Vacuously Transitive 関係の一般化

橋本　寛

1．はじめに

与えられたブール行列の自乗が零行列となるとき，その行列は vacuously transitive 関係[2][14]を表現する行列であるといわれる。この特殊な二項関係である vacuously transitive 関係を表現するブール行列の基本的性質については，すでにいくつか報告されている[2][9][14]。ここでは，そのような vacuously transitive 関係行列の一つの一般化としてその行列の自乗が対角行列となるブール行列を取り上げ，この行列の性質について考察をおこなっている。特にそのようなブール行列の基本的な性質，与えられたブール行列の自乗が対角行列となるための条件，さらにこのような条件を満足する行列の存在性や関係の連結性[15]との関連などについて調べている。

本文中で明らかになるように，いくつかの性質に関しては，そのような条件を満たす行列が2次以下のものに限定されてしまうことがあり，このような条件についても議論している。なお，特別な場合として，vacuously transitive 関係行列に関する少数の性質についても述べている。

2．定義

本論文ではブール行列[10]を用いて特殊な二項関係の性質を調べているが，

以下で取り扱うブール行列は0，1の要素からなるn次のブール行列である。このブール行列に関する演算は文献(5)等に従うものとし，主要なものについて繰り返せば次のとおりである。いまブール行列$R=[r_{ij}]$，$S=[s_{ij}]$に対して

$$R\vee S=[r_{ij}\vee s_{ij}]$$
$$R\wedge S=[r_{ij}\wedge s_{ij}]$$
$$R\times S=[(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge s_{nj})]$$
$$\overline{R}=[\overline{r_{ij}}]$$
$$\triangle R=R\wedge\overline{R'}$$

と定める。ここにx，$y\in\{0,\ 1\}$に対し，$x\vee y=\max(x,\ y)$，$x\wedge y=\min(x,\ y)$，$\overline{x}=1-x$とする。また特に全要素が1の行列をEで，単位行列をIで示す。

これらの演算のもとで，$R^2=O$なるブール行列Rはvacuously transitiveあるといわれ[2][14]，このvacuously transitive関係行列の一般化として以下で議論する行列は$R^2\leqq I$を満足するブール行列となる。すなわち，これはその行列の自乗が対角行列となるブール行列と同じである。明らかに，Rがvacuously transitiveすなわち$R^2=O$であれば，$R^2\leqq I$となる。さらに$R^2=I$なるRは対合行列(involutory matrix)[11][12]と呼ばれるが，この行列も$R^2\leqq I$を満足する。

なお，vacuously transitive関係行列Rは$R^2=O$であるから，当然推移的すなわち$R^2\leqq R$となる。しかし，ここでvacuously transitive関係行列の一般化としている行列は$R^2\leqq I$であるので，$R^3\leqq R$とはなるが，一般には$R^2\leqq R$を満足せず推移的とはならない。

3．基本的性質

ここではvacuously transitive関係行列の一つの一般化である$R^2\leqq I$とな

るブール行列 R の性質のうち，基本的なものについて述べる。ここで示す性質にはほとんど自明のものも含まれているが，この $R^2 \leqq I$ なるブール行列 R の性質を整理する意味でそのような自明の性質も掲げている。

〔性質1〕

(1)　$R^2 \leqq T,\ S \leqq R \Longrightarrow S^2 \leqq T$

(2)　$R^2 \leqq I,\ S \leqq R \Longrightarrow S^2 \leqq I$

(証明)

(1)　$S^2 \leqq R^2 \leqq T$

(2)　(1)による。　(証明終)

〔性質2〕

(1)　$R^2 \leqq T,\ S^2 \leqq T,\ R \times S \leqq T,\ S \times R \leqq T$

$$\Longleftrightarrow (R \vee S)^2 \leqq T$$

(2)　$R^2 \leqq I,\ S^2 \leqq I,\ R \times S \leqq I,\ S \times R \leqq I$

$$\Longleftrightarrow (R \vee S)^2 \leqq I$$

(証明)

