スピルオーバー効果と資源配分①

藤　井　大司郎

1　序

本稿は，外部性と資源配分の問題を，スピルオーバー効果をもつ地方公共財の最適配分問題に特定化して考察しようとするものである。この中で我々は，ピグウ流の課税・補助金政策②をとりあげ，この政策によってスピルオーバー効果の存在する地方公共財が地方自治体間に最適配分されるにはどうすればよいのかを論ずる。

しかしその前に，我々の目的をより一般的な観点から明らかにしておく必要があろう。そこでまず，一般に外部性存在下の配分問題をピグウ流の政策で解決しようとする際に生じてくるいくつかの問題点を政策実行上の観点から概括しておこう。第一に，ピグウ流の政策が実行可能なためには政策担当者に最適な課税（又は補助金）率が知られなければならないが，そのための情報をいかにして得るかという問題がある。③　第二に，たとえその様な情報が得られ，最適な課税（又は補助金）率が知られたとしても，Davis-Whinston（1962）が指摘した様に，双方的な（bilateral）外部性の場合には，寡占企業の理論におけると同様，当事者の意志決定が相互にパラメトリックに依存し合うことになり最適な解が不安定となるかも知れないとい

---

① 本稿は著者の大阪大学大学院に提出した修士論文の一部を修正・補筆したものである。在学中御指導頂いた木下教授に深く感謝を捧げるとともに，本稿執筆にあたって有意義な多くのコメントを頂いた米原助教授並びに本間助手に心からお礼を申し上げる。

② Pigou〔10〕。

③ Davis-Whinston〔5〕。

いう点である。第三に，外部性の存在下では，消費者の効用関数あるいは企業の生産関数が「凸性」を失う可能性があるということが問題になる。④

以上の三点のうち，我々の主眼は第二の点にある。我々は，互いにスピルオーバー効果を及ぼし合っている同質の地方公共財を各々自治体内の住民に供給している地方政府を設定して，最適な課税（補助金）率が与えられた下で公共財の供給量の最適解が安定的であることを示そう。その際，第一及び第三の問題は起こらないものとしよう。

スピルオーバー効果をもつ地方公共財については，これまで Weisbrod (1964), Williams (1966), Brainard-Dolbear (1967), Pauly (1971) 等によって論じられてきたが，それらの中心問題は，スピルオーバー効果を伴う場合最適性の観点からその供給が過大となるのか過少となるのかという点にあった。しかしそれらの議論を通じて言えることは，「最適な供給」ということの定義が明示的でなくかつ一致していなかったということである。そこで我々はこの地方公共財の過大過少供給問題についても考察を加えることにする。その際，我々は最適性の基準をパレート最適に求め，それを明示的に示しておくことにしよう。

我々は以下の様に議論を進める。第２節では，まず我々のモデルを説明し，パレート最適を定義する。そして，パレート最適の条件との比較によって，各自治体が独自に行動する時この条件を満たさないことが明らかにされる。第３節では，ピグウ流の課税・補助金政策をとりあげ，我々のモデルにおける最適な課税（又は補助金）率を調べることによって課税前の供給量が過大となるのが過少となるのかを検討する。第４節では，ピグウ流の政策下における各自治体の不均衡時の調整行動をモデルに導入することによって動学的安定性を吟味する。その際，相手の自治体の供給量をどの様に予想するかが問題となるが，我々は予想形成の二つのタイプ，(1)静的予想，(2)適応的予想の場合に分けて検討する。第５節では，分析の限界と今後の展望にふれよう。

④これについては，Baumol〔２〕, Baumol-Bradford〔３〕, Inada-Kuga〔６〕, Starrett〔11〕を参照。

2　モ デ ル

まず，互いにスピルオーバー効果を及ぼし合う二つの自治体 α, β を想定しよう。簡単化のために，我々の経済には二財X，Yのみが存在し，そのうちY財がスピルオーバー効果をもつ財だとしよう。α, β のX財の自治体住民への供給量をそれぞれx_α，x_β，Y財の供給量をy_α，y_βとする。X財はスピルオーバー効果をもたないので供給量x_α，x_βそれ自体が自治体内での消費量である。それに対しY財の消費量は相手の自治体からのスピルオーバーをそれぞれy_α，y_βに加えたものに等しい。今，定数k_α，k_β

$$0 < k_i < 1 \qquad i = \alpha,\ \beta \qquad (2-1)$$

をもって一方の自治体から他方の自治体へ及ぼすスピルオーバーの割合だとすると，両自治体で実際に消費されるY財の量z_α，z_βは次のように表される。

$$z_i = y_i + k_j\, y_j \qquad i=\alpha,\ \beta \quad j=\alpha,\ \beta \quad i \neq j \qquad (2-2)$$

