最適制御理論の現状と課題

南　　正　義

1.　Pontryagin の最大原理までの最適制御理論

質点あるいは物体をある状態から他の状態へ最短時間で移すには，どのように操作したらよいかとか,最小のエネルギーまたは燃料を使って移すには,どんな制御（control）を行ったらよいだろうかという問題について，最小性（または最大性)を強調してその問題の解析を行うのが最適制御理論である。

最適制御問題は，次の三つの部分から構成されはじめて意味をもつ。第一は系(systen)を指定すること；第二は危険，損失あるいは効率などの制御基準(control criterion)を指定すること；第三は許容され得る制御(admissible control)のクラスを指定することから構成される。そして最適制御に関して追求されるべき主な問題は

(1)　制御可能性

(2)　最適制御の存在性

(3)　最適制御の一意性

(4)　最適制御の構成法

である。

最近，最適制御過程の数学的理論が著しく発展して来ているが，特にその中で最適制御のための必要条件と最適制御の存在性に力点をおいて，その歴史的発展経過を述べながら，現状と課題をまとめてみることにしよう。

最適制御問題の原形は最短経路問題にみられる。最短経路問題については

古くから変分法が用いられて来た。古曲的な Lagrange の変分問題，更にはそれを少し一般化した Bolza の変分問題はいずれも運動方程式が常微分方程式によって表わされ，かつ制御域Uが開集合である。この古典的な変分問題を解くための必要条件としてはよく知られた Lagrange の乗数法，更には Weierstrass の基準があるが，これらは制御域Uが開集合であるために，制御域Uが有界閉集合でかつ最適解がUの境界上の点を取ることが多い実際的な問題の解法には使えない。この古典的な変分問題を制御域Uが任意の集合でもよい場合に拡張したのが，一つは Bellman [2] のダイナミック・プログラミング（動的計画法，略称D.P.）と呼ばれる解析法であり，他方は Pontryagin の最大原理(Maximum Principle) [6] による解析法であった。

最近の最適制御理論は最短時間制御問題の考察に始まって急速に発展してきた。その発展経過をたどってみると，まずアメリカで最初に "Bang-Bang" Principle としてまとめられた Bellman, Glicksberg, Gross らの論文 [1] がある（1956年）。それは

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + u,\ x(0) = x_0$$

なる系について，x がn次元ベクトル，u がn次元制御ベクトルで，A がn次の実定数行列であり，かつ固有値はすべて負の実数であり，制御拘束条件が $|u^i| \leqq 1$ $(i=1, \cdots, n)$（ただし，u^i はベクトル u の第i成分）なる場合の最短時間制御問題に対しては，最適制御は $|u^i|=1$ をとり，切り換えはせいぜい（n－1）回であることを示した。このことから制御拘束条件のもとで系をある状態から他の状態へと最短時間で移そうとすれば，すべての時間，この制御拘束条件の最大または最小の値，すなわち制御域Uの境界上の点を適当に取ることによってこれがなされるであろうという直観的な仮定がなされた。この仮定が Bang-Bang Principle と呼ばれるものである。

1959年になり，LaSalle [23]，[24] は [1] の問題を更に発展させて

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t),\quad |u^i| \leqq 1$$

（ただし，x はn次元ベクトル，$u=(u^1, \cdots, u^r)$ はr次元制御ベクトル，$A(t)$ はn×n行列，$B(t)$ はn×r行列，f はn次元ベクトル）なる系の

最短時間追跡問題について Bang-Bang Principle を確立した。

一方，ソ連でも，最適制御問題は最短時間制御の下に発足した。1952〜55年には，もっぱら Feldbaum の位相面解析や Lerner の等時線解析の研究があったが，1956年，Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze らの研究［3］の結果，線形最短時間制御問題についての一般的原理が求められた。この時期は Bellman らによる前述の論文の出た後であった。この原理は最大原理と呼ばれるが，特に Boltyanskii［4］はこの最大原理が最短時間最適についての必要条件であることを示し，Gamkrelidze は最適制御の存在性と一意性の定理，最適制御の切り換え数有限の定理を証明し，更に任意の汎関数を最適化する問題に拡張した（1958年）。

1959年になって L. S. Pontryangin らの研究［5］，［6］により，一般的な非線形最適制御問題の場合の最大原理が集大成された。これは応用範囲が拡く，現在では最適制御理論の基本定理の一つになっている。

