体化された技術進歩を伴なう 最適資本蓄積の理論*

吉　村　　　弘

1　はじめに

現実の経済が，どのように発展してきて，将来どのように発展するであろうか，さらにその発展の要因は何か等を分析することは，経済学の重要な役割である。けれどもまた，ある与えられた目的を最もよく満たすという意味での最適な経済成長径路はいかなる性質のものであり，それを達成するためには経済変数をいかに制御すべきであるかという問題も，重要な経済問題であると言えよう。

後者に属する経済分析としては，ラムゼイ〔9〕流の「最適貯蓄の理論」①，フェルプス〔5〕- ロビンソン〔10〕流の「資本蓄積の黄金律」及びノイマン〔4〕 -DOSSO〔3〕流の「ターンパイクの理論」という三つの大きな流れがあるが，これらは「消費のターンパイク理論」として一つの流れに統合されつつあるように思われる。

これらの流れにそうものとして，端点極大の場合も扱うことのできるポントリャーギン〔6〕の最大値原理を応用して，黄金律径路のターンパイク性を明らかにしようとする分析がある。まずキャス〔2〕は，技術進歩のない新古典派的生産函数をもつ一部門経済を想定して，無期限計画期間にわたる一人当り消費の評価(効用)の現在価値を最大にする問題を分析し，次の帰結を導出し

* 本稿の作成にあたり，神戸市外国語大学上河泰男助教授から数えきれないほどの御教示をいただいた。ここに記して謝意を申し上げたい。勿論，誤りがあればすべて筆者のものである。

た。（ i ）任意の初期資本一労働比率から出発する最適資本蓄積径路が unique に存在し，（ii）その径路は「修正された資本蓄積の黄金律」径路に漸近的に近づく。また（iii），最適資本蓄積径路に対応する最適投資財価格の径路を unique に選ぶことができる。さらに（iv）最適径路上では，資本一労働比率及び一人当り消費量は，初期の資本一労働比率が「修正された黄金律」径路に対応するそれより小さい（大きい）場合には，単調に増加（減少）する。

これに対して，シェル〔7〕は，ヒックス中立の外生的技術進歩を伴なう新古典派的生産函数のもとで，全計画期間にわたる一人当り消費の現在価値を最大にする問題を扱って，最適径路及び「修正された黄金律」径路において貯蓄率が 1 を越える可能性があり，したがって最適径路が達成されえない可能性があることを指摘した。さらに，シェシンスキー〔8〕は，技術進歩が，過去の総粗投資と結びつけられているアロー〔1〕流の「習得」によって生じるという意味で内生化されてはいるが，資本に体化されることはない場合に，新古典派的生産函数のもとで，無期限計画期間にわたる一人当り消費の現在価値を最大にする問題を分析している。そこでは最適投資財価格が，キャスの場合と異なって，資本一（効率表示での）労働比率の単調函数ではないこと，及び競争経済においては，投資は最適水準よりも小さい水準に近づく傾向があることが指摘され，その場合の最適財政政策が示されている。

本稿においては，コブ－ダグラス型生産函数のもとで，技術進歩が粗投資のみに体化される場合について，無期限計画期間にわたる一人当り消費の現在価値を最大にする問題を取り扱うであろう。

① 拙稿「最適貯蓄の理論(1)，(2)」六甲台論集　第14巻第 1 号，第 2 号参照。

2　資本蓄積のモデル

我々のモデルでは，資本と労働という二生産要素を用いて，規模に関して収穫不変であるようなコブ－ダグラス型生産函数を通じて，一つの同質的な生産物が産出される。その場合，シェルの分析とは異なって，粗投資なしには技術進歩を経済内部へ定着させることはできず，またシェシンスキーの分析とは異

なって，粗投資部分についてのみ技術進歩が体化されるようないわゆるヴィンテージ型の技術進歩を想定する。したがって，資本設備はその設立時期によって効率が異なり，ある時点における総産出量は，異なった型の資本設備からの産出量の総計と考えられる。

また，資本設備は，その設立の前後において労働と自由に結合されうるいわゆる putty-putty 型の資本設備である。その耐用年数は無限大であるが，一定の率 μ ($\mu \geqq 0$) で減価償却されているので，平均耐用年数は $1/\mu$ であると想定される。 したがって，τ 期に新設された資本設備，すなわち τ 期の粗投資I_τ，の t 期における残存量$K_\tau(t) \equiv I_\tau e^{-\mu(t-\tau)}$，とそれに結合される労働$L_\tau(t)$とによって生産される t 期の産出量 $Q_\tau(t)$は，次のように表わされる。

(1)　$Q_\tau(t) = \{e^{\beta\tau}K_\tau(t)\}^\alpha L_\tau(t)^{1-\alpha} \quad \text{for all} \tau \leqq t$

ただし，α ($0<\alpha<1$) は産出の資本弾力性，β ($\beta \geqq 0$) はソロー中立の技術進歩率であり，それぞれ一定である。ここで，ヴィンテージτの資本設備の t 期における残存量 $K_\tau(t)$ の効率表示すなわち有効資本 $\overline{K}_\tau(t)$ は，

(2)　$\overline{K}_\tau(t) = e^{\beta\tau}K_\tau(t)$

で表わすことができるので，(1)は次のように変形できる。

(3)　$Q_\tau(t) = \overline{K}_\tau(t)^\alpha L_\tau(t)^{1-\alpha}$

また，t 期における総有効資本$\overline{K}(t)$は，各ヴィンテージの資本設備の t 期における有効資本の総和であるから，

(4)　$\overline{K}(t) = \int_{-\infty}^{t} \overline{K}_\tau(t)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{(\beta+\mu)\tau-\mu t}\, I_\tau\, d\tau$　。

