連結的推移関係行列の性質Ⅱ

橋　本　　　寛

1．はじめに

連結的推移関係についてブール行列を用いて考察をおこない，若干の初等的性質を示している。連結的関係はトーナメントなどの議論において重要な関係であり，このトーナメントの理論においては多くの興味ある連結的関係の性質が知られている。[1) 2) 7)]

連結的推移関係については，すでに前回の論文[4)]において考察をおこなっているが，ここでは前回示した性質を一般化した性質など前回述べなかったいくつかの新しい性質について述べている。とくに本論文では反射的な連結的関係について考察をおこない，この連結性のもとで成立する必要十分条件をはじめ，いくつかの興味ある基本的性質を示している。

2．定　　義

以下において使用する記法や演算等は前回の論文[4)]の定義に従うものとするが，いくつかの記号については再述することにする。本論文で扱うブール行列は原則としてn次の行列であり，その要素は0，1からなっているものとする。一般にブール行列を$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$，$T=[t_{ij}]$，$D=[d_{ij}]$などで示し，とくに単位行列を$I=[\delta_{ij}]$，零行列をO，全要素が1の行列をEで示す。またR^kの(i, j)要素を$r_{ij}^{(k)}$で示し，$R\wedge\overline{R'}$を$\triangle R$で，$R\wedge R'$を$\triangledown R$で表す。

通常 $R \vee R' \vee I = E$ または $R \vee R' = E$ なる行列 R で表現される関係は連結的であるといわれる。いずれも応用上重要であるが，以下においては主として $R \vee R' = E$ なる行列 R で表現される関係すなわち反射的な連結的関係についてブール行列を用いて考察をおこなう。この $R \vee R' = E$ なる行列 R で表現される関係は，強い意味で完全 (strongly complete)[3] といわれることもある。

なお，連結的関係と密接な関連をもつトーナメントは $R \vee R' \vee I = E$ かつ $\nabla R = O$ なる行列 R で表現される有向グラフである。ここで $\nabla R = O$ なる行列 R で表現される関係は非対称 (asymmetric) であるといわれ，$\nabla R \leqq I$ なる R で表現される関係は反対称 (antisymmetric) であるといわれる。[3)7)] したがってトーナメントは非対称の連結的関係に相当する。

3．結　果

まず反射的な連結的関係に関する基本的な性質を述べ，次にこの連結性のもとでの推移性に関する必要十分条件を示す。また $R \vee R' \vee I = E$ で定義される連結性に関しても若干の性質を示す。なお，以下の性質には自明またはよく知られているとおもわれるものも含まれているが，これらは他の性質の証明の都合上，示しておく方が適切と考えられるものである。

〔性質1〕　$R \vee R' = E$ のとき

ある $\ell(\ell = 1, 2, \cdots)$ に対して $R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$ ならば，$R = \overline{R'} \vee I$。

（証明）　$I \leqq R$ だから

$$R \leqq R^2 \leqq \cdots \leqq R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$$

したがって $S = \overline{R'} \vee I$ とおけば $R \leqq S$。

次に $S \leqq R$ を示す。$s_{ij} = 1\,(i \neq j)$ とおけば，$s_{ij} = \overline{r_{ji}} = 1$ だから，$r_{ji} = 0$。したがって $r_{ij} = 1$。また $r_{ii} = 1$ だから $s_{ii} \leqq r_{ii}$。こうして $S \leqq R$。

（証明終）

〔注意1〕　上の性質1において，$R \vee R' = E$ を $R \vee R' \vee I = E$ で

置き換えることはできない。なぜなら，いま

$$R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ ,\qquad \ell=2$$

とおけば，$R\vee R'\vee I=E$，$R^\ell\leqq\overline{R'}\vee I$であるが，$R=\overline{R'}\vee I$とはならないからである。

〔性質２〕　$R\vee R'=E$のとき，
ある$\ell(\ell=1,2,\cdots)$に対して$R^\ell\leqq\overline{R'}\vee I$ならば，$R^\ell=\overline{R'}\vee I$。