2.　Pontryagin の最大原理

制御対象が n 次元の相空間 (phase saace) X の相点 (phase point) $x=(x^1,\cdots,x^n)$ によって記述されて，その運動方程式は微分方程式系

$$(1)\quad \frac{dx^i}{dt}=f^i(x^1,\cdots,x^n,u^1,\cdots,u^r),\quad i=1,\cdots,n$$

によって表わされるものとする。ここに，$u=(u^1,\cdots,u^r)$は r 次元の制御ベクトルとし，制御域 U は r 次元ユークリッド空間 E^r の任意の部分集合とする。更に

$$f^i(x,u) \text{ および } \frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^j},\quad i,j,=1,\cdots,n$$

は直積空間 $X\times\bar{U}$ において定義されてかつ連続であると仮定する。ただし，$\bar{U}$ は E^r における U の閉包 (closure) とする。

$u(t)=u\epsilon U$ を満足する任意の時間区間上で定義された有界可測（bounded and measurable)な関数 $u(t)=(u^1(t),\cdots,u^r(t))$ の全体を許容制御のクラスとして指定すると，固定端点をもつ最適制御問題は次のように定式化される。

x_0 および x_1 を相空間 X において与えられた二点とするとき，相点を状態 x_0 から状態 x_1 へ移すようなすべての許容制御 $u=u(t)$ の中から，汎関数

(2)　$J=J[u]=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),\ u(t))dt$

を最小にする制御 $u(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$ を選択せよ。

ここに, $x(t)$ は制御 $u(t), t_0 \leqq t \leqq t_1$ に対応する初期条件 $x(t_0)=x_0$ および最終条件 $x(t_1)=x_1$ を満足する微分方程式(1)の解である。更に与えられたスカラーの関数 $f_0(x, u)$ は関数 $f^i(x, u)$, $i=1\cdots$, n と同様の条件を満足するものと仮定する。

上記の最適制御問題の解を与える許容制御 $u(t)$ のことを，相点を x_0 から x_1 へ移す最適制御（optimal control）といい，これに対応する軌道 $x(t)$ を最適軌道 (optimal trajectory) という。

いま，(n＋1) 次元ユークリッド空間 E^{n+1} の共役ベクトル $\psi=(\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_n)$, 更にはハミルトニヤンと呼ばれるスカラーの関数

(3)　$H(\psi, x, u)=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f^\alpha(x, u)$

を導入する。

この関数 H を使用して，最適制御および対応する最適軌道が満足するための一つの必要条件を与える次の基本定理を Pontryagin の最大原理という。

［定理（最大原理）］

$u(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$ が最適制御, $x(t)$ が対応する最適軌道とするならば，$u(t)$ および $x(t)$ に対応する微分方程式系

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \dfrac{\partial f^{\alpha}(x(t), u(t))}{\partial x^i}\psi_{\alpha},\ i=1, \cdots, n \\ \dfrac{d\psi_0}{dt} = 0 \end{cases}$$

のある絶対連続な解$\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \cdots, \psi_n(t)) \neq 0$ が存在して

$$(5)\quad H(\psi(t), x(t), u(t)) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u)$$

が閉区間 $t_0 \leqq t \leqq t_1$ においてほとんど至るところで成り立つ。

更に閉区間 $t_0 \leqq t \leqq t_1$ において

$$(6)\quad \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) \equiv 0 \text{ および } \psi_0(t) \equiv \text{定数} \leqq 0$$

が成り立つ。

（最大原理についての注意）

1）定理における許容制御のクラスを特に区分的連続な制御のクラスに限定することは実際の最適制御過程に応用されるとき，非常に有益である。この場合，最大条件(5)は閉区間 $[t_0, t_1]$ 上の任意の時間において成り立つという条件に置き代わる。

2)上記では微分方程式の右辺に t が陽に含まない場合を考えたが, t を陽に含む場合にもこの原理は拡張される。

3）また上記では固定端点の場合を考えたが，動端点の場合，更には相空間が制限された場合にも拡張される。（［6］，［36］）

L. S. Pontryagin らはこの最大原理を古典的でない変分法による幾何学的な考察から証明を完成したが, これに対して L. I. Rozonoer は［32］で評価関数が殆んどの問題の場合に $S = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_1)$（$t_1$ は固定または自由の最終時間, c_i, $i = 1, \cdots, n$ は定数）の形に書けることを指摘して L. S. Pontryagin らの証明法とは異なる古典的な変分法の流れに沿って解析学的な方法で証明しており，更に新しい事実を得ている。