したがって，t 期における総有効資本の純増加分$\dot{\overline{K}}(t)$は次のように示すことができる。

(5)　$\dot{\overline{K}}(t) = e^{\beta t}I_t - \mu\overline{K}(t)$

すなわち，$\dot{\overline{K}}(t)$は，t 期の粗投資 $I_t \equiv K_t(t)$ の効率表示，いいかえれば t 期における総有効資本の粗増加分 $e^{\beta t}I_t$ から，t 期における総有効資本の減価償却分 $\mu\overline{K}(t)$を差し引いた残りである。

一方，資本設備が putty-putty 型であるので，一定率 n ($n \geqq 0$) で外生

的に成長している同質的な労働$L(t)$は，各ヴィンテージの現存する資本設備に対して，労働の限界生産力$w(t)$が均等しているように完全に配分されると考えることができよう①。すなわち，

(6) $$\frac{\partial Q_\tau(t)}{\partial L_\tau(t)} \equiv w(t) \quad \text{for all } \tau \leqq t \quad ,$$

(7) $$L(t)=L(o)e^{nt}=\int_{-\infty}^{t} L_\tau(t)\,d\tau \quad 。$$

以上の定式より，各ヴィンテージの産出量 $Q_\tau(t)$ の総和としてのt期の総産出量$Q(t)$を，総有効資本$K(t)$及び総労働$L(t)$の函数として表わすことができる。

(8) $$Q(t) \equiv \int_{-\infty}^{t} Q_\tau(t)\,d\tau = \overline{K}(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

ところで，制御変数である貯蓄率を$s(t)$とすれば（$0 \leqq s(t) \leqq 1$），総産出量$Q(t)$のうち一部は貯蓄 $s(t)Q(t)$として次期以後の生産に向けられ，残りはその期の消費$C(t)$として使用される。

(9) $$Q(t)=s(t)Q(t)+C(t)$$

また，生産物の需給一致，すなわち貯蓄$s(t)Q(t)$と粗投資 I_t との均等は，(5)を考慮して，次のように表わすことができる。

(10) $$s(t)Q(t)=(\dot{\overline{K}}(t)+\mu\dot{\overline{K}}(t))e^{-\beta t}$$

① 労働の限界生産力$w(t)$は，同質的な労働の自由移動が認められている競争経済にあっては，単位労働当りの分け前すなわち賃金率と考えられるものであるが，本稿で想定されているような計画化された経済にあっては，賃金率が労働の価値限界生産力に等しいとはじめから前提するのではなく，賃金率は，経済の目的を満たすという意味での「最適な賃金率」に決定されねばならない。事実，第6節で明らかにされるように，「最適な賃金率」と労働の価値限界生産力が一致するのは，たとえありうるとしても，特殊な場合である。

3　資本蓄積の最適計画

さて，経済の目的は，以上のフレームワークのもとで，歴史的に与えられている初期資本 $\overline{K}(0)=\overline{K}_0$ から出発して，一人当り消費 $C(t)/L(t)$ の現在

価値 $(C(t)/L(t))e^{-\delta t}$ を計画期間全体にわたって総計したもの，すなわち，

(11)　$$\int_0^\infty (C(t)/L(t))e^{-\delta t}dt$$

を最大にすることであると想定されている。ただし，将来の消費に対する割引率 δ は非負の一定値である。かくして我々の問題は，初期条件 $\overline{K}(0)=\overline{K}_0$ 及び(7)(8)(9)(10)の制約のもとで(11)を最大ならしめる資本蓄積径路を分析することである。

ところで，各経済量を，

$$y(t)\equiv\frac{Q(t)}{L(t)};\ k(t)\equiv\frac{K(t)}{L(t)};\ c(t)\equiv\frac{C(t)}{L(t)};\ z(t)\equiv s(t)y(t)$$

の如く一人当り表示で示せば，我々の問題は次のように表わされる。

(12)　$c(t)=(1-s(t))y(t)=y(t)-z(t)$

(13)　$y(t)=k(t)^\alpha$

(14)　$\dot{k}(t)=s(t)y(t)e^{\beta t}-\lambda k(t)=z(t)e^{\beta t}-\lambda k(t)$

(15)　$k(0)=k_0>0$

(16)　$c(t)\geqq 0,\ k(t)\geqq 0,\ 0\leqq s(t)\leqq 1,\ t\geqq 0,\ 0<\alpha<1,$
$\beta\geqq 0,\ \lambda\equiv n+\mu>0,\ \delta\geqq 0$

なる実現可能条件を満たす実現可能径路のうちで，

(17)　$$\int_0^\infty c(t)e^{-\delta t}dt$$

を最大にするという意味での最適径路を達成するためには，貯蓄率 $s(t)$ をいかに制御すべきであるか，という問題に帰着する。

ここで，シエルとは異なって生産函数(13)に陽表的に時間 t が現われていないこと，及びそれにもかかわらずシエルと同様に，したがってキャス及びシェシンスキーとは異なって，貯蓄投資均等式(14)の中に時間 t が陽表的に現われていることに注意すべきである。これは，技術進歩が粗投資に，かつ粗投資のみに，体化されるために，効率表示での粗投資が，それの行なわれる時点の技術状態を象徴する時間 t から独立ではありえないためである。

かくして，上述の我々の問題にポントリャーギンの最大値原理[1]を適用して，次の定理を導出することができる[2]。

定理：径路（$k(t)$，$s(t)$，$c(t)$）が最適径路であるためには，実現可能条件(12)(13)(14)(15)(16)が満たされ，かつ次のポントリャーギンの条件(18)(19)(20)を満たす連続函数$q(t)$が存在しなければならない。

(18)　$\dot{q}(t)=(\lambda+\delta)q-\{1-s(t)+q(t)s(t)e^{\beta t}\}\alpha k(t)^{\alpha-1}$