(1)　(a)　$R^2 \leqq T,\ S^2 \leqq T,\ R \times S \leqq T,\ S \times R \leqq T$ のとき

$$(R \vee S)^2 = (R \vee S) \times (R \vee S)$$

$$= R^2 \vee R \times S \vee S \times R \vee S^2 \leqq T$$

(b)　$(R \vee S)^2 \leqq T$ のとき

$$R^2 \leqq (R \vee S)^2 \leqq T$$

$$S^2 \leqq (R \vee S)^2 \leqq T$$

$$R \times S \leqq (R \vee S) \times (R \vee S) \leqq T$$

$$S \times R \leqq (R \vee S) \times (R \vee S) \leqq T$$

(2)　(1)による。　(証明終)

〔性質3〕

(1)　$R^2 \leqq T,\ S^2 \leqq T,\ R \times S = S \times R \Longrightarrow (R \times S)^2 \leqq T^2$

(2)　$D \leqq I$ のとき

$$R^2 \leqq D,\ S^2 \leqq D,\ R \times S = S \times R \Longrightarrow (R \times S)^2 \leqq D$$

(3)　$R^2 \leqq I$,　$S^2 \leqq I$,　$R \times S = S \times R \Longrightarrow (R \times S)^2 \leqq I$

(証明))

(1)　$(R \times S)^2 = R \times S \times R \times S$

$= R^2 \times S^2 \leqq T \times T = T^2$

(2)　—　(3)　(1)による。　(証明終)

〔性質4〕

(1)　$R^2 \leqq T$,　$R \times R' = R' \times R \Longrightarrow (R \times R')^2 \leqq T \times T'$

(2)　$D \leqq I$のとき

$R^2 \leqq D$,　$R \times R' = R' \times R \Longrightarrow (R \times R')^2 \leqq D$

(3)　$R^2 \leqq I$,　$R \times R' = R' \times R \Longrightarrow (R \times R')^2 \leqq I$

(証明)

(1)　$(R \times R')^2 = R \times R' \times R \times R' = R^2 \times (R')^2 \leqq T \times T'$

(2)　—　(3)　(1)による。　(証明終)

〔性質5〕

(1)　$D \leqq I$のとき

$R^2 \leqq D \Longrightarrow (R \vee D)^2 \leqq R \vee D$

(2)　$R^2 \leqq I \Longrightarrow (R \vee I)^2 = R \vee I$

(証明)

(1)　$(R \vee D)^2 = (R \vee D) \times (R \vee D)$

$= R^2 \vee R \times D \vee D \times R \vee D$

$\leqq R^2 \vee R \times I \vee I \times R \vee D$

$= R \vee D$

(2)　$(R \vee I)^2 = (R \vee I) \times (R \vee I)$

$= R^2 \vee R \vee R \vee I$

$= R \vee I$　(証明終)

〔性質6〕　$R^2 \leqq I$のとき

(1)　$(\triangle R)^2 = O$

(2)　$(R \wedge R')^2 = R^2$

(証明)

(1) 一般に

$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{ki} \wedge \overline{r_{ik}} = 0$

したがって$(\triangle R)^2 \wedge I = O$。ところで$(\triangle R)^2 \leqq R^2 \leqq I$であるから$(\triangle R)^2 = O$。

(2) $S = R \wedge R'$とおく。すなわち$s_{ij} = r_{ij} \wedge r_{ji}$。

$R^2 \leqq I$だから，$r_{ii}^{(2)} = 1$とすれば，あるkに対して$r_{ik} \wedge r_{ki} = 1$となり，

$$s_{ii}^{(2)} \geqq s_{ik} \wedge s_{ki} = (r_{ik} \wedge r_{ki}) \wedge (r_{ki} \wedge r_{ik}) = 1$$

となる。よって$R^2 \leqq (R \wedge R')^2$。一方，明らかに$(R \wedge R')^2 \leqq R^2 \leqq I$。ゆえに$(R \wedge R')^2 = R^2$。 (証明終)

〔性質7〕

$$R^2 \leqq I,\ I \leqq R \iff R = I$$

(証明)

(1) $R^2 \leqq I$, $I \leqq R$のとき

$I \leqq R$から$R \leqq R^2$。また$R^2 \leqq I$であるので$R \leqq I$。よって$R = I$。

(2) $R = I$のとき

明らかに$R^2 \leqq I$, $I \leqq R$。 (証明終)

〔性質8〕

$$R^2 \leqq I,\ R \leqq R^2 \Longrightarrow R^2 = R$$

(証明) $R^2 \leqq I$から$R^3 \leqq R$。また$R \leqq R^2$から$R \leqq R^2 \leqq R^3$。よって$R = R^2 = R^3$。 (証明終)