（証明）　$S=\overline{R'}\vee I$とおき，$S\leqq R^\ell$となることを示す。$s_{ij}=1$ $(i\neq j)$とおけば，$s_{ij}=\overline{r_{ji}}=1$だから，$r_{ji}=0$。したがって$r_{ij}=1$となり，また$R\vee R'=E$によって$r_{ii}=1$であるから$r_{ij}^{(\ell)}=1$かつ$r_{ii}^{(\ell)}=1$となる。こうして任意の$i$，$j$に対して$s_{ij}\leqq r_{ij}^{(\ell)}$となる。　（証明終）

〔注意２〕　この性質２に関しても，$R\vee R'=E$を$R\vee R'\vee I=E$で置き換えることはできない。例えば

$$R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ ,\qquad \ell=2$$

とおけば，$R\vee R'\vee I=E$，$R^\ell\leqq\overline{R'}\vee I$となるが，$R^\ell=\overline{R'}\vee I$とはなっていない。

なお，この性質２は性質１と類似しているが，性質１の後件が$R=\overline{R'}\vee I$であるのに対して，この性質２のそれは$R^\ell=\overline{R'}\vee I$となっており，$\ell$の有無が異なっている点である。

〔性質３〕　$R\vee R'=E$のとき，
ある$\ell(\ell=2,3,\cdots)$に対して$R^\ell\leqq\overline{R'}\vee I$ならば，$R^2=R$。

（証明）　$I\leqq R$だから$R\leqq R^2\leqq\cdots\leqq R^\ell$となる。一方性質２から$R^\ell=\overline{R'}\vee I$が得られ，また性質１から$R=\overline{R'}\vee I$が得られる。よって$R^2=R$。　（証明終）

〔注意３〕　この性質３において$\ell=1$とすることはできない。なぜな

ら，いま

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}, \quad \ell=1$$

とおけば

$$R'=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}, \quad \overline{R'}\vee I=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$R^2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

であって，$R\vee R'=E$，$R^\ell\leqq\overline{R'}\vee I$ となっているが，$R^2=R$ とはなっていないからである。

この性質3の特別な場合として，次の性質が得られるが，これは文献[4)]の性質17である。

〔性質4〕[4)]　$R\vee R'=E$ のとき，
ある k($k=0, 1, 2, \cdots$) に対して $R^{2+3k}\leqq\overline{R'}\vee I$ ならば，$R^2\leqq R$。

(証明)　性質3による。　(証明終)

〔性質5〕　$R\vee R'=E$ のとき，
ある ℓ($\ell=2, 3, \cdots$) に対して $R^\ell\leqq\overline{R'}\vee I$ ならば，$R^2=\overline{R'}\vee I$。

(証明)　性質3および性質1によって

$$R^2=R=\overline{R'}\vee I$$

(証明終)

なお，この性質5で $\ell=1$ とすることはできない（注意3を見よ）。

〔性質６〕 $R \vee R' = E$ のとき，
ある $\ell\,(\ell=2, 3, \cdots)$ に対して $R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$ ならば，すべての $m\,(m=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{m} = \overline{R'} \vee I$ 。

（証明） 性質５および性質１によって

$$R^2 = R = \overline{R'} \vee I$$

したがって

$$R^m = R = \overline{R'} \vee I$$

（証明終）

〔性質７〕 $R \leqq R^2$ で，ある $\ell\,(\ell=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$ ならば，$\triangledown R \leqq I$ 。

（証明） $r_{ij}=1\,(i \neq j)$ とする。$R \leqq R^2$ によって $r_{ij}^{(\ell)}=1$ 。したがって $r_{ji}=0$ 。ゆえに $r_{ij} \wedge r_{ji}=0$ 。 （証明終）

上記の性質中の $R \leqq R^2$ なるブール行列 R はコンパクトな関係を表現する行列である。[8]

〔性質８〕 $I \leqq R$ で，ある $\ell\,(\ell=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$ ならば，$\triangledown R = I$ 。

