overline{R} \times (R')^* \leqq \overline{R}$ となるが，これは性質67によって $R^2 \leqq R$ と同値である。同様に(3)から $(R')^* \times \overline{R} \leqq \overline{R}$ となるが，これも性質67によって $R^2 \leqq R$ と同値である。

[性質81] (1) $\overline{R} \times ((R')^* \vee (\overline{R})^*) \leqq \overline{R} \Leftrightarrow R \times (R^* \vee (\overline{R'})^*) \leqq R$

(2)　$((R')^* \vee (\overline{R})^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (R^* \vee (\overline{R'})^*) \times R \leqq R$

(証明) 性質57において$S = R$とおく。　(証明終)

[性質82] $R \vee R' \vee I = E$のとき次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \leqq R$

(2)　$R \times (R^* \vee (\overline{R'})^*) \leqq R$

(3)　$(R^* \vee (\overline{R'})^*) \times R \leqq R$

(4)　$R^2 \leqq R$, $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) (1) - (3)　性質65において$S = R$とおく。

(1) $\Leftrightarrow$ (4)　性質77による。　(証明終)

上の性質82(2)から$R \times (\overline{R'})^* \leqq R$となるが，これは性質67によって$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$と同値である。同様に(3)から$(\overline{R'})^* \times R \leqq R$となるが，これも性質67によって$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$と同値である。

[性質83] [1, 3, 4] $R \wedge R' = O$のとき，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Rightarrow R^2 \leqq R$

(証明) 性質76による。　(証明終)

なお，上の性質83に関して，$R \wedge R' = O$のとき，一般には，$R^2 \leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$とはいえない。

[性質84] [1, 3, 4] $R \vee R' = E$のとき，$R^2 \leqq R \Rightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質77による。　(証明終)

[性質85] [4] $R \wedge R' = O$, $R \vee R' \vee I = E$のとき，$R^2 \leqq R \Leftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質78による。　(証明終)

$R \wedge R' = O$かつ$R \vee R' \vee I = E$のもとで$R^2 \leqq R$と同値となる条件が上記以外にもいくつか知られている[4, 7, 12]。

[性質86] [4, 5] $R \wedge R' \leqq I$, $R \vee R' = E$のとき，$R^2 \leqq R \Leftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質78による。　(証明終)

この性質86の前提条件に関しては，一般に

$$R \wedge R' \leqq I,\ R \vee R' = E \Leftrightarrow R = \overline{R'} \vee I \Leftrightarrow R \wedge \overline{I} = \overline{R'}$$

となる[14, 16]。また$R \wedge R' \leqq I$, $R \vee R' = E$のとき$R^2 \leqq R$または$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$と同値となる条件がいくつか知られている[5, 12]。

上の性質86において$R \wedge R' \leqq I$を$R \wedge R' = O$とすれば

「$R \wedge R' = O$, $R \vee R' = E$のとき，$R^2 \leqq R \Leftrightarrow (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$」

となるが，$R \wedge R' = O$ から $R \wedge I = O$ となり，$R \vee R' = E$ から $R \wedge I = I$ となるので，$R \wedge R' = O$ と $R \vee R' = E$ は互いに矛盾する。

[性質87] $R \wedge R' = O$ のとき次の条件は同値である。

(1) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$　(3) $((R')^* \vee (\overline{R})^*) \times \overline{R} \leqq \overline{R}$

(2) $\overline{R} \times ((R')^* \vee (\overline{R})^*) \leqq \overline{R}$　(4) $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$, $R^2 \leqq R$

(証明) 性質80による。　(証明終)

上の性質87(1) に関しては，$R \wedge R' = O$ のとき $I \leqq \overline{R}$ であるから，$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R} \Leftrightarrow (\overline{R})^2 = \overline{R}$ となる。また，$R \wedge R' = O \Leftrightarrow R' \leqq \overline{R}$ であるから，$(R')^* \vee (\overline{R})^* = (\overline{R})^*$ となる。

[性質88] $R \vee R' = E$ のとき次の条件は同値である。

(1) $R^2 \leqq R$　(3) $(R^* \vee (\overline{R'})^*) \times R \leqq R$

(2) $R \times (R^* \vee (\overline{R'})^*) \leqq R$　(4) $R^2 \leqq R$, $(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$

(証明) 性質82による。　(証明終)

上の性質88(1)に関しては，$R \vee R' = E$ のとき $I \leqq R$ であるから，$R^2 \leqq R \Leftrightarrow R^2 = R$ となる。また，$R \vee R' = E \Leftrightarrow \overline{R} \wedge \overline{R'} = O \Leftrightarrow \overline{R'} \leqq R$ であるから $R^* \vee (\overline{R'})^* = R^*$ となる。

4. まとめ

従来知られている negatively transitive 関係の基本的な性質を一般化し，これの特別な場合として様々な性質を導いた。また，それらの性質の前提条件となっている反対称性および連結性についても若干の考察をおこない，いくつかの同値条件などを示した。本論文で示した性質にはほとんど明らかなもの，またよく知られていると思われる性質も含まれているが，いくつかのものは negatively transitive 関係の性質およびそれの一般化の議論において有用であると思われる。

ここで得た一般化された基本的性質の特別な場合として，いわゆる triple acyclicity [27] などに関して興味ある性質が得られるが，これらについては次の機会に報告したい。また，ここで得られた結果には矩形行列に対しても

一般化できるものがあるが，この矩形行列の場合に一般化することも今後の課題としたい。

文　献

[1] Arrow, K. J.: "Social Choice and Individual Values," 2nd ed., Yale University Press, New Haven (1963).