(19)　$q(t)>e^{-\beta t}$　ならば　$s(t)=1$

　　$q(t)=e^{-\beta t}$　ならば　$0\leqq s(t)\leqq 1$

　　$q(t)<e^{-\beta t}$　ならば　$s(t)=0$

(20)　$\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\delta t}=0$

これら条件式の経済学的含意は次のように考えることができる。

まず(18)について。説明の便宜上 discrete な時間で表わして，$\dot{q}(t)=q(t+1)-q(t)$と考え，また$\{1-s(t)+q(t)s(t)e^{\beta t}\}\alpha k(t)^{\alpha-1}\equiv r(t)$とおけば，(18)は次のように変形できる。

(21)　$q(t+1)+r(t)=\{1+(\lambda+\delta)\}q(t)$

ここで，$(\lambda+\delta)$は，人口増加率n，資本設備の減価償却率μ及び割引率δの和であり，我々の目的函数(17)のもとでは，n，μ，δはいずれも将来の一人当り消費の現在価値を低下させる要因，すなわち投資の価値を低下させる要因であるので，資本蓄積の程度したがってまた迂回生産の程度を低下させる要因である。すなわち，$(\lambda+\delta)$は我々のモデルにおける「利子率」と考えることができよう。故に，(21)の右辺は，t期における資本設備一単位の価格に相当する$q(t)$円の（$t+1$）期における価値，いわば元利合計，とみなすことができよう。

一方，(21)の右辺の$r(t)$は，t期における資本一単位の純収益となみすことができる[3]。というのは，t期における資本一単位は（$t+1$）期に$y'(k)=\alpha k(t)^{\alpha-1}$だけの純生産物を産出し，そのうち$s(t)\alpha k(t)^{\alpha-1}$は投資に，残りの（$1-s(t)$）$\alpha k(t)^{\alpha-1}$は消費に向けられる。ところで，$t$期の投資$s(t)\alpha k(t)^{\alpha-1}$は，当該期の技術状態を反映しているので，効率表示では

$s(t)\alpha k(t)^{\alpha-1}e^{\beta t}$で表わされ，価値表示では，当該期の投資価格$q(t)$で評価して，$q(t)s(t)\alpha k(t)^{\alpha-1}e^{\beta t}$となる。故に，限界一単位の消費の価値が1であることを考慮すれば④，投資部分及び消費部分の価値の和である$r(t)$は，資本一単位の純収益である。したがって，資本一単位の（$t+1$）期における価格$q(t+1)$とt期の純利益の和である(21)の左辺は，t期における資本一単位を生産に投下した場合の（$t+1$）期における価値を考えることができる。

よって，(21)したがってまた(18)は，t期における資本一単位相当額 $q(t)$円が，生産に投下されようと，あるいは「利子」の獲得に用いられようと，相等しい限界収益をもたらさねばならないという異時的な効率的資源配分の条件を意味するものと考えることができよう。

次に(19)は，当該時点における生産物の消費と投資とへの効率的配分の条件を示している。すなわち，$0<s(t)<1$言い換えれば生産物が消費と投資の双方へ配分される場合には，限界一単位について，消費の価値1と投資の価値$q(t)e^{\beta t}$とが相等しくなければならない。またもし投資の価値が消費の価値より小さい（大きい）場合には，投資は零すなわち$s(t)=0$（消費は零すなわち$s(t)=1$）でなければならないことを意味している。

最後に(20)は，無限の将来の資本の割引された現在価値は零でなければならないことを意味している⑤。

① ポントリャーギン〔6〕の定理7参照。

② 我々の問題は，

$$\mathrm{Max}\int_0^{\infty}(1-s)k^{\alpha}e^{-\delta t}dt$$

$$\text{subject to}\quad \dot{k}=sk^{\alpha}e^{\beta t}-\lambda k,\quad 1\leqq s\leqq 1,$$

として表わされ，ハミルトニアンHは，

$$H(q,k,s,t)=\{(1-s)k^{\alpha}+q(sk^{\alpha}e^{\beta t}-\lambda k)\}e^{-\delta t}$$

である。$s(t)$は区分的連続函数であると仮定されている。

③ $r(t)/q(t)$はt期における資本の自己利子率に他ならない。また，$0<s(t)<1$のとき，すなわち生産物が消費と投資の双方に配分されるときには，(19)より，$r(t)=\alpha k^{\alpha-1}\equiv y'(k)$〔資本の限界生産力〕となり，(18)において$s(t)$は explicitly には現われなくなる。なお，(21)を，

$$\frac{r(t)}{q(t)}+\frac{q(t+1)}{q(t)}=(\lambda+\delta)+1$$

の如く変形すれば明らかなように，(21)したがって(18)は，DOSSO〔3〕の（12—7）式の一般化——端点解の場合も含むという意で一般化——と考えることができる。

④ 限界一単位の消費の価値が1であることは，次のように考えれば一層よく理解できよう。本来，消費 c の価値は消費を何らかの尺度で評価したもの，すなわち効用 U(c)，であると考えられるが，我々の目的函数では，U(c)＝c であるので，限界における消費の価値，すなわち限界効用 U′(c) は 1 に等しい。

⑤ この条件は，諸論者の最適成長論における積分値の収束条件に相当する。前掲拙稿参照。

4　技術進歩のない場合

まず技術進歩のない場合（$\beta=0$）を考察しよう。これは，キャスの分析の特殊な場合となるが，特殊化に伴なって帰結に若干の相違が生じる[①]。

（k，q）平面の位相図によって考察しよう。

（Ⅰ）　q＝1 のとき，(14)(18)より，

(22)　$\dot{k}=sk^{\alpha}-\lambda k=0$ or $0\leqq k\leqq k_1$　ただし　$k_1=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

(23)　$\dot{q}=0$ or $k=k^*_{\beta=0}$　ただし　$k^*_{\beta=0}=\left(\frac{\alpha}{\lambda+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}<k_1$

ここでの（$k=k^*_{\beta=0}$，$q=1$）は，将来の消費の割引がある場合の黄金律径路であり，このときの貯蓄率 $s^*_{\beta=0}$ は，(22)より，