この様なスピルオーバー効果をもつ地方公共財の簡便な例は公共サーヴィスとしての蚊の駆除であろう。隣接する二つの自治体間において一方の自治体の蚊の駆除はその便益の一定割合を他方の自治体にも及ぼすであろうと考えられるからである。この様なスピルオーバー効果の設定のもとで両自治体の厚生関数は次の様に表わされる。

$$W^i = W^i(x_i,\ z_i) = W^i(x_i,\ y_i + k_j\, y_j) \qquad i,\ j = \alpha,\ \beta \quad i \neq j \qquad (2-3)$$

なお，我々の分析は全体を通じて部分均衡分析に限られ，X，Y財の市場価格は体系外から所与のものだと考える。

スピルオーバーの問題をこの様に設定すればパレート最適は次の様に定義される。

$$\begin{aligned} &\max\ W^\alpha(x_\alpha,\ z_\alpha) \\ &\quad \text{sub. to} \quad W^\beta(x_\beta,\ z_\beta) - \overline{W}^\beta = 0 \\ &\qquad\qquad\quad x - (x_\alpha + x_\beta) = 0 \qquad\qquad (2-4) \\ &\qquad\qquad\quad y - (y_\alpha + y_\beta) = 0 \\ &\qquad\qquad\quad F(x,\ y) = 0 \end{aligned}$$

但し，x，y はそれぞれX，Y財の経済全体の生産量，$F(x, y) = 0$ は経済全体の生産フロンティアである。形式的には次の様なラグランジアン

$$W^{\alpha} + \gamma_{\beta}(W^{\beta} - \overline{W}^{\beta}) + p_x(x - x_{\alpha} - x_{\beta}) + p_y(y - y_{\alpha} - y_{\beta}) - \delta F(x, y) \qquad (2-5)$$

を x_{α}, x_{β}, y_{α}, y_{β}, x, y について極大化，ラグランジ乗数 γ_{β}，p_x，p_y，δ について極小化する問題である。一階の条件を求めると

$$\gamma_i W^i_x - p_x = 0 \quad i = \alpha, \beta \quad \gamma_{\alpha} = 1 \qquad (2-6)$$

$$\gamma_i W^i_z + \gamma_j k_i W^j_z - p_y = 0 \quad j = \alpha, \beta \quad i \neq j \qquad (2-7)$$

$$p_x - \delta F_x = 0 \qquad (2-8)$$

$$p_y - \delta F_y = 0 \qquad (2-9)$$

$$W^{\beta} - \overline{W}^{\beta} = 0 \qquad (2-10)$$

$$x - x_{\alpha} - x_{\beta} = 0 \qquad (2-11)$$

$$y - y_{\alpha} - y_{\beta} = 0 \qquad (2-12)$$

$$F(x, y) = 0 \qquad (2-13)$$

となる。但し $W^i_x = \partial W^i/\partial x^i$, $W^i_z = \partial W^i/\partial z_i$, $Fx = \partial F/\partial x$, $Fy = \partial F/\partial y$ を表わすものとする。(2−6), (2−7), (2−8), (2−9) からラグランジ乗数 γ_{β}，p_x，p_y，δ を消去することによって

$$\frac{W^{\alpha}_z}{W^{\alpha}_x} + k_{\alpha}\frac{W^{\beta}_z}{W^{\beta}_x} = \frac{W^{\beta}_z}{W^{\beta}_x} + k_{\beta}\frac{W^{\alpha}_z}{W^{\alpha}_x} = \frac{F_y}{F_x} \qquad (2-14)$$

が得られる。これがパレート最適条件である。

次に，各自治体が何等調整を行なわず互いに独立に行動した場合の主体的均衡条件を考えよう。その場合，予算制約はそれぞれの自治体について次の様に示される。

$$p_x x_i + p_y y_i = M_i \qquad i = \alpha, \beta \qquad (2-15)$$

但し，M_{α}, M_{β} はそれぞれ各自治体にとって所与の予算額であり，p_x，p_y はX，Y財の市場価格であって同様に所与である。各自治体はそれぞれ予算制約（2～15）のもとで厚生関数（2−3）を極大化する。

$$\max W^i(x_i, z_i)$$

$$\text{sub. to } M_i - p_x x_i - p_y y_i = 0 \quad i = \alpha, \beta \tag{2-16}$$