〔性質9〕

$$R^2 \leqq I,\ R^2 \leqq R \iff R^2 \leqq R \wedge I$$

(証明) 明らかである。

〔性質10〕

$$R^2 \leqq I,\ R^2 \leqq R,\ R' = R \iff R \leqq I$$

(証明)

(1) $R^2 \leqq I$, $R^2 \leqq R$, $R' = R$のとき

まず $R^2 \leqq R$ かつ $R'=R$ のとき $R^2=R$ となること[3]を示す。

$$r_{ii} \geqq r_{ii}^{(2)} \geqq r_{ij} \wedge r_{ji} = r_{ij}$$

$$r_{ij} \geqq r_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \geqq r_{ii} \wedge r_{ij} = r_{ij}$$

こうして $R^2=R$ となり，したがって $R=R^2 \leqq I$。

(2)　$R \leqq I$ のとき

明らかに $R^2 \leqq I$，$R^2 \leqq R$，$R'=R$。　(証明終)

〔性質11〕

$$R^2 \leqq R \wedge I,\ R'=R \Longleftrightarrow R \leqq I$$

(証明)　性質9と性質10による。　(証明終)

〔注意1〕　一般には，

$$R^2 \leqq I,\ R'=R \Longrightarrow R \leqq I$$

とはいえない。例えば

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R^2 \leqq I$，$R'=R$ であるけれども，$R \leqq I$ とはなっていない。

すでに示した性質10および性質11は $R \leqq I$ となる条件を与えているが，ここでさらに与えられた行列 S が $S \leqq I$ すなわち対角行列となる条件について調べる。明らかに $S \leqq I$ であれば，$S^2 \leqq I$ となる。なお，対角行列となるための条件は文献(9)でも与えられている。そこでは $R \wedge \overline{I} = O$ となる条件として示されている。

〔性質12〕　$S \leqq R \wedge R' \vee I$ のとき

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow S \leqq I$

(2)　$R^2 \wedge I = O \Longrightarrow S \leqq I$

(証明)

(1)　$s_{ij}=1$ とおけば $r_{ij} \wedge r_{ji} \vee \delta_{ij}=1$。しかし $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ であるから $i=j$。よって $S \leqq I$。

(2)　(1)による。　(証明終)

〔性質13〕

(1)　$(R\wedge\bar{I})^2\wedge I=O$ のとき

$$S\leqq R\wedge R'\vee I \iff S\leqq I$$

(2)　$R^2\wedge I=O$ のとき

$$S\leqq R\wedge R'\vee I \iff S\leqq I$$

（証明）

(1)　(a)　$S\leqq R\wedge R'\vee I$ のとき

性質12によって $S\leqq I$。

(b)　$S\leqq I$ のとき

明らかに $S\leqq I\leqq R\wedge R'\vee I$。

(2)　(1)による。　（証明終）

〔性質14〕

$$S\vee S'\leqq R\vee I \iff S\leqq R\wedge R'\vee I$$

（証明）

(1)　$S\vee S'\leqq R\vee I$ のとき

明らかに $S\leqq R\vee I$。また $S'\leqq R\vee I$ だから $S\leqq R'\vee I$。よって

$$\begin{aligned} S&\leqq(R\vee I)\wedge(R'\vee I)\\ &=R\wedge R'\vee R\wedge I\vee I\wedge R'\vee I\\ &=R\wedge R'\vee I \end{aligned}$$