(24)　$s^*_{\beta=0}=\frac{\alpha\lambda}{\lambda+\delta}<1$

となり，$\delta=0$ のときには $s^*_{\beta=0}=\alpha$ となって，フェルプス－ロビンソンのいわば古典的な「黄金律」径路に一致する。

（Ⅱ）　q＜1 のとき，(14)(18)より，

(25)　$\dot{k}=-\lambda k<0$ for all $k>0$

(26)　$\dot{q}=0$ or $q=\frac{\alpha}{\lambda+\delta}k^{\alpha-1}>0$

(27)　$\left.\frac{dq}{dk}\right|_{\dot{q}=0}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{\lambda+\delta}k^{\alpha-2}<0$

(28)　$\left.\dfrac{\partial \mathrm{q}}{\partial \mathrm{k}}\right|_{\dot{\mathrm{q}}=0}=-\alpha(\alpha-1)\mathrm{k}^{\alpha-2}>0$

(26)(27)より，$\dot{\mathrm{q}}=0$なる曲線は，第1象現にあり，右下りである。また(28)より，$\dot{\mathrm{q}}=0$なる曲線の右ではqは増加し（$\dot{\mathrm{q}}>0$），左では減少する（$\dot{\mathrm{q}}<0$）。さらに(25)より，kは常に減少することがわかる。

（Ⅲ）　$\mathrm{q}>1$のとき，(14)(18)より，

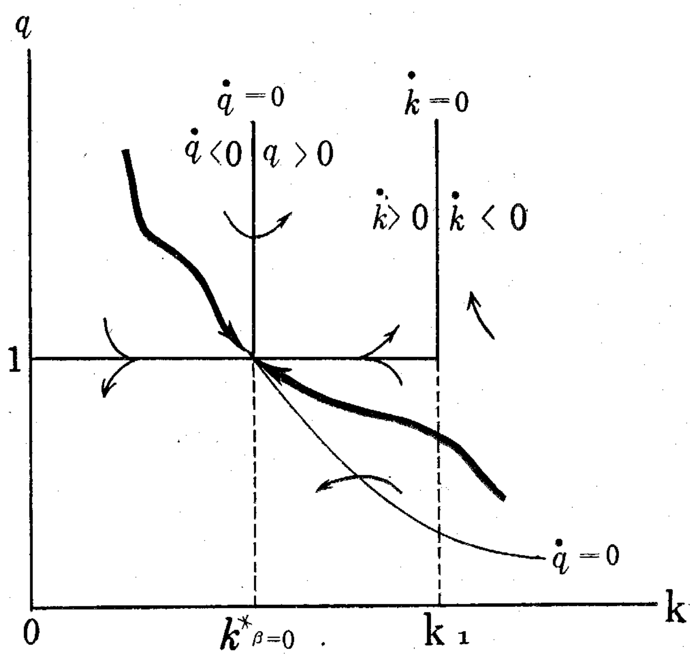
(29)　$\dot{\mathrm{k}}=\mathrm{k}(\mathrm{k}^{\alpha-1}-\lambda)\gtreqless 0 \quad \text{for} \quad \mathrm{k}\lesseqgtr \mathrm{k}_1$

(30)　$\dot{\mathrm{q}}=(\lambda+\delta-\alpha\mathrm{k}^{\alpha-1})\mathrm{q}\gtreqless 0 \quad \text{for} \quad \mathrm{k}\gtreqless \mathrm{k}^*_{\beta=0}$

(29)より，$\dot{\mathrm{k}}=0$は$\mathrm{k}=\mathrm{k}_1$なる直線であり，その右（左）ではkは減少（増加）する。また(30)より，$\dot{\mathrm{q}}=0$は$\mathrm{k}=\mathrm{k}^*_{\beta=0}$なる直線であり，その右（左）ではqは増加（減少）することがわかる。

以上の結果は第1図に示してある。

この場合には，キャスの場合と異なって，（ i ）最適径路は有限時間で黄金律径路に到達し[2]，（ii）黄金律径路に達するまでは，最適径路上で貯蓄が0かあるいは1という極端な事態が生じる。これは，生産函数(13)がコブ－ダグラス型であるためではなく，目的函数(17)に現われる消費が$U(c)=c$という線型の評価函数（効用函数）Uで評価されているためである[3]。すなわち，消費が零のときの限界効用が無限大（$\lim_{c\to 0}U'(c)=\infty$）であるような一般的な効用函数を採用するか，あるいは消費に下限を付ければ，こういう極端な事態を避けることができる。



第 1 図

① シェル〔7〕参照。

② これについては，次節の(35)及び(39)参照。

③ シェル〔7〕参照。

5　技術進歩のある場合

技術進歩がある場合（$\beta>0$）には，(14)及び(18)より明らかなように，一人当り資本及び新投資財価格の変化率（$\dot{k}$及び$\dot{q}$）が時間 t の陽表的な函数となり，したがってキャス及びシェシンスキーの場合とは異なった帰結をもたらす。

（Ⅰ）　$q(t)=e^{-\beta t}$のとき

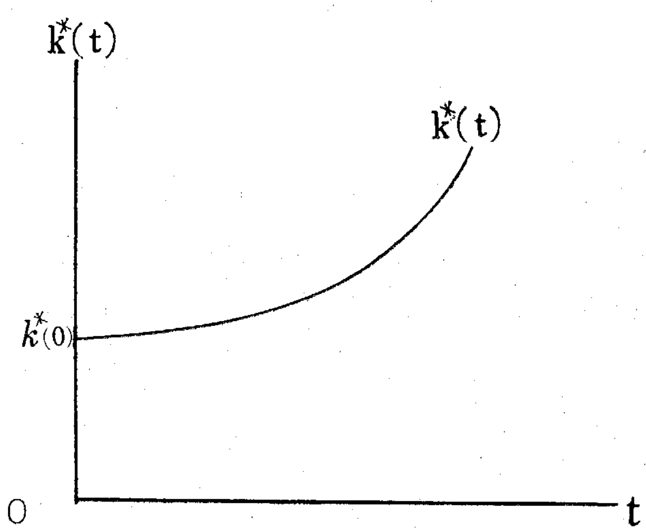
まず，歴史的に与えられた初期条件(15)を無視した場合の準最適径路（$k^*(t)$，$s^*(t)$，$q^*(t)$，$c^*(t)$）から考察しよう。(14)(18)及び，