つまり，ラグランジアン

$$W^i + \lambda_i (M_i - p_x x_i - p_y y_i) \quad i = \alpha, \beta \tag{2-17}$$

を x_i，y_i について極大化，ラグランジ乗数 λ_i について極小化することになる。⑤ 一階の条件を求めると

$$W^i_x - \lambda_i p_x = 0 \quad i = \alpha, \beta \tag{2-18}$$

$$W^i_z - \lambda_i p_y = 0 \tag{2-19}$$

$$p_x x_i + p_y y_i - M_i = 0 \tag{2-20}$$

となる。（2－16），（2－17）からラグランジ乗数 λ_i を消去することによって

$$\frac{W^\alpha_z}{W^\alpha_x} = \frac{W^\beta_z}{W^\beta_x} = \frac{p_y}{p_x} \tag{2-21}$$

が得られる。

生産の側ではスピルオーバー効果はないものとしたから

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{p_y}{p_x} \tag{2-22}$$

が成り立っている。（2－21）と（2－22）を併せて

$$\frac{W^\alpha_z}{W^\alpha_x} = \frac{W^\beta_z}{W^\beta_x} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{p_y}{p_x} \tag{2-23}$$

となる。これが何等調整を行なわなかった場合の主体的均衡条件である。

以上の議論から，スピルオーバー効果の存在に対し調整を行なわなかった場合の主体的均衡条件（2－23）がパレート最適の条件（2－14）に一般には一致しないことが分る。両者が一致するのは $k_\alpha = k_\beta = 0$ の時つまり，スピルオーバー効果が存在しない時である。

---

⑤ ラグラング乗数 λ_i は，ここでは所得（予算）の限界効用（厚生）を表している。

3　課税・補助金政策

次に，課税・補助金政策によってパレート最適を達成する方策に移ろう。ピグウによって提唱された課税・補助金政策の意味は，外部経済不経済に対して課税又は補助金の賦与を行なうことによりピグウのいわゆる「社会的限界生産物と私的限界生産物の均等をはかる」ことにある。我々のモデルに則してこの意味を考えてみよう。パレート最適条件

$$\frac{W_z^\alpha}{W_x^\alpha}+k_\alpha\frac{W_z^\beta}{W_x^\beta}=\frac{W_z^\beta}{W_x^\beta}+k_\beta\frac{W_z^\alpha}{W_x^\alpha} \qquad (3-1)$$

の両辺はX財のタームで計られたY財の社会的限界生産物を表わしている。それに対し，調整を行なわない場合の主体的均衡条件

$$\frac{W_z^\alpha}{W_x^\alpha}=\frac{W_z^\beta}{W_x^\beta} \qquad (3-2)$$

はX財のタームで測られたY財の私的限界生産物である。従って（3－1）と（3－2）とを一致させるには（3－1）から（3－2）を辺々差し引いたネットの社会的限界生産物　$k_\alpha(W_z^\beta/W_x^\beta)$，$k_\beta(W_z^\beta/W_x^\beta)$ に等しくなる率で課税又は補助金の賦与を行なえばよいのである。

それでは，実際に最適な課税・補助金率を求めてみよう。今，α，β の自治体にそれぞれ s_α，s_β の補助金率がY財の供給量一単位当りについて支払われるものとしよう。もちろん，スピルオーバーの性質が「goods」ではなく「bads」の場合には税が課せられるのだと考えることができる。その時には s_α，s_β を負の値と考えればよいのである。この様な補助金（又は課税）率の賦与によって各自治体のY財の価格はそれぞれ（$p_y - s_\alpha$），（$p_y - s_\beta$）に低下（課税の場合は上昇）することになる。そのことはまた実質所得の点から言えば，両自治体の実質所得が増大（減少）してしまうことを意味する。そこで我々はこの点を修正するために，補助金を与えると同時に各々の自治体の所得（予算額）から適切にある額 D_α, D_β を取りあげることによって両自治体の実質所得を一定に保つ様にするものと想定しよう。[⑥] つまり，両自治

体の予算制約は

$$p_x x_i + (p_y - s_i)\, y_i = \widetilde{M}_i = M_i - D_i \quad i = \alpha,\ \beta \qquad (3-3)$$

となる。但し，$\widetilde{M}_i$ ($i = \alpha,\ \beta$) は各自治体の実質所得を一定に保つように D_i ($i = \alpha,\ \beta$) を差し引いた純予算額である。

この様な状況において，主体的均衡はそれぞれ厚生関数（2－3）を予算制約（3－3）のもとで極大化することによって得られる。

$$\max\ W^i\ (x_i, z_i)$$

$$\text{sub. to}\quad \widetilde{M}_i - p_x x_i - (p_y - s_i)\, y_i = 0$$

つまり，ラグランジアン

$$W^i + \lambda_i \left[\widetilde{M}_i - p_x x_i - (p_y - s_i)\, y_i\right] \qquad i = \alpha,\ \beta \qquad (3-5)$$