(2)　$S\leqq R\wedge R'\vee I$ のとき

明らかに

$$S\leqq R\wedge R'\vee I\leqq R\vee I。$$

また

$$S\leqq R\wedge R'\vee I\leqq R'\vee I。$$

したがって $S'\leqq R\vee I$。ゆえに $S\vee S'\leqq R\vee I$。　（証明終）

〔性質15〕　$S\vee S'\leqq R\vee I$ のとき

(1)　$(R\wedge\bar{I})^2\wedge I=O \Longrightarrow S\leqq I$

(2)　$R^2\wedge I=O \Longrightarrow S\leqq I$

（証明）　性質12と性質14による。　（証明終）

〔性質16〕

(1)　$(R\wedge \overline{I})^2\wedge I=O$ のとき

$S\vee S'\leqq R\vee I \Longleftrightarrow S\leqq I$

(2)　$R^2\wedge I=O$ のとき

$S\vee S'\leqq R\vee I \Longleftrightarrow S\leqq I$

（証明）　性質13と性質14による。　（証明終）

〔性質17〕　$S'=S$，$S\leqq R\vee I$ のとき

(1)　$(R\wedge \overline{I})^2\wedge =O \Longrightarrow S\leqq I$

(2)　$R^2\wedge I=O\Longrightarrow S\leqq I$

（証明）　性質15による。　（証明終）

〔性質18〕

(1)　$(R\wedge \overline{I})^2\wedge I=O$ のとき

$S'=S$，$S\leqq R\vee I\Longleftrightarrow S\leqq I$

(2)　$R^2\wedge I=O$ のとき

$S'=S$，$S\leqq R\vee I \Longleftrightarrow S\leqq I$

（証明）

(1)　(a)　$S'=S$，$S\leqq R\vee I$ のとき

性質17によって $S\leqq I$。

(b)　$S\leqq I$ のとき

明らかに　$S\leqq I\leqq R\vee I$，$S'=S$。　（証明終）

(2)　(1)による。

4．主要な結果

与えられたブール行列 R が $R^2\leqq I$ となるための条件，およびその条件を満足する行列の存在性，また連結性すなわち $R\vee R'\vee I=E$ なる条件との

関係などについて考察をおこなっている。最後に行列の存在性との関連で2次以下の行列についてその性質を調べている。

〔性質19〕

$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$, $((R\wedge\overline{I})^2\vee(\triangle R)^3)\wedge I=O \Longrightarrow ((R\vee\overline{R'})\wedge\overline{I})^2\leqq I$

(証明) $S=((R\vee\overline{R'})\wedge\overline{I})^2$とおく。このとき $s_{ij}=1$, $i\neq j$ と仮定すると矛盾の生じることを示す。いま $s_{ij}=1$ だから，ある k に対して

$$(r_{ik}\vee\overline{r_{ki}})\wedge\overline{\delta_{ik}}\wedge(r_{kj}\vee\overline{r_{jk}})\wedge\overline{\delta_{kj}}=1。$$

これから，明らかに

$$r_{ki}\leqq r_{ik},\quad i\neq k,\quad r_{jk}\leqq r_{kj},\quad k\neq j。$$

ところで$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ によって $r_{ki}=0$, $r_{jk}=0$

でなければならない。したがって$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$ によって $r_{ji}=1$ となり，また$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ から $r_{ij}=0$ となる。さらに$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$ によって $r_{kj}=1$, $r_{ik}=1$ となる。こうして

$$r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}\wedge r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}=1$$

しかし，これは$(\triangle R)^3\wedge I=O$ と矛盾する。ゆえに $S\leqq I$。 (証明終)

次の性質20で示すように，行列Rの次数nが3以上のとき，上の性質19の条件を満足するRは存在しない。したがって上の性質19は実質的には2次以下の行列に関する性質となる。ところで，いまSを2次以下の行列とするとき，以下で示す性質39によって，Sが非反射的すなわち $S\wedge I=O$ であれば一般に $S^2\leqq I$ となる。したがってRが2次以下の行列であれば無条件に$((R\vee\overline{R'})\wedge\overline{I})^2\leqq I$となる。また同じく以下で示される性質43によれば，$n\leqq 2$ のとき$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ なる行列Rは常に推移的すなわち $R^2\leqq R$ となることがわかる。

〔性質20〕 $n\geqq 3$のとき，

$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$かつ$((R\wedge\overline{I})^2\vee(\triangle R)^3)\wedge I=O$

となるRは存在しない。

(証明) $n\geqq 3$ のとき，

$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$ かつ$((R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3)\wedge I=O$

となるRは存在しない[9]。また$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$のときは$R \wedge \overline{I} = \triangle R$となる[5]。したがって，$n \geqq 3$のとき，

$(\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \leqq R \vee I$ かつ $((R \wedge \overline{I})^2 \vee (\triangle R)^3) \wedge I = O$

となるRは存在しない。　(証明終)

〔性質21〕　$n \geqq 3$ かつ $(\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \leqq R \vee I$ のとき