[2] Chipman, J.S.: "The foundations of utility," Econometrica, Vol.28, 2, pp.193-224 (1960).

[3] Fishburn, P.C.: "The Theory of Social Choice," Princeton University Press, New Jersey (1973).

[4] 橋本　寛: "連結的推移関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第34巻, 第3・4号, pp.387-405 (昭和60年6月)。

[5] 橋本　寛: "連結的推移関係行列の性質Ⅱ", 山口経済学雑誌, 第35巻, 第3・4号, pp.281-293 (昭和61年1月)。

[6] 橋本　寛: "推移関係行列に関するいくつかの十分条件", 山口経済学雑誌, 第35巻, 第5・6号, pp.425-436 (昭和61年5月)。

[7] 橋本　寛: "Negatively Transitive 関係の性質", 山口経済学雑誌, 第36巻, 第1・2号, pp.41-58 (昭和61年9月)。

[8] 橋本　寛: "連結的関係に関する若干の性質", 山口経済学雑誌, 第36巻, 第5・6号, pp.245-261 (昭和62年5月)。

[9] 橋本　寛:"連結性のもとでの関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第37巻, 第1・2号, pp.75-88 (昭和62年9月)。

[10] 橋本　寛: "連結的関係行列の初等的性質", 山口経済学雑誌, 第38巻, 第3・4号, pp.557-576 (平成元年7月)。

[11] 橋本　寛: "変更された推移性と連結的関係行列", 山口経済学雑誌, 第39巻, 第3・4号, pp.397-416 (平成2年11月)。

[12] 橋本　寛: "Negative Transitivity に関するいくつかの十分条件について", 山口経済学雑誌, 第41巻, 第1・2号, pp.45-60 (平成5年1月)。

[13] 橋本　寛: “反対称的推移関係”, 山口経済学雑誌, 第41巻, 第5・6号, pp.473-489 (平成6年5月)。

[14] 橋本　寛: “連結的な反対称的推移関係”, 山口経済学雑誌, 第42巻, 第1・2号, pp.53-74 (平成6年9月)。

[15] 橋本　寛: “ほとんど推移的な関係行列の性質”, 山口経済学雑誌, 第43巻, 第3・4号, pp.273-288 (平成7年5月)。

[16] 橋本　寛: “反射的な連結的関係に関する若干の性質”, 山口経済学雑誌, 第44巻, 第5・6号, pp.495-515 (平成8年3月)。

[17] 橋本　寛: “関係行列の初歩的な同値条件と非反射的推移性”, 山口経済学雑誌, 第47巻, 第1号, pp.29-47 (平成11年3月)。

[18] 橋本　寛: “非反射的推移関係に関する同値条件”, 山口経済学雑誌, 第48巻, 第2号, pp.257-285 (平成12年3月)。

[19] 橋本　寛: “Semiorder に関する Luce の最初の定義と Scott and Suppes の定義”, 山口経済学雑誌, 第48巻, 第5号, pp.969-1001 (平成12年9月)。

[20] 橋本　寛: “一般化された推移性のもとでの非対称関係”, 山口経済学雑誌, 第50巻, 第3号, pp.283-293 (平成14年5月)。

[21] Hashimoto, H.: “Some generalized properties of preference relations”, 山口経済学雑誌, 第50巻, 第4号, pp.477-482 (平成14年7月)。

[22] 橋本　寛: “非対称性のもとで推移性と同値な関係条件の階層性”, 山口経済学雑誌, 第52巻, 第1号, pp.1-20 (平成15年11月)。

[23] 柏木芳美: “関係代数的証明”, 山口経済学雑誌, 第46巻, 第3号, pp.259-269 (平成10年5月)。

[24] Roberts, F.S.: “Measurement Theory, with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences,” Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1979).

[25] Schmidt, G. and Ströhlein, T.: “Relations and Graphs,” Springer-Verlag, Berlin (1993).

[26] Schröder, E.: “Algebra der Logik. Vol.Ⅲ,” Teubner, Leipzig (1895) (Chelsea Publ. Co., New York, 1966).

[27] Suzumura, K.: "Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare," Cambridge University Press, Cambridge (1983).

[28] Tarski, A.: "Introduction to Logic," Oxford University Press, New York (1965).