を x_i, y_i について極大化，ラグランジ乗数 λ_i について極小化することである。一階の条件を求めると

$$W^i_x - \lambda_i p_x = 0 \qquad i = \alpha,\ \beta \qquad (3-6)$$

$$W^i_z - \lambda_i (p_y - s_i) = 0 \qquad (3-7)$$

$$p_x x_i + (p_y - s_i)\, y_i - \widetilde{M}_i = 0 \qquad (3-8)$$

となる。（3－6），（3－7）から λ を消去すれば

$$\frac{W^i_z}{W^i_x} = \frac{p_y - s_i}{p_x} \qquad i = \alpha,\ \beta \qquad (3-9)$$

がピグー流政策下の主体的均衡条件として求めるから，この（3－9）をパレート最適条件（3－1）に代入して s_i を求めると

$$s_i = \frac{k_i(1 - k_j)}{1 - k_i k_j}\, p_y \qquad i,\ j = \alpha,\ \beta \qquad i \neq j \qquad (3-10)$$

となる。これが最適な補助金（又は課税）率である。s_i はここではY財の量単位当りの率で表わされている。また，$0 < k_i < 1$ という仮定から s_i は p_y を越えないことが分る。

次に，この s_i を通して地方公共財の供給量が過大となるのか過少となるの

---

⑥ 実質所得を一定に保つというのは，ここでは補助金（税）の賦与によって自治体の厚生水準 W^i が変化しないようにすることを意味している。

かという問題を考えてみよう。最適な補助金（又は課税）率を賦与されることによって，賦与以前の状態に較べX財に対するY財の相対価格は低下している。それと同時に，先に想定しておいたように，我々は補助金率（課税率）賦与以前と以後とにおいて両自治体の実質所得が変らない様調整を行なうものとした。この想定によって，我々は相対価格の変化に伴う所得効果を無視することができる。従って，その財自体の代替効果が必ず負となることから，Y財の供給は補助金（税）の賦与によって増大（減少）した，即ち，補助金（税）の賦与以前のY財の供給は過少（過大）であったと結論することができる。⑦

4　動学体系の安定性

前節では，ピグウ流の課税・補助金政策がパレート最適を達成するのに適切な方策であることを静学的に説明した。本節では，我々の政策が実行上有効であるかどうかを究るために，政策下における主体の動学的調整行動を考察することにしよう。

課税・補助金政策下における各自治体のX，Y財についての需要関数（自治体政府が住民に供給したいと考える公共財の数量を示す関数）を求めてみると，これらは主体的均衡条件（3－9）及び予算制約式（3－8）をx_i, y_iについて解くことによって得られるので

$$x_i = x_i \left[p_x, (p_y - s_i), \widetilde{M}_i, y_j \right] \quad i, j = \alpha, \beta \quad i \neq j \qquad (4-1)$$

$$y_i = y_i \left[p_x, (p_y - s_i), \widetilde{M}_i, y_i \right] \qquad (4-2)$$

となる。但し，明らかに予算制約式を考慮すれば（4－1），（4－2）のうちいずれか一方は独立ではないから，我々はx_iかy_iかのいずれかだけを問題とすればよい。y_iについてだけ，つまり（4－2）だけを取り上げること

⑦もし，実質所得を一定に保つ操作を行なわないものとしたら，所得効果の存在のため過大過少の如何は所得効果の方向と大きさとに依存することとなる。従来の論者等の議論が混乱を招いたのは，どの様な所得分配の状況でパレート最適を定義するのかが明確でなかったからである。

にしよう。さて，一般に外部性の存在しない場合の需要関数は価格と所得とのみの関数である。我々の需要関数（4－2）が通常の需要関数と異る点は，スピルオーバー効果（一般には外部性）の存在のため他の主体の変数 y_j が独立変数として含まれてきていることである。従って，自らの需要量の決定は相手からのスピルオーバーの大きさにパラメトリックに依存することとなる。その上に，我々のモデルではスピルオーバー効果が双方的である，つまり α から β へと同時に β から α へも及ぶものと設定されている。このことは，一方的な（unilateral）効果の場合以上にゲーム論的な不安定性をモデルが含むことを意味している。[8] 何故なら，双方的なスピルオーバー効果の場合，両主体が互いに相手の数量に反応しながら行動するからである。

この様な問題を究るために，以下では陽表的に自治体の動学的な調整行動を導入して考察を行なう。さて，もし両自治体間で互いの需要量についての直接的な交渉がもたれないものとすれば，各自治体は互いに相手の y_j について主観的予想値 $y_j{}^e$ を想定し，この値に基いて自らの y_i を主体的均衡値として決定するであろう。（4－2）の y_j を主観的予想値 $y_j{}^e$ に置き換えて

$$y_i = y_i\ [p_x,\ (p_y - s_i),\ \widetilde{M}_i, y_j{}^e] \quad i, j = \alpha,\ \beta \quad i \neq j \qquad (4-3)$$