(1)　$((R \wedge \overline{I})^2 \vee (\triangle R)^3) \wedge I \neq O$

(2)　(a)　$((R \wedge \overline{I})^2 \vee (R \wedge \overline{I})^3) \wedge I \neq O$

　(b)　$(R \wedge \overline{I})^6 \wedge I \neq O$

　(c)　$(R \wedge \overline{I})^n \neq O$

(3)　(a)　$(R^2 \vee R^3) \wedge I \neq O$

　(b)　$R^6 \wedge I \neq O$

　(c)　$R^n \neq O$

(証明)

(1)　性質20による。

(2)　(a)　(1)による。

(2)　(b)　—　(3)　(c)　　(2)　(a)による。　(証明終)

〔性質22〕　$n \geqq 3$ かつ $(\overline{R})^2 \leqq R$ のとき

(1)　$((R \wedge \overline{I})^2 \vee (\triangle R)^3) \wedge I \neq O$

(2)　(a)　$((R \wedge \overline{I})^2 \vee (R \wedge \overline{I})^3) \wedge I \neq O$

　(b)　$(R \wedge \overline{I})^6 \wedge I \neq O$

　(c)　$(R \wedge \overline{I})^n \neq O$

(3)　(a)　$(R^2 \vee R^3) \wedge I \neq O$

　(b)　$R^6 \wedge I \neq O$

　(c)　$R^n \neq O$

(証明)　性質21による。　(証明終)

〔例 1〕

$$R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

〔性質23〕 $n\geqq 2$ のとき

$$R\vee R'\vee I=E,\ R^2\leqq I \Longrightarrow R\wedge I=O$$

(証明) $n\geqq 2$ だから $i\neq j$ とする。$R\vee R'\vee I=E$ によって $r_{ij}=1$ または $r_{ji}=1$。いま $r_{ij}=1$ とする。もし $r_{ii}=1$ とすれば $r_{ij}^{(2)}=1$ となって $R^2\leqq I$ と矛盾するので，$r_{ii}=0$。また $r_{ji}=1$ のときも同様に $r_{ii}=0$ が得られる。したがって $R\wedge I=O$ となる。 (証明終)

以下で示す性質26によれば $n\geqq 3$ のとき $R\vee R'\vee I=E$ かつ $R^2\leqq I$ なる R は存在しない。したがって上の性質は結局 2 次の行列に関する性質となる。

〔性質24〕 $R\vee R'\vee I=E$ のとき

$$R^2\leqq I \Longrightarrow (\overline{R})^2=\overline{R}$$

(証明) $n=1$ のときは明らかであるから $n\geqq 2$ とする。いま $r_{ik}=r_{kj}=0$ とおくとき $r_{ij}=0$ となることを示す。

(1) $i=k$ のとき

$r_{ij}=r_{kj}=0$

(2) $k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=0$

(3) $i\neq k,\ k\neq j$ のとき

$R\vee R'\vee I=E$によって $r_{ki}=r_{jk}=1$ となるから $r_{ji}^{(2)}=1$ となる。したがって $i=j$ となり，性質23によって $R\wedge I=O$ だから $r_{ij}=r_{ii}=0$。こうして $(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ となり，また性質23によって $R\wedge I=O$ すなわち $I\leqq\overline{R}$ であるから，$(\overline{R})^2=\overline{R}$となる (証明終)

すでに性質23のところで述べたように，$n\geqq 3$ のとき $R\vee R'\vee I=E$ かつ $R^2\leqq I$ となる R は存在しない。したがって上の性質は実際には $n\leqq 2$ なる R に関する性質となる。なお，$(\overline{R})^2\leqq\overline{R}$ なる R は negatively transitive 関係(1)

(2)(6)(13)を表現するブール行列である。

〔性質25〕　$R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$R^2 = O \Longrightarrow (\overline{R})^2 = \overline{R}$$