（証明） $I \leqq R$ のとき $R \leqq R^2$ 。したがって性質７によって $\triangledown R = I$ 。

（証明終）

〔性質９〕 $R \vee R' = E$ のとき，
ある $\ell\,(\ell=1, 2, \cdots)$ に対して $R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$ ならば，$\triangledown R = I$ 。

（証明） 性質８による。 （証明終）

〔性質10〕 $\triangledown R \leqq I \Longleftrightarrow R \leqq \overline{R'} \vee I$

（証明） (1) $\triangledown R \leqq I$ のとき

$S = \overline{R'} \vee I$ とおく。$r_{ij}=1\,(i \neq j)$ とすれば，$r_{ji}=0$ であるので $s_{ij}=1$ 。また明らかに $s_{ii}=1$ である。よって任意の i ，j に対し $r_{ij} \leqq s_{ij}$ となる。

(2) $R \leqq \overline{R'} \vee I$ のとき

$$R \wedge R' \leqq (\overline{R'} \wedge R') \vee (I \wedge R')$$

したがって

$\bigtriangledown R \leqq I \wedge R' \leqq I$　（証明終）

〔性質11〕　$R^2 \leqq R$ で，$\bigtriangledown R \leqq I$ ならば，すべての ℓ（$\ell = 1, 2, \cdots$）に対して $R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$ 。

（証明）　性質10によって，$\bigtriangledown R \leqq I$ のとき $R \leqq \overline{R'} \vee I$ となる。また $R^2 \leqq R$ によって $R^\ell \leqq R$ であるから

$R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$　（証明終）

すでに，性質3で示したとおり，$R \vee R' = E$ のとき，ある ℓ（$\ell = 2, 3, \cdots$）に対して $R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$ であれば，$R^2 = R$ となる。また性質9によれば $R \vee R' = E$ のとき，ある ℓ（$\ell = 1, 2, \cdots$）に対して $R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$ であれば，$\bigtriangledown R = I$ となる。

なお，上記の性質11の $R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$ を $R^\ell = \overline{R'} \vee I$ とすることはできない。なぜなら $R = O$ とおけば明らかに $R^\ell \neq \overline{R'} \vee I$ となるからである。

〔性質12〕　$R \vee R' = E$ のとき，
$R^2 \leqq R$ かつ $\bigtriangledown R \leqq I$ ならば，すべての ℓ（$\ell = 1, 2, \cdots$）に対して $R^\ell = \overline{R'} \vee I$ 。

（証明）　性質11によって $R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$ となる。したがって性質2によって $R^\ell = \overline{R'} \vee I$ 。　（証明終）

次の性質はほとんど明らかであり，またよく知られているが，以下の性質の証明で使用するので念のため示す。

〔性質13〕　$R^2 \leqq R$，$D \leqq I \Longrightarrow (R \vee D)^2 \leqq R \vee D$

（証明）　$(R \vee D)^2 = R^2 \vee (R \times D) \vee (D \times R) \vee D^2$

$\leqq R \vee R \vee R \vee D = R \vee D$　（証明終）

上記の性質中の D および次の性質中の D はともに対角行列である。

〔性質14〕　$\bigtriangledown R \leqq I$，$D \leqq I$ のとき，

$$R^2 \leqq R \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{D})^2 \leqq R \wedge \overline{D}$$

（証明）　(1)　$R^2 \leqq R$ のとき

$S = R \wedge \overline{D}$ とおく。$s_{ik} \wedge s_{kj} = 1$，$s_{ij} = 0$ とすれば

$s_{ik} = r_{ik} \wedge \overline{d_{ik}} = 1$ から $r_{ik} = 1$，$d_{ik} = 0$

$$s_{kj} = r_{kj} \wedge \overline{d}_{kj} = 1 \text{ から } r_{kj} = 1,\ d_{kj} = 0$$

$$s_{ij} = r_{ij} \wedge \overline{d_{ij}} = 0$$

このとき $r_{ij}=1$ なので $d_{ij}=1$。したがって $i=j$ で $d_{ii}=1$。また

$$r_{ik} \wedge r_{ki} = r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$$