が主観的予想に基く主体的均衡の y_i である。今，最適な補助金率が与えられたとすると，（3－10）を（4－3）に代入して

$$y_i = y_i\ [p_x,\ (1 - k_i / 1 - k_i k_j) p_y,\ \widetilde{M}_i,\ y_j{}^e] \quad i, j = \alpha, \beta\ i \neq j \qquad (4-4)$$

が得られる。我々の分析は部分均衡分析であるので p_x，p_y は定数であるし，$\widetilde{M}_i = M_i - D_i$ は実質所得を一定に保つ様に外部から与えられるものとした。また k_i, k_j は定数であった。以上のことから（4－4）は $y_j{}^e$ 以外の変数を落として考えることができる。つまり，（4－4）は

$$y_i{}^* = y_i{}^*\ (y_j{}^e) \qquad i, j = \alpha,\ \beta \quad i \neq j \qquad (4-5)$$

と書いてよい。但し，＊は主体的均衡量であることを表わす。特に，$y_i{}^* = y_i{}^e$ $(i = \alpha,\ \beta)$ が満たされた場合の主体的均衡値

---

⑧一方的なスピルオーバー効果の場合には，一方の主体相手の数量如何に拘らず主体的均衡値を選ぶことができるので，通常，安定的と言えるであろう。

$$\hat{y}_i{}^* = y_i{}^*(\hat{y}_i{}^*) \quad i, j = \alpha, \beta \quad i \neq j \qquad (4-6)$$

を課税・補助金政策下の均衡値と呼ぶことにしよう。さてここで，現実値 y_i が主体的均衡値 $y_i{}^*$ に一致しない場合の自治体の調整行動をどの様に考えるのかが問題となる。我々はこれを次の様に設定しよう。現実値が主体的均衡値と乖離した場合に，常に自治体の厚生が増す方向に現実値を調整する，つまり，形式的表現を用いれば

$$y_i = c_i \ (y_i{}^* - y_i) \qquad c_i > 0 \qquad i = \alpha, \beta \qquad (4-7)$$

とするのである。[9] 但し，c_i は調整係数である。この設定は厚生極大化行動をとる自治体については妥当な設定と言えよう。

以上の様な自治体の調整行動に基く課税・補助金政策の動学的安定性を，以下二つの予想形成のケースについて検討しよう。

(1)静的予想の場合

前期の実現値が今期も続くであろうと予想する場合，つまり

$$y_j{}^e = y_j \qquad j = \alpha, \beta \qquad (4-8)$$

となる場合である。この時，（4－7）は

$$\dot{y}_i = c_i \ \{y_i{}^*(y_j) - y_i\} \qquad i, j = \alpha, \beta \quad i \neq j \qquad (4-9)$$

となる。課税・補助金政策下の均衡値（4－6）の近傍で（4－9）をテーラー展開して線型近似を行なえば，行列で表して

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_\alpha \\ \dot{y}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 \\ 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \partial y_\alpha^* / \partial y_\beta \\ \partial y_\beta^* / \partial y_\alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\alpha - \hat{y}_\alpha^* \\ y_\beta - \hat{y}_\beta^* \end{bmatrix} \qquad (4-10)$$

となる。これを簡単に次の様に表しておく。

$$[\dot{\mathbf{y}}] = [\mathrm{C}][\mathrm{Y}][\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}] \qquad (4-11)$$

この線型体系が安定であるためには〔C〕〔Y〕の行列式 $|\mathrm{CY}|$ の値が正となることが必要かつ十分である。[10] つまり

---

⑨この調整行動は，不完全競争下における企業の調整行動モデルのアナロジイである。企業の場合には，限界利潤に基いて調整を行なうが，ここでは限界効用（厚生）に基いて調整するものと考えているのである。この様な不完全競争下の企業の調整行動については，Negishi〔8〕をみよ。

⑩〔C〕〔Y〕はいわゆるヒクシアン行列の二財のケースである。

$$|CY| = c_\alpha c_\beta \left\{ 1 - \left(\frac{\partial y_\alpha^*}{\partial y_\beta} \right) \left(\frac{\partial y_\beta^*}{\partial y_\alpha} \right) \right\} > 0 \tag{4—12}$$