(31)　$$q^*(t)=e^{-\beta t}$$

より，uniqueな一人当り資本の準最適径路$k^*(t)$を導出することができる。

(32)　$$k^*(t)=k^*(0)e^{\frac{\beta}{1-\alpha}t}\quad \text{ただし}\quad k^*(0)=\left(\frac{\alpha}{\lambda+\delta+\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

この準最適径路は，将来の消費に対する割引があり（$\delta>0$）かつ技術進歩がある（$\beta>0$）場合の「修正された資本蓄積の黄金律」径路と呼ばれるべきものである。これは，偶然に初期条件$k_0=k^*(0)$である場合の最適径路に他ならない。この径路は，キャス及びシェシンスキーの場合とは異なって，ヴィンテージ型の技術進歩があるために，第2図に示す如く，一定率$\frac{\beta}{1-\alpha}$で時間と共に変化する[①]。



第2図

また(14)及び(32)より，この場合の貯蓄率$s^*(t)$は，

(33)　$$s^*(t)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{(1-\alpha)\lambda+\beta}{\lambda+\delta+\beta}=\frac{\alpha(\alpha\lambda+m)}{\alpha\lambda+m+\alpha(\delta-m)}$$

ただし　$m = \dfrac{\alpha\beta}{(1-\alpha)}$

で表わされる unique な一定値であるが[2]，注意すべきことに，パラメーター間の相対的大きさ如何によっては，$s^* > 1$ なる可能性がある。すなわち，割引率がハロッド中立の技術進歩率mより小さくないとき（$\delta \geqq m$）には，必ず $s^* < 1$ であるが，$\delta < m$ のときには，産出の資本弾力性 α が 1 に十分近い場合には，$s^* > 1$ となる可能性がある。こういう場合が生じるのは，割引率が十分小さいこと及び技術進歩が十分大きいことは，共に，現在の消費を低く評価し，投資（したがって貯蓄）を高く評価することを意味するためであると考えることができよう。以下の分析では $s^* \leqq 1$ であると仮定されている[3]。

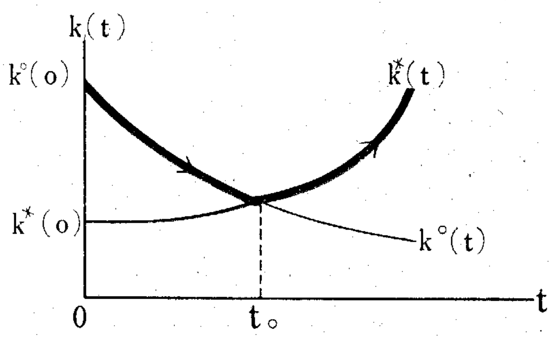
さらに，(31)より明らかな如く，外生的なヒックス中立の技術進歩が想定されているシェルの場合とも異なって，「修正された黄金律」径路での unique な投資財価格 $q^*(t)$ は，ソロー中立の技術進歩率 β の率で減少する。これは，ここでの技術進歩が，シェルとは異なって，新投資にのみ体化されるためである。すなわち，前述の如く，生産物が消費と投資とに共に配分される（$0 < s^* < 1$）ためには，限界において，両用途の価値が等しくなければならない。すなわち $q^*(t)e^{\beta t} = 1$。ところが消費の価値は一定値 1 であるので（右辺），技術進歩があるために生じる（効率表示での）投資の増加 $e^{\beta t}$ をちょうど相殺すべく，投資財価格 $q^*(t)$ は減少しなければならないためである。

（Ⅱ）　$q(t) < e^{-\beta t}$ のとき

まず(14)及び(19)より，一人当り資本の unique な径路 $k°(t)$ を求めることができる。

(34)　$k°(t) = k°(0)e^{-\lambda t}$

したがって，$k°(t)$ は一定率 λ で減少するので，所与の初期条件 $k°(0)$ が「修正された黄金律」径路の初期条件 $k^*(0)$ より大きいときには，第3図に示す如く，有限時間 t_0 後に（$0 < t_0 < \infty$），黄金律径路



第 3 図

$k^*(t)$に到達する[4]。その場合の unique な t_0を求めれば，(32)及び(34)より，

(35)
$$t_0=\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)\lambda+\beta}\log\frac{k^\circ(0)}{k^*(0)}。\qquad (k^\circ(0)>k^*(0))$$

他方，新投資財価格 $q^\circ(t)$の unique な径路は(18)(19)及び(34)より次のように求めることができる。

(36)
$$q^\circ(t)=Ae^{(1-\alpha)\lambda t}+(q^\circ(0)-A)e^{(\lambda+\delta)t}$$

$$\text{ただし}\quad A\equiv\frac{\alpha}{\alpha\lambda+\delta}k^\circ(0)^{\alpha-1}>0$$

故に，$k^\circ(t)$が$k^*(t)$に到達するのと同時点 t_0において$q^\circ(t)$が$q^*(t)$に到達するような新投資財価格の unique な初期値 $q^\circ(0)$を求めれば，(31)(35)及び(36)より，

(37)
$$q^\circ(0)=A+\left(\frac{k^*(0)}{k^\circ(0)}-A\right)e^{-(\alpha\lambda+\delta)t_0}。$$

この場合には，「修正された黄金律」径路に達するまでは，すなわち$0\leqq t<t_0$なる t に対しては，(19)より明らかな如く，貯蓄率 $s^\circ(t)=0$ であり，一人当り消費$c^\circ(t)=k^\circ(t)^\alpha$となり，$c^\circ(t)$は$\alpha\lambda$の率で減少することがわかる。