となって，$\nabla R \leqq I$ から $i=k$。よって $d_{ii}=d_{ik}=0$ となるが，これは $d_{ii}=1$ と矛盾する。ゆえに $s_{ij}=1$ でなければならない。

(2) $(R \wedge \overline{D})^2 \leqq R \wedge \overline{D}$ のとき

性質13によって

$$((R \wedge \overline{D}) \vee (R \wedge D))^2 \leqq (R \wedge \overline{D}) \vee (R \wedge D)$$

したがって

$$R^2 \leqq R$$ (証明終)

〔性質15〕 $\nabla R \leqq I$ のとき，

$$R^2 \leqq R \iff (R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$$

(証明) 性質14による。 (証明終)

〔性質16〕 $R \vee R' = E$，$\nabla R \leqq I$ のとき，

$$R^2 \leqq R \iff (R \wedge \overline{I})^n = O$$

(証明) $S = R \wedge \overline{I}$ とおけば

$$S \vee S' \vee I = E,\ \nabla S = O$$

したがって，文献[4)]の性質5によって

$$S^2 \leqq S \iff S^n = O$$

性質15によって

$$R^2 \leqq R \iff S^2 \leqq S$$

したがって

$$R^2 \leqq R \iff S^n = O$$ (証明終)

〔性質17〕 $R \vee R' = E$，$\nabla R \leqq I$ のとき，

$$R^2 \leqq R \iff (R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$$

(証明) $S = R \wedge \overline{I}$ とおけば

$$S \vee S' \vee I = E,\ \nabla S = O$$

文献[4]の性質27によって

$$S^2 \leqq S \iff S^3 \wedge I = O$$

性質15によって

$$R^2 \leqq R \iff S^2 \leqq S$$

したがって

$$R^2 \leqq R \iff (R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$$ （証明終）

〔性質18〕　$R \vee R' = E$，$\nabla R \leqq I$ のとき

$$R^2 \leqq R \iff (\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$$

（証明）　文献[4]の性質25による。　（証明終）

〔性質19〕　$R \vee R' = E$ のとき次の条件は同値である。

(1)　すべての $\ell\,(\ell = 1, 2, \cdots)$ に対して $R^\ell = \overline{R'} \vee I$

(2)　すべての $\ell\,(\ell = 1, 2, \cdots)$ に対して $R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$

(3)　$R^2 = \overline{R'} \vee I$

(4)　$R^2 \leqq \overline{R'} \vee I$

(5)　ある $\ell\,(\ell = 2, 3, \cdots)$ に対して $R^\ell = \overline{R'} \vee I$

(6)　ある $\ell\,(\ell = 2, 3, \cdots)$ に対して $R^\ell \leqq \overline{R'} \vee I$

(7)　$R^2 \leqq R$，$\nabla R \leqq I$

(8)　$(R \wedge \overline{I})^n = O$

(9)　$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$，$\nabla R \leqq I$

(10)　$(\overline{R})^2 \leqq \overline{R}$，$\nabla R \leqq I$

（証明）　(1) $\Longrightarrow$ (2)　自明

(2) $\Longrightarrow$ (3)　性質5による。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　自明

(4) $\Longrightarrow$ (5)　性質5による。

(5) $\Longrightarrow$ (6)　自明

(6) $\Longrightarrow$ (7)　性質3および性質9による。

(7) $\Longrightarrow$ (1)　性質12による。

(7) $\iff$ (8)　性質16によって

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^n = O,\ \nabla R \leqq I$$

ここで$(R \wedge \overline{I})^n = O$のとき$(R \wedge \overline{I}) \wedge (R \wedge \overline{I})' = O$であるので$R \wedge R' \wedge \overline{I} = O$すなわち$\nabla R \leqq I$。したがって

$$R^2 \leqq R,\ \nabla R \leqq I \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^n = O$$