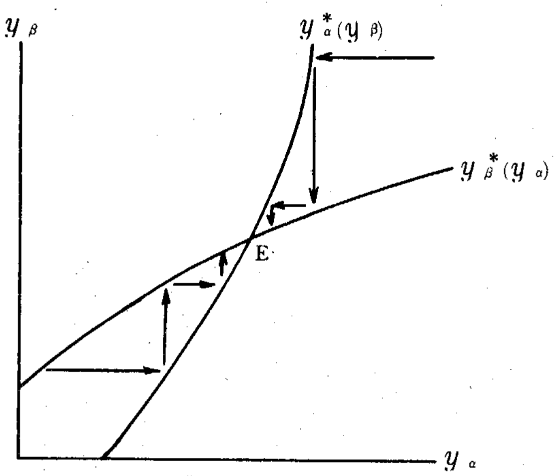
なることである。c_α，$c_\beta > 0$ であるから（4－12）は

$$\left(\frac{\partial y_\alpha^*}{\partial y_\beta} \right) \left(\frac{\partial y_\beta^*}{\partial y_\alpha} \right) < 1 \tag{4—13}$$

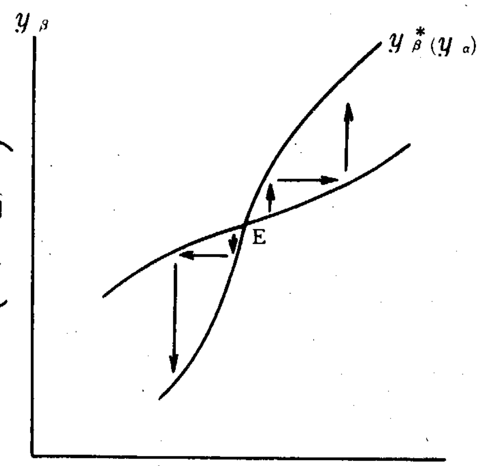
となる。$\partial y_i{}^* / \partial y_j$ は，均衡値の近傍において相手の y_j に対して自分がどのような y_i で反応するかを示す反応関数の傾きを表している。（4－13）が安定条件であることは図1の例からも直観的に明らかであろう。二つの反応曲線 $y_\alpha{}^*(y_\beta)$ 及び $y_\beta{}^*(y_\alpha)$ はいずれも課税補助金政策下の均衡点Eの近傍で傾き $0 < \partial y_i{}^* / \partial y_j < 1$ $(i \neq j)$ をもっており，明らかに安定条件（4－13）を満たしている。

これに対して図2は不安的なケースを描いているが，それはE点の近傍で両方の傾きが1を越えており，従って条件（4－12）を満たしていないからである。一般的に言えば，図1の様に $y_\beta{}^*(y_\alpha)$ が上から $y_\alpha{}^*(y_\beta)$ を切る場合は安定となり，図2の様に下から切る場合は不安定となる。

（図1）



（図2）



これを経済的に考えるため，$\partial y_i{}^* / \partial y_j$ について更に立入った考察を行なおう。これらの偏導関数は，先に述べた様に相手の数量に関して主体的均衡を満たす反応関数の傾きを表している。そこで，主体的均衡を導いた一階の条件（3－6），（3－7），（3－8）の全微分をとってみると，行列で表して

$$\begin{pmatrix} W^i_{xx} & W^i_{xz} & -p_x \\ W^i_{zx} & W^i_{zz} & -Kp_y \\ -p_x & -Kp_y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ d\lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i dp_x - k_j W^i_{xz} dx_j \\ \lambda_i K dp_y - k_j W^i_{zz} dy_j \\ -d\widetilde{M}_i + x_i dp_x + K y_i dp_y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i,j=\alpha.\beta \\ i \neq j \end{matrix} \qquad (4-14)$$

となる。但し，$W^i_{xx} = \partial^2 W^i / \partial x_i{}^2$, $W^i_{xz} = \dfrac{\partial W^i}{\partial x_i \cdot \partial z_i}$, $W^i_{zz} = \partial^2 W^i / \partial z_i{}^2$, $K = (1-k_i)/(1-k_ik_j)$である。$dp_x = 0$, $dy_i = 0$, $d\widetilde{M}_i = 0$とおいて $\partial y_i^* / \partial y_j$ を求めると

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial y_j} = \frac{1}{\triangle_i}\begin{pmatrix} W^i_{xx} & -k_j W^i_{xz} & -p_x \\ W^i_{zx} & -k_j W^i_{zz} & -K p_y \\ -p_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i,j=\alpha,\beta \quad i \neq j \qquad (4-15)$$

が得られる。但し

$$\triangle_i = \begin{pmatrix} W^i_{xx} & W^i_{xz} & -p_x \\ W^i_{zx} & W^i_{zz} & -K p_y \\ -p_x & -K p_y & 0 \end{pmatrix} \quad i=\alpha,\beta \qquad (4-16)$$

である。また，X財に関する所得効果 $\partial x_i^* / \partial M_i$ を求めてみると

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \widetilde{M}_i} = \frac{1}{\triangle_i}\begin{pmatrix} 0 & W^i_{xz} & -p_x \\ 0 & W^i_{zz} & -K p_y \\ -1 & -K p_y & 0 \end{pmatrix} \quad i=\alpha,\beta \qquad (4-17)$$