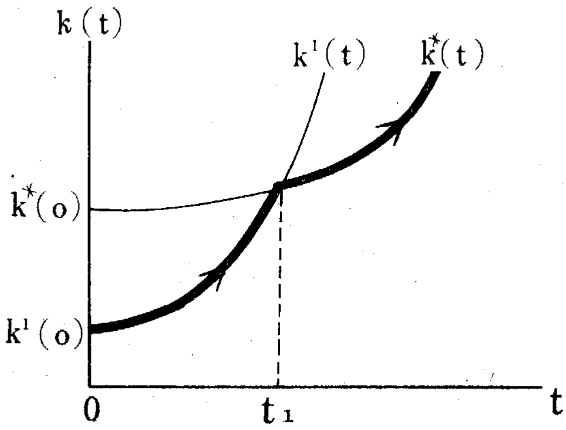
（Ⅲ）　$q(t)>e^{\beta t}$ のとき

まず(14)及び(19)より一人当り資本の unique な径路$k^1(t)$は，

(38)
$$k^1(t)=\{Be^{\beta t}+(k^1(0)^{1-\alpha}-B)e^{(1-\alpha)\lambda t}\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\text{ただし}\quad B\equiv\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)\lambda+\beta}$$

として求めることができる。(38)において，中括弧の中の第 2 項は時間と共に零に収束するので，第 1 項が支配的な項となる。したがって，所与の初期条件 $k^1(0)$が「修正された黄金律」径路の初期条件 $k^*(0)$より小さいときには，第 4 図に示す如く，t_1時間後に黄金律径路 $k^*(t)$に到達する[5]。



第 4 図

この unique な t_1 を求めれば，(32)及び(38)より，

(39) $$t_1=\frac{1}{(1-\alpha)\lambda+\beta}\{\log(B-k^1(0)^{1-\alpha})-\log(B-k^*(0)^{1-\alpha})\}。$$

他方，新投資財価格 $q^1(t)$ は，(18)(19)及び(38)より，

(40) $$q^1(t)=De^{\int P(t)dt}$$

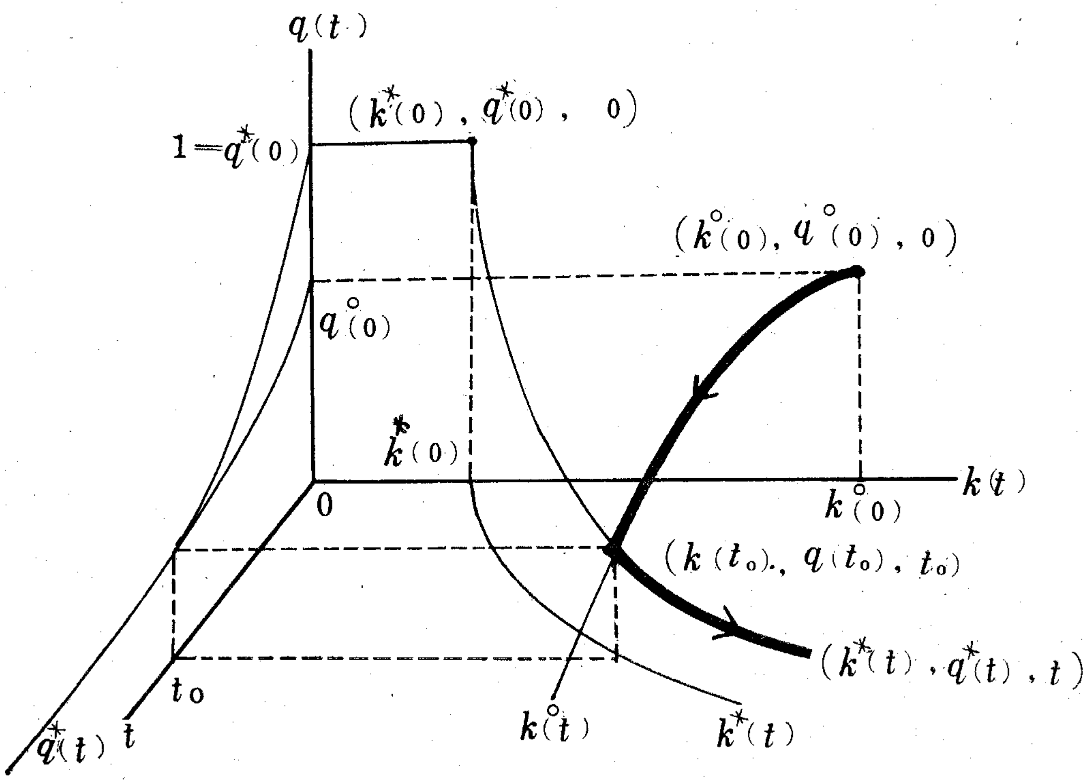
ただし $P(t)=\lambda+\delta-\alpha k^1(t)^{\alpha-1}e^{\beta t}$，Dは積分定数，

として導出することができる。積分定数Dは(36)におけると同様に，$k^1(t)$ が $k^*(t)$ に到達するのと同時点において $q^1(t)$ が $q^*(t)$ に到達するように指定されねばならない。

この場合には，「修正された黄金律」径路に達するまでは，すなわち $0\leq t<t_1$ なる t に対しては，(19)より明らかな如く，貯蓄率 $s^1(t)=1$ であり，消費 $c^1(t)=0$ である。