(7) $\Longleftrightarrow$ (9) 性質17による。

(7) $\Longleftrightarrow$ (10) 性質18による。 (証明終)

反射的な連結的関係が推移的でかつ反対称であるとき，これは全順序(linear order)[6]と呼ばれる。すなわち全順序を表現するブール行列Rは次の条件を満足する。

$$I \leqq R$$
$$R \vee R' \vee I = E$$
$$R^2 \leqq R$$
$$\nabla R \leqq I$$

明らかに，この条件はまた次のように述べることもできる。

$R \vee R' = E$

$R^2 \leqq R$ (または $R^2 = R$)

$\nabla R \leqq I$ (または $\nabla R = I$)

したがって上記の性質19は全順序に関する必要十分条件であると考えることができる。

〔性質20〕 すべての$\ell\,(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$に対して，$R^{2\ell+1} \leqq \overline{R'} \vee I$ならば$\nabla R \leqq I$。

(証明) $r_{ij} = 1\,(i \neq j)$とすれば$R^{2\ell+1} \leqq \overline{R'} \vee I$によって$r_{ji}^{(2\ell+1)} = 0$。もし$r_{ji} = 1\,(\ell \neq 0)$ならば$r_{ii}^{(2)} \geqq r_{ij} \wedge r_{ji} = 1$。したがって

$r_{ji}^{(2\ell+1)} \geqq r_{ji} \wedge r_{ii}^{(2\ell)} = 1$

となって矛盾する。ゆえに$r_{ji} = 0$すなわち$\nabla R \leqq I$。 (証明終)

上記の性質20の$\ell = 0$の場合に関しては，すでに性質10で示しているように

$$\nabla R \leqq I \Longleftrightarrow R \leqq \overline{R'} \vee I$$

となる。また性質9で示しているように，$R \vee R' = E$ であれば，$R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$ のとき，$\triangledown R = I$ となる。

〔注意4〕　なお，一般には

$\triangledown R \leqq I$ のとき，すべての ℓ ($\ell = 0, 1, 2, \cdots$) に対して

$R^{2\ell+1} \leqq \overline{R'} \vee I$

とはならない。例えば，いま

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \ell = 1$$

とおけば，$\triangledown R \leqq I$ であるが，

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R^3,$$

$$\overline{R'} \vee I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となって $R^{2\ell+1} \leqq \overline{R'} \vee I$ とはなっていない。

また，上記の性質20の $R^{2\ell+1}$ を R^{ℓ} で置き換えることはできない。この点に関しては以下で示す注意5を参照せよ。

〔性質21〕　(1)　$R \wedge S \leqq T \iff R \leqq \overline{S} \vee T$

(2)　すべての ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots$) に対して，

$R^{\ell} \wedge R' \leqq I \iff R^{\ell} \leqq \overline{R'} \vee I$

(証明)　(1)　$R \wedge S \leqq T \iff R \wedge S \wedge \overline{T} = O$

$$\iff R \wedge (\overline{\overline{S} \vee T}) = O$$

$$\iff R \leqq \overline{S} \vee T$$

(2)　(1)によって明らかである。　(証明終)

この性質21(2)の特別な場合として

$$\nabla R \leqq I \iff R \leqq \overline{R'} \vee I$$

が得られるが，これはすでに示している性質10である。

〔性質22〕　すべてのℓ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して，

$$R^{\ell} \wedge R' = O \iff R^{\ell} \leqq \overline{R'}$$

(証明)　自明

〔性質23〕　すべてのℓ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して，

$$R^{\ell} \wedge R' = O \iff R^{\ell+1} \wedge I = O$$

(証明)　(1)　$R^{\ell} \wedge R' = O$のとき

任意のi，jについて$r_{ij}^{(\ell)} \wedge r_{ji} = 0$だから$r_{ii}^{(\ell+1)} = 0$。

(2)　$R^{\ell+1} \wedge I = O$のとき

$r_{ii}^{(\ell+1)} = 0$だから$r_{ij}^{(\ell)} \wedge r_{ji} = 0$。　(証明終)