となるので，(4 −15) は (4 −17) を用いて次の様に表すことができる。

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial y_j} = (-k_j p_x)\cdot\frac{1}{\triangle_i}\begin{pmatrix} W^i_{xx} & W^i_{xz} & -p_x \\ W^i_{zx} & W^i_{zz} & -K p_y \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-k_j p_x)\cdot\frac{1}{\triangle_i}\begin{pmatrix} 0 & W^i_{xz} & -p_x \\ 0 & W^i_{zz} & -K p_y \\ -1 & -K p_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -k_j p_x \frac{\partial x_i^*}{\partial \widetilde{M}_i} \quad i,j=\alpha,\beta \quad j \neq i \qquad (4-18)$$

この結果を (4 −13) に代入すると，安定のための必要十分条件は次の様に

なる。

$$k_\alpha k_\beta\left(p_x\frac{\partial x_\alpha^*}{\partial\widetilde{M}_\alpha}\right)\left(p_x\frac{\partial x_\beta^*}{\partial\widetilde{M}_\beta}\right)<1 \qquad (4-19)$$

ここで，予算制約式（3－8）を全微分してみると，

$$p_x\frac{dx_i^*}{d\widetilde{M}_i}+(p_y-s_i)\frac{dy_i^*}{d\widetilde{M}_i}=1 \qquad i=\alpha,\beta \qquad (4-20)$$

が得られる。さて今，自治体α,βのいずれにとってもX，Y財ともに上級財であると仮定してみると，

$$\frac{dx_i^*}{d\widetilde{M}_i}>0,\ \frac{dy_i^*}{d\widetilde{M}_i}>0 \qquad i=\alpha,\ \beta \qquad (4-21)$$

だから，（4－20）から

$$p_x\frac{dx_i^*}{d\widetilde{M}_i}=1-(p_y-s_i)\frac{dy_i^*}{d\widetilde{M}_i}<1 \qquad i=\alpha,\beta \qquad (4-22)$$

つまり，

$$0<p_x\frac{dx_i^*}{d\widetilde{M}_i}<1 \qquad i=\alpha,\beta \qquad (4-23)$$

であることが分る。（4－23）及び$0<k_i<1$を考慮すれば（4－19）は満たされていることが分る。これによって線型体系（4－10）の安定性が保証された。

我々のモデルにおいてX，Y両財が上級財であるという仮定は経済的に十分意味ある仮定と言えよう。

(2)適応的予想の場合

次に，適応的な予想の場合について考えよう。適応的予想とは，前期の予想誤差に基いて今期の予想を修正する予想形態である。つまり，

$$\dot{y}_j^e=d_j\,(y_j-y_j^e) \qquad d_j>0 \qquad j=\alpha,\beta \qquad (4-24)$$

と表される。但し，d_jは予想の調整係数である。この場合の自治体の調整行動は

$$\dot{y}_i=c_i\ \{y_i^*(y_j^e)-y_i\} \qquad i,j=\alpha,\beta \quad i\neq j \qquad (4-25)$$

となる。静的予想の場合と異る点は，主体的壁衡値 $y_i{}^*$ が実現値 y_j でなく予想値 $y_j{}^e$ の関数だということである。従って，微分方程式体系は次の様になる。

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_\alpha \\ \dot{y}_\beta \\ \dot{y}^e_\beta \\ \dot{y}^e_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha\{y^*_\alpha(y^e_\beta)-y_\alpha\} \\ c_\beta\{y^*_\beta(y^e_\alpha)-y_\beta\} \\ d_\alpha(y_\beta-y^e_\beta) \\ d_\beta(y_\alpha-y^e_\alpha) \end{bmatrix} \qquad (4-26)$$

(4 —26)を課税・補助金政策下の均衡値 $y_i{}^* = y_i{}^e = \hat{y}_i{}^*$ の近傍で線型近似すれば

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_\alpha \\ \dot{y}_\beta \\ \dot{y}^e_\beta \\ \dot{y}^e_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \partial y^*_\alpha/\partial y_\beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \partial y^*_\beta/\partial y_\alpha \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\alpha-\hat{y}^*_\alpha \\ y_\beta-\hat{y}^*_\beta \\ y^e_\beta-\hat{y}^*_\beta \\ y^e_\alpha-\hat{y}^*_\alpha \end{bmatrix} \qquad (4-27)$$

が得られる。これを簡単に

$$[\dot{\mathbf{y}}_a] = [C_a][\mathbf{y}_a][\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{y}}_a] \qquad (4-28)$$