また，(35)及び(39)から，初期値が黄金律径路のそれより離れているほど，黄金律径路に達するに要する時間が大きいことがわかる。

かくして，第5図に示す如く，次の諸点が明らかにされた。すなわち，歴史



第 5 図

的に与えられた任意の初期値から出発する unique な最適資本蓄積径路が存在し，それは有限時間後[6] に「修正された資本蓄積の黄金律」径路に到達する。さらに，その最適径路に対応する unique な新投資財価格の径路を選ぶことができる。また，所与の初期条件が黄金律径路のそれより大きい（小さい）場合には，黄金律径路に達するまでは，貯蓄率は零（1）である[7]。黄金律径路においては，資本は一定率で増加し，新投資財価格は一定率で減少する。また，技術進歩が将来の消費の割引に比べて十分大きい場合には，黄金律径路での貯蓄率が 1 より大きくなる可能性がある。さらに，歴史的に与えられる初期値と黄金律径路のそれとの差が大きいほど，黄金律に到達するのが遅くなる。

① 外生的なヒックス中立の技術進歩がある場合にも，$k^*(t)$ は時間の函数となる。シェル〔7〕参照。

② $s^* > s^*_{\beta=0}$ であることがわかる。これは，技術進歩が投資の価値を高めるためである。

③ ちなみに，$\alpha=0.3$，$\lambda=0.06$，$\delta=0.05$ のとき，$m=0.2$（$\beta=0.47$）とすると $s^* \fallingdotseq 0.38$ となり，$m=1$ とすると $s^* \fallingdotseq 0.42$ となる。

④ 前節の分析において，最適径路が黄金律径路に達するに要する時間は，(35)において $\beta=0$ として求められる。(39)についても同様である。

⑤ $s^* \leqq 1$ より $B-k^*(0)^{1-\alpha} \geqq 0$。また $k^1(0) < k^*(0)$ より $B-k^1(0)^{1-\alpha} > B-k^*(0)^{1-\alpha} \geqq 0$。ゆえに，$s^* < 1$ のとき $0 < t_1 < \infty$，$s^* = 1$ のとき $t_1 = \infty$。

⑥ 注⑤で示した如く，所与の初期条件が黄金律径路のそれより小さくかつ $s^* = 1$ のときに限って，無限時間後となる。

⑦ こういう極端な場合が生じるのは，前節の場合と同様に，消費の評価函数が線型であるためである。

6　投資と資本分配分

周知のように，フェルプス－ロビンソン流の古典的な「黄金律」は，限界生産力に応じて分配された資本の分配分に等しい投資を行なう径路が，黄金時代径路のうちで，一人当り消費を最大にする径路であることを意味している。けれども，以下に示す如く，技術進歩及び将来の消費に対する割引がある場合の「修正された黄金律」径路のもとでは，修正された帰結が導出される。すなわ

ち(33)より，

$$(47)\qquad s^* \gtreqless \alpha \leftrightarrow \beta \gtreqless \frac{(1-\alpha)\delta}{\alpha} \leftrightarrow m \gtreqless \delta$$

であるから，次のように言うことができる。

もし技術進歩がないとすれば（$m=0$），割引がある限り（$\delta>0$），「修正された黄金律」径路での貯蓄率は限界生産力に応じる資本の分配率より常に小さく（$s^*<\alpha$），限界生産力に応じる資本の分配分をすべて投資すれば，投資は過多となる①。すなわちこの場合には古典的な「黄金律」は成立しえない。

けれども，技術進歩がある場合には（$m>0$），たとえ割引があっても，ハロッド中立の技術進歩率が消費の割引率にちょうど等しければ($m=\delta$)，上述の古典的な「黄金律」からの帰結は成立する②。さらに，技術進歩が一層大きいときには（$m>\delta$）③，限界生産力に応じる資本分配分だけでは投資は過少となる。これは，技術進歩による投資の価値の増大が，割引によるその減少を相殺して余りあるからである。

したがってまた，(3)及び(8)より明らかな如く，各ヴィンテージの生産函数及び総生産函数は，共に規模に関して収穫不変であるので，「修正された黄金律」径路において，一人当り消費c^*(賃金率とみなしうる）は，$m=\delta$ の場合を除いては，労働の限界生産力 w^* に等しくないということがわかる④。

また，(12)(13)(32)及び(33)からわかるように，黄金律径路では，一人当りの産出 y^*，消費 c^*，粗投資 z^* は，すべてハロッド中立の技術進歩率mで成長する⑤。

① これは，割引が投資の価値を低下させるためである。
② $m<\delta$ のときには，技術進歩のない場合と同様の帰結をもたらす。
③ 当然，$s\leqq 1$ の範囲内で $m>\delta$ でなければならない。
④ (6)より各ヴィンテージの生産函数と総生産函数とにおいて，一人当り産出量，資本の限界生産力，資本の平均生産力（労働についても同様）はそれぞれすべて等しくなる。したがって，$c=\frac{1-s}{1-\alpha}$となり，ゆえに $w^* \gtreqless c^* \leftrightarrow s^* \gtreqless \alpha$ となる。(47)参照。
⑤ $y^*=k^*(0)^{\alpha}e^{mt}$，$c^*=(1-s^*)k^*(0)^{\alpha}e^{mt}$，$z^*=s^*k^*(0)^{\alpha}e^{mt}$，
したがって，一人当りの資本，粗投資，消費，産出，及び貯蓄率，新投資財価格の成長率（$\widehat{k}^*$，$\widehat{z}^*$，$\widehat{c}^*$，$\widehat{y}^*$ 及び$\widehat{s}^*$，$\widehat{q}^*$）の間には次の関係がある。

$$\hat{q}^* = -\beta < 0 = \hat{s}^* < m = \hat{y}^* = \hat{c}^* = \hat{z}^* < \frac{m}{\alpha} \equiv \frac{\beta}{1-\alpha} = \hat{k}^*。$$