（証明）　性質24による。　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

この性質も以下で示す性質27によって実質的には $n \leqq 2$ なる R に関する性質となる。なお，一般には $R \vee R' \vee I = E$ のとき

$$R^n = O \Longrightarrow (\overline{R})^2 = \overline{R}$$

が成立する(4)。したがって，明らかに $R^2 = O$ であれば $R^n = O$ となるから，上の性質25はこれの特別な場合となっている。

〔性質26〕　$n \geqq 3$ のとき，

$$R \vee R' \vee I = E \text{ かつ } R^2 \leqq I$$

となる R は存在しない。

（証明）　$i \neq k \neq j \neq i$ とする。

(1)　$r_{ik} = 1$，$r_{ij} = 1$ のとき

(a)　$r_{kj} = 1$ のとき

$r_{ij}^{(2)} = 1$ となり，$R^2 \leqq I$ と矛盾する。

(b)　$r_{jk} = 1$ のとき

$r_{ik}^{(2)} = 1$ となり，$R^2 \leqq I$ と矛盾する。

(2)　$r_{ik} = 1$，$r_{ji} = 1$ のとき

$r_{jk}^{(2)} = 1$ となり，$R^2 \leqq I$ と矛盾する。

(3)　$r_{ki} = 1$，$r_{ij} = 1$ のとき

$r_{kj}^{(2)} = 1$ となり，$R^2 \leqq I$ と矛盾する。

(4)　$r_{ki} = 1$，$r_{ji} = 1$ のとき

(a)　$r_{kj} = 1$ のとき

$r_{ki}^{(2)} = 1$ となり，$R^2 \leqq I$ と矛盾する。

(b)　$r_{jk} = 1$ のとき

$r_{ji}^{(2)} = 1$ となり，$R^2 \leqq I$ と矛盾する。　　　　　　　　（証明終）

〔性質27〕　$n \geqq 3$ のとき，

$$R \vee R' \vee I = E \text{ かつ } R^2 = O$$

となるRは存在しない。

(証明)　性質26による。 (証明終)

〔性質28〕　$n \geqq 3$ のとき

(1)　$R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow R^2 \wedge \overline{I} \neq O$

(2)　$R^2 \leqq I \Longrightarrow R \vee R' \vee I \neq E$

(証明)　性質26による。 (証明終)

〔性質29〕　$n \geqq 3$ のとき

(1)　$R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow R^2 \neq O$

(2)　$R^2 = O \Longrightarrow R \vee R' \vee I \neq E$

(証明)　性質28による。 (証明終)

なお，上の性質に関連して，$n \geqq 4$ のときは次の性質が知られている。

〔性質30〕[8] $n \geqq 4$ のとき

(1)　$R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow R \wedge R^2 \neq O$

(2)　$R^2 \leqq \overline{R} \Longrightarrow R \vee R' \vee I \neq E$

また，$n \geqq 2$ のときは次の性質が成立するが，これからも関連する性質が得られる。

〔性質31〕[7]　$n \geqq 2$ のとき

$$R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^{n-1} \neq O$$

いま $n \geqq 3$ で$R \vee R' \vee I = E$ とすれば $n-1 \geqq 2$ だから，上の性質31によって$(R \wedge \overline{I})^2 \neq O$ となるから次の性質が得られる。

〔性質32〕　$n \geqq 3$ のとき

(1)　$R \vee R' \vee I = E \Longrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 \neq O$

(2)　$(R \wedge \overline{I})^2 = O \Longrightarrow R \vee R' \vee I \neq E$

明らかにこの性質32からも性質29を導くことができる。

〔性質33〕[9]　$S'=S$, $S^2 \leqq R \vee I$ のとき

$$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow S^2 \leqq I$$

〔性質34〕　$((R \vee R') \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee I$ のとき

(1)　$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow ((R \vee R') \wedge \bar{I})^2 \leqq I$

(2)　$(R \wedge \bar{I})^n = O \Longrightarrow ((R \vee R') \wedge \bar{I})^2 \leqq I$

(証明)

(1)　性質33による。

(2)　(1)による。　(証明終)

なお, $((R \vee R') \wedge \bar{I})^2 \leqq R \vee I$ のとき次の関係が成立する[9]。

$$(R \wedge \bar{I})^2 = O \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O$$
$$\Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^n = O$$

〔性質35〕　$((R \vee R') \wedge \bar{I})^2 \leqq R$ のとき

(1)　$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow ((R \vee R') \wedge \bar{I})^2 \leqq I$

(2)　$(R \wedge \bar{I})^n = O \Longrightarrow ((R \vee R') \wedge \bar{I})^2 \leqq I$

(証明)　性質34による。　(証明終)

〔例2〕

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

〔性質36〕　$(R \vee R')^2 \leqq R \vee I$ のとき

(1)　$R^2 \wedge I = O \Longrightarrow (R \vee R')^2 \leqq I$

(2)　$R^n = O \Longrightarrow (R \vee R')^2 \leqq I$

(証明)　性質34による。　(証明終)