〔性質24〕　$\nabla R = O \iff R^2 \wedge I = O$

(証明)　性質23による。　(証明終)

なお，$\nabla R = O$と同値な条件については文献[4]の性質20でも示している。

〔性質25〕　すべてのℓ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して，

$$R^{\ell+1} \wedge I = O \iff R^{\ell} \leqq \overline{R'}$$

(証明)　性質22と性質23による。　(証明終)

〔性質26〕　$R^n = O$のとき，すべてのℓ($\ell=1, 2, \cdots$)に対して$R^{\ell} \leqq \overline{R'}$。

(証明)　性質25による。　(証明終)

もし$R^2 \leqq R$であれば，文献[4]の性質13によって

$$R^n = O \iff \text{ある}\ \ell\ (\ell=1, 2, \cdots)\ \text{に対して}\ R^{\ell} \leqq \overline{R'}$$

となる。

〔性質27〕　$R \vee R' \vee I = E$のとき，

あるℓ($\ell=0, 1, 2, \cdots$)に対して$R^{2\ell+1} \leqq \overline{R'}$ならば，$\nabla R = O$。

(証明)　$R^{2\ell+1} \leqq \overline{R'} \leqq \overline{R'} \vee I$であるから，性質20によって$\nabla R \leqq I$。

また$R^{2\ell+1} \leqq \overline{R'}$によって$r_{ii}^{(2\ell+1)} \leqq \overline{r_{ii}}$だから$r_{ii} = 0$。したがって$\nabla R = O$。

（証明終）

〔注意5〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき，ある $\ell(\ell = 1, 2, \cdots)$ に対して $R^{\ell} \leqq \overline{R'}$ であっても，一般には $\nabla R \leqq I$ とはいえない。例えば

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \ell = 2$$

とおけば，

$$\overline{R'} = \overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$R^{\ell} = R^2 = I$$

であって，$R \vee R' \vee I = E$ かつ $R^{\ell} \leqq \overline{R'}$ となるが，$\nabla R \leqq I$ とはなっていない。

4．まとめ

反射的な連結的関係行列の初等的性質について述べ，とくに主要な結果として，この条件のもとで成立する必要十分条件を示した。反射的な連結的関係の特別な場合として線形順序[6]があるように，反射的な連結的関係は応用上しばしば現われ，また重要であるので，ここで得た結果もそのような場合の議論において有用であろうと考えられる。

連結的関係については前回および今回の論文で述べた性質以外にも数多くの興味ある性質がある。例えば，連結的関係行列の自乗のもつ性質[1][2][5]などがあり，これらについて考察することは興味あることである。また有向グラフの連結性との関連で考察することも今後の課題の一つであるとおもわれる。

文　献

1) Behzad, M., Chartrand, G., and Lesniak-Foster, L.: "Graphs & Digraphs", Wadsworth, California (1979).

2) Bondy, J. A. and Murty, U.S.R.: "Graph Theory with Applications", The Macmillan, London (1976).

3) Fararo, T. J.: "Mathematical Sociology", Robert E. Krieger Publishing Co., New York (1978).

4) 橋本寛："連結的推移関係行列の性質", 山口経済学雑誌, 第34巻第3・4号, pp.387-405 (昭和60年6月).

5) Kemeny, J. G., Snell, J. L., and Thompson, G. L.: "Introduction to Finite Mathematics", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1957) (矢野訳："新しい数学——その方法と応用", 共立出版, 昭和49年3月).

6) Kim, K. H. and Roush, F. W.: "Introduction to Mathematical Consensus Theory", Marcel Dekker, Inc., New York (1980).

7) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

8) Rosenblatt, D.: "On the graphs of finite idempotent Boolean relation matrices," Jour. Res. Nat. Bureau of Standards—B. Math. & Rhysics, Vol. 67B, No. 4, pp. 249-256 (1963).