7　最適条件の十分性

第3節で示したポイントリャーギンの定理から明らかなことは，実現可能条件(12)～(16)及びポイントリャーギンの条件(18)～(20)の8つの条件は，計画が最適であるための必要条件にすぎないということである。けれども，以下に示す如く，これらの条件は同時に十分条件でもあることがわかる。すなわち，同じ初期値$k(0)=\hat{k}(0)$から出発する実現可能条件を満たす任意の径路$(k(t),\ s(t),\ z(t),\ q(t),\ c(t))$と実現可能条件かつポントリャーギンの条件を満たす最適径路$(\hat{k}(t),\ \hat{s}(t),\ \hat{z}(t),\ \hat{q}(t),\ \hat{c}(t))$とにおいて，

$$\int_0^\infty (\hat{c}-c)e^{-\delta t}dt \geqq 0$$

が成立することを示そう。

まずそのための準備として，$\hat{\gamma} \equiv 1-\hat{s}+\hat{s}\hat{q}e^{\beta t}$とおけば，(19)及び(18)より，

(42)　$$\hat{\gamma} = \max(\hat{q}e^{\beta t},\ 1)$$

(43)　$$\dot{\hat{q}} = (\lambda+\delta)\hat{q} - \hat{\gamma}\alpha\hat{k}^{\alpha-1}$$

となり，さらに(19)及び(42)より，

(44)　$$(1-\hat{\gamma})(\hat{c}-c) \geqq 0$$
$$(\hat{q}e^{\beta t}-\hat{\gamma})(\hat{z}-z) \geqq 0 \quad 。$$

またテーラー展開により，

$$k^\alpha = \hat{k}^\alpha + (k-\hat{k})\alpha\hat{k}^{\alpha-1} + \frac{(k-\hat{k})^2}{2}\alpha(\alpha-1)\hat{k}^{\alpha-2} + \cdots$$
$$\leqq \hat{k}^\alpha + (k-\hat{k})\alpha\hat{k}^{\alpha-1}$$

であるから，次式を得る[1]。

(45)　$$\hat{k}^\alpha - k^\alpha \geqq (\hat{k}-k)\alpha\hat{k}^{\alpha-1}$$

さらに(20)及び(41)を考慮すれば，

(46)
$$\int_0^\infty \hat{q}(\dot{k}-\dot{\hat{k}})e^{-\delta t}dt=\left[\hat{q}e^{-\delta t}(k-\hat{k})\right]_0^\infty+\int_0^\infty(\dot{\hat{q}}-\delta q)$$
$$\times(\hat{k}-k)e^{-\delta t}dt=\int_0^\infty(\dot{\hat{q}}-\delta q)(\hat{k}-k)e^{-\delta t}dt。$$

以上の準備のもとで，

$$\int_0^\infty(\hat{c}-c)e^{-\delta t}dt$$
$$=\int_0^\infty\left[(\hat{c}-c)+\hat{\gamma}\{(\hat{k}^\alpha-\hat{z}-\hat{c})-(k^\alpha-z-c)\}+\hat{q}\{(\hat{z}e^{\beta t}-\lambda\hat{k}-\dot{\hat{k}})\right.$$
$$\left.-(ze^{\beta t}-\lambda k-\dot{k})\}\right]e^{-\delta t}dt$$
$$=\int_0^\infty\left[(1-\hat{\gamma})(\hat{c}-c)+(\hat{q}e^{\beta t}-\hat{\gamma})(\hat{z}-z)+\hat{\gamma}(\hat{k}^\alpha-k^\alpha)\right.$$
$$\left.+\hat{q}\{\lambda(k-\hat{k})+(\dot{k}-\dot{\hat{k}})\}\right]e^{-\delta t}dt$$
$$\geqq\int_0^\infty\left[\hat{\gamma}(\hat{k}^\alpha-k^\alpha)+\hat{q}\{\lambda(k-\hat{k})+(\dot{k}-\dot{\hat{k}})\}\right]e^{-\delta t}dt \quad 〔∵(44)より〕$$
$$\geqq\int_0^\infty\left[\hat{\gamma}(\hat{k}-k)\alpha\hat{k}^{\alpha-1}+\hat{q}\{\lambda(k-\hat{k})+(\dot{k}-\dot{\hat{k}})\}\right]e^{-\delta t}dt \quad 〔∵(45)より〕$$
$$=\int_0^\infty(\hat{k}-k)(\hat{\gamma}\alpha\hat{k}^{\alpha-1}-\lambda\hat{q})e^{-\delta t}dt+\int_0^\infty\hat{q}(\dot{k}-\dot{\hat{k}})e^{-\delta t}dt$$
$$=\int_0^\infty(\hat{k}-k)(\hat{\gamma}\alpha\hat{k}^{\alpha-1}-\lambda\hat{q})e^{-\delta t}dt+\int_0^\infty(\hat{k}-k)(\dot{\hat{q}}-\delta q)e^{-\delta t}dt$$
〔∵(46)より〕
$$=\int_0^\infty(\hat{k}-k)\{\dot{\hat{q}}-(\lambda+\delta)\hat{q}+\hat{\gamma}\alpha\hat{k}^{\alpha-1}\}e^{-\delta t}dt=0 \quad 〔∵(43)より〕$$

よって，最適条件の十分性が証明された。

① これは，生産函数(13)が凹函数ということに他ならない。

参考文献

〔1〕 Arrow, K. J., "The Economic Implications of Learning by Doing," *Review of Economic Studies*, 1962.

〔2〕 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, 1965.

〔3〕 Dorfman, R., Samuelson, P.A. and Solow, R. M., *Linear Programming and Economic Analysis*, 1958.

〔4〕 von Neumann, J., "A Model of General Economic Equilibrium," *Review of Economic Studies*, 1945—6.

〔5〕 Phelps, E.S., "The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen," *American Economic Review*, 1961.

〔6〕 Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. and Mishchenko, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, (translated from the Russian), 関根智明訳「最適過程の数学的理論」1967.

〔7〕 Shell, K., "Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical change", in *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, ed. Shell, K..

〔8〕 Sheshinski, E., "Optimal Accumulation with Learning by Doing," in *Essays on the Theory of Optimal Economic Crowth*, ed. Shell, K..

〔9〕 Ramsey, F.P.. "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, 1928.

〔10〕 Robinson, J., *Essays in the Theory of Economic Growth*, 1962.