と表しておこう。さて，静的予想の場合と同様の仮定はこの線型体系を安定に導くであろうか。X，Y両財を上級財だと仮定すると

$$0 < p_x \frac{dx^*_i}{d\bar{M}_i} < 1 \qquad i=\alpha,\beta \qquad (4-23)$$

であり，$0 < k_i < 1$ であったから，

$$0 < \frac{\partial y^*_i}{\partial y_j} < 1 \qquad i,j=\alpha,\beta \qquad i \neq j \qquad (4-24)$$

が成り立っていた。この時，$[\mathbf{y}_a]$ はドミナント・ダイアゴナル行列となり，⑪ 従って準負値定符号になる。準負値定符号であればいわゆるD安定となり，⑫ 調整係数の如何に拘らず線型体系（4 —27）は安定になる。

---

⑪ ドミナント・ダイアゴナル行列の安定性については，Mckenzie〔7〕，を参照。
⑫ D安定については，Arrow-mcmanus〔1〕参照。

5 結　　語

以上の議論の中で，我々は，ピグウ流の課税・補助金政策がスピルオーバー効果をもつ地方公共財の配分問題を解決する有効な政策であることを述べた。特に第4節では，政策下における自治体の調整行動を取り扱うことによって，X，Y両財が上級財であるという仮定のもとでは安定的な最適解が得られることを明らかにした。しかも，この仮定は経済的に十分 plausible なものということができる。

しかしなお，我々の設定したフレームワーク内では取り扱わなかったいくつかの問題がある。そこで，我々の分析の限界及び今後の展望としてそれらの点にふれておこう。第一に，我々の分析は部分均衡分析に限られ，X,Y両財の価格は体系内では所与のものと想定した。この想定は第4節で行なった動学的安定性の検討が局所的安定性に限られていたことと無関係ではない。価格不変のもとでは，調整過程における不均衡は均衡の範囲内に収まるものとみてよいからである。だがより一般的には，価格をも内生変数として含む一般均衡論のフレームワークで均衡点の大域的安定性の論議に及ぶ必要があるであろう。第二に，我々のモデルでは二財X，Yのみが存在すると考えた。しかし，より多数の財モデルを用いての分析を目指すならば，すべての財を上級財と考える訳にはゆかないであろうから安定性の議論はより複雑化すると考えられる。第三に，我々は暗黙に政策担当者の全知全能を想定していた。つまり，最適課税・補助金率が前もって政策担当者によって計算されているものと考えたのである。この点は序においても指摘しておいた様に，ピグウ流の政策の実行上の有効性に関る重要な点である。最適な課税・補助金率を政策担当者が知りうるためには，スピルオーバー効果（一般的には外部性）の当事者達の効用関数あるいは生産関数についての情報が得られなければならないのである。そこで，より現実的な分析を行なうためには，不均衡時における政策担当者の行動形式をも特定化して，最適な課税・補助金率を模索してゆくモデルを設定することが考えられる。

〈参考文献〉

(1) Arrow, K. J. and M. Mcmanus, "A Note on Dynamic Stability", Econometrica, July 1958

(2) Baumol, W. J. "External Economies and Second-order Optimality Conditi'ons", A. E. R., June 1964

(3) Brainard, W. C. and F. T. Dolbear, "The Posibility of Oversupply of Local 'Public' Goods : A Critical Note", J. P. E., Feb. 1967

(4) Davis, O. A. and A. B. Whinston, "Externalities, Welfare and the Theory of Games", J. P. E. June 1962

(5) Davis, O. A. and A. B. Whinston ., "On Externalities, Information and Government-Assisted Invisible Hand", Economica, Aug. 1966

(6) Inada, K. and K. Kuga, "Limitations of the 'Coase Theorem' on Liability Rules", The Institute of Social and Economic Research, Osaka University Discussion Paper, 71, 1972

(7) Mckenzie, L. W., "Matrics with Dominant Diagonals and Economic Theory", in Mathematical Methods in Social Sciences, Arrow et, al (ed.) Stanford;Stanford University Press, 1960

(8) Negishi, T.「価格と配分の理論」東洋経済 1965

(9) Pauly, M. V., "Optimality, 'Public' Goods and Local Governments:A General Theoretical Analysis", J. P. E. 1971

(10) Pigou, A. C., "The Economics of Welfare" London Macmillan 1932 (4 th edition)

(11) Starrett, D., "On a Fundamental Non-Convexity in the Theory of Externalities", J. E. T April 1972

(12) Weisbrod, B., "External Benefits of Public Education", Princeton University Industrial – Relations Center. 1964

(13) Williams, A., "Optimal Provision of Public Goods in a System of Local Government", J. P. E. Feb. 1966

なお，欧文雑誌の略字は次のとうりである。

A. E. R.　American Economic Review

J. E. T.　Journal of Economic Theory

J. P. E.　Journal of Political Economy