〔例3〕

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

なお，性質34の場合と同様，$(R \vee R')^2 \leqq R \vee I$ のとき次の関係が成立する[9]。

$$R^2 = O \Longleftrightarrow R^2 \wedge I = O$$
$$\Longleftrightarrow R^n = O$$

〔性質37〕　$(R \vee R')^2 \leqq R$ のとき

(1)　$R^2 \wedge I = O \Longrightarrow (R \vee R')^2 \leqq I$

(2)　$R^n = O \Longrightarrow (R \vee R')^2 \leqq I$

（証明）　性質36による。　（証明終）

上記のように，$(R \vee R')^2 \leqq R$ のとき，$R^2 \wedge I = O$ または $R^n = O$ であれば $(R \vee R')^2 \leqq I$ となる。しかし，以下に示す性質38によれば，上の性質37を満足する行列としては，$R = O$ しかないことがわかる。すなわち，一般に

$$(R \vee R')^2 \leqq R,\ R \wedge I = O \Longleftrightarrow R = O$$

となるので[9]，次の関係

$$(R \vee R')^2 \leqq R,\ R^2 \wedge I = O \Longleftrightarrow R = O$$
$$(R \vee R')^2 \leqq R,\ R^n = O \Longleftrightarrow R = O$$

が成立することになる。

〔注意２〕　一般には

$$R^2 = O \Longrightarrow (R \vee R')^2 \leqq I$$

とはならない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば,

$$R \vee R' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$(R\vee R')^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

であって，$R^2=O$ となるけれども，$(R\vee R')^2\leqq I$ とはなっていない。

〔性質38〕 $(R\vee R')^2\leqq R$ のとき，

ある $k\geqq 1$ に対して $R^k\wedge I=O \Longrightarrow R=O$

(証明)　$r_{ij}=1$ とおけば $(R\vee R')^2\leqq R$ によって $r_{ii}=1$。したがって $r_{ii}^{(k)}=1$ となるが，これは $R^k\wedge I=O$ と矛盾する。よって $r_{ij}=0$。

(証明終)

上の $(R\vee R')^2\leqq R$ なる行列 R は興味ある性質を有している。例えば，明らかに $R^2\leqq R$ かつ $R^2\leqq R'$，すなわち $R^2\leqq R\wedge R'$ となるが，すでに報告しているように[9]，

$$(R\vee R')^2\leqq R \Longleftrightarrow R^2=R,\ R'=R$$

が成立する。また次の関係も知られている[9]。

$$R^2\leqq R\wedge R',\ R\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$$

これまでの議論から明らかなように，いくつかの条件のもとでは，そのような条件を満足する3次以上の行列は存在しない。したがって，存在する行列は2次以下のものに限定されることになる。それゆえ，以下では特に2次以下の行列の性質について考察をおこなうことにする。

〔性質39〕 $n\leqq 2$ のとき

$$R\wedge I=O \Longrightarrow R^2\leqq I$$

(証明)　$n=1$ のときは明らかであるから $n=2$ とする。いま $r_{ik}\wedge r_{kj}=1$ とおく。このとき $R\wedge I=O$ だから $i\neq k$，$k\neq j$。$n=2$ なので $i=j$。ゆえに $R^2\leqq I$。

(証明終)

すでに性質23で示したように，$n=2$ のとき

$R \vee R' \vee I = E$, $R^2 \leqq I \Longrightarrow R \wedge I = O$

となる。したがって，この性質と性質39によって次の性質が得られる。

〔性質40〕 $n=2$ かつ $R \vee R' \vee I = E$ のとき

$R^2 \leqq I \Longleftrightarrow R \wedge I = O$

〔性質41〕 $n \leqq 2$ のとき

$(R \wedge \bar{I})^2 \leqq I$

（証明） $n=1$ のときは明らかであるから $n=2$ とする。いま

$r_{ik} \wedge \bar{\delta}_{ik} \wedge r_{kj} \wedge \bar{\delta}_{kj} = 1$

とおけば $i \neq k$, $k \neq j$ である。ここで $n=2$ であるから $i=j$。よって $(R \wedge \bar{I})^2 \leqq I$。　（証明終）

〔性質42〕 $n \leqq 2$ のとき

$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 = O$

（証明） 一般に，S を2次以下の行列とすれば

$S^2 \wedge I = O \Longleftrightarrow S^2 = O$

となる(9)。したがって $S = R \wedge \bar{I}$ とおけば

$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O \Longleftrightarrow (R \wedge \bar{I})^2 = O$　（証明終）

〔性質43〕 $n \leqq 2$ のとき

(1) $(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(2) $(R \wedge \bar{I})^2 = O \Longrightarrow R^2 \leqq R$

（証明）

(1) $r_{ik} = r_{kj} = 1$ とおき，$r_{ij} = 1$ となることを示す。

(a) $i=k$ のとき

$r_{ij} = r_{kj} = 1$

(b) $k=j$ のとき

$r_{ij} = r_{ik} = 1$

(c) $i \neq k$, $k \neq j$, $i=j$ のとき

$(R \wedge \bar{I})^2 \wedge I = O$ によってこの場合はありえない。

(2) (1)による。　（証明終）

5．まとめ

すでに報告している vacuously transitive 関係行列の性質[9]をもとにして，この $R^2=O$ なる関係行列 R を一般化した $R^2\leqq I$ なるブール行列 R すなわちその自乗が対角行列となる行列 R の性質について考察をおこない，与えられた R が $R^2\leqq I$ となるための条件や，一定の条件を満たす行列の存在性，また連結性に関するいくつかの性質を示した。特に，見掛けの上で一般の n 次行列に対して成立する性質が，実際にはそこに含まれる条件によって該当する行列が限定され，結局2次以下の行列に関する性質となってしまう場合などについても考察をおこなった。なお，関係の連結性は良く知られているようにトーナメントや順序などの議論において重要である。

今後の課題として $R^2\leqq I$ なる行列 R の分解すなわち R の構造について考えることは興味ある問題と思われる。この場合，グラフ理論的考察が有用であると考えられる。また $R^2\leqq I$ の特別な場合である $R^2=I$ を満足する行列 R や $R^2=O$ の他の一般化である $(R\wedge\bar{I})^2=O$ を満足する行列 R についてそれらの性質を調べることも今後やるべきことの一つであると考えられる。

文　献

(1) Fishburn, P. C.: “The Theory of Social Choice,”Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973).

(2) Golumbic, M. C.: “Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs,” Academic Press, New York (1980).

(3) 橋本　寛：〝羃等ブール行列と推移的簡約〟，電子通信学会研究会資料ＡＬ80-70 (1981年１月)。

(4) 橋本　寛：〝連結的推移関係行列の性質〟，山口経済学雑誌，第34巻３・４号，pp. 387-405（昭和60年６月)。

(5) 橋本　寛：〝推移関係行列に関するいくつかの十分条件〟，山口経済学雑誌，第35巻５・６号，pp. 425-436（昭和61年５月)。

(6) 橋本　寛：〝Negatively Transitive 関係の性質〟，山口経済学雑誌，第36巻１・２号，pp. 41-58（昭和61年９月)。

(7) 橋本　寛：〝連結的関係に関する若干の性質〟，山口経済学雑誌，第36巻5・6号，pp. 245-261（昭和62年5月)。

(8) 橋本　寛：〝連結性のもとでの関係行列の性質〟，山口経済学雑誌，第37巻1・2号，pp. 75-88（昭和62年9月)。

(9) 橋本　寛：〝Vacuously Transitive 関係の性質〟，山口経済学雑誌，第37巻3・4号，pp. 399-426（昭和63年3月)。

(10) Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).

(11) Lancaster, P. and M. Tismenetsky: "The Theory of Matrices (2nd ed.)", Academic Press, New York (1985).

(12) Rao, C. R. and S. K. Mitra: "Generalized Inverse of Matrices and its Applications", John Wiley & Sons, New York (1971)（渋谷・田辺訳：〝一般逆行列とその応用〟，東京図書，1973年)。

(13) Roberts, F. S.: "Discrete Mathematical Models, With Applications to Social, Biological, and Environmental Problems", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

(14) Sharp, H., Jr.: "Enumeration of vacuously transitive relations", Discrete Mathematics 4, pp. 185-196 (1973).

(15) Tarski, A.: "Introduction to Logic", Oxford University Press, New York (1965).