自由端点をもつ最適制御問題に関しては，補助変数 $\psi(t)$ の境界条件は $\psi(t_1) = -\mathbf{c}$, ただし，$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$ でよいことを指摘し，また動端点をもつ最適制御問題に対する境界条件も明示している。更に L. I. Rozonoer は［32］においてPontryagin の最大原理と Bellman の D. P. と間に密接な関係があることを示した。

また，1962～63年になるとアメリカのRoxin［34］，オランダのHalkin（［16］，［17］，［18］）の理論があるが，これらは Pontryagin, Bellman, Rozonoer らの方法とは違って，到達可能領域（Reachable zone）の性質に観点をおいて解析して，Pontryagin の最大原理を証明している。

3. その後の発展

Pontryagin の最大原理は常微分方程式系で記述される最適制御過程に対して成り立ったのであるが，その後の経過は一つの流れとして，他の系に対しても最大原理が果たして成り立つのか，もし成り立つとしたら，統一的にまとめられないものかといった問題を解決しょうとして発展してきているように思われる。

まず時間遅れをもつ差分微分方程式系で記述される最適制御過程に対して，ソ連の G. L. Kharatishvili［6］は1961年に最大原理が成り立つことを示した。またソ連の Butkovskii［7］，［8］は1961年にある種の積分方程式系で記述される最適制御過程に対して最大原理が成り立つことを示した。

ソ連の A. I. Egorov［12］は1963年に仮似線形双曲型偏微分方程式系によって記述される過程の最適制御問題を解析して，最適になるための必要条件としての最大原理が Rozonoer［32］の解析学的な方法によって導かれることを示し，特に過程が線形方程式系によって記述されるときには，最大原理が必要かつ十分条件になっていることを示した。また A. I. Egorov［13］は1966年にも他のある種の偏微分方程式系によって記述される最適制御過

程に対して最大原理が成り立つことを示した。

ソ連の Ju. V. Egorov [14] は1964年に偏微分方程式系などの分布定数系の最適制御理論をバナッハ空間における最適制御理論として数学的に精密な議論を展開し，有限次元状態空間における Ponttryagin の最大原理を無限次元のバナッハ空間に拡張した。

また確率微分方程式系で記述される場合の最適制御過程に対して，アメリカの H. J. Kushner [19]，[20] は1965年に固定時間をもつ場合に，更には最終時刻が指定されない場合にも最大原理がやはり成立することを Rozonoer の解析学的な方法によって示した。

最近，アメリカの L. W. Neustadt [25]，[26]，[27] は1966～67年に最適制御問題へ応用することを目的にした非線形計画問題を線形位相空間で考えて，Pontryagin の最大原理の本質が凸集合の分離定理にあることを見抜いて抽象的な変分理論を統一的に集大成して，その応用として有限次元空間における Pontryagin の最大原理が制限された相空間の場合も含めた殆んどすべての最適制御問題の場合に導かれることを示している。

1972年に H. J. Kushner [22] は [19]，[20] で取り扱った系よりも一般的な確率微分方程式系で記述される最適制御過程に対して最大原理が成り立つことを，L. W. Neustadt の抽象的な変分理論を応用して導いている。

さて Pontryagin の最大原理はもし最適制御が存在するならば成立するという必要条件であったが，次に提起される問題は最適制御の存在性である。

微分方程式 $\dot{x}=f(t, x, u)$ に関する最適制御問題の最適制御の存在性について最初に述べたのは A. F. Fillipov [15] である。その後1962年に E. Roxin [33] は一般的にいって，制御変数 u の許容範囲を U とし，$u \in$ U のすべてから得られる $f(t, x, u)$ の集合を $f(t, x, \mathrm{U})$ とすると，$f(t, x, \mathrm{U})$ が凸集合であれば，最適制御が存在することを最短時間制御問題の場合に証明した。その他，ポーランドの C. Olech の論文 [29]，[30]，更にはイタリアの L. Cesari の論文〔9〕，〔10〕，〔11〕があるが，これらは一般の最適制御問題の場合に拡張して，E. Roxin の結果の十分条件より更にゆるめた条

件で最適制御の存在性がいえることを示した。

時間遅れをもつ差分微分方程式系で記述される最適制御問題の最適制御の存在性については M. N. Oguztöreli の結果 [28] があり，これは E. Roxin の証明法に類似している。

また確率微分方程式系で記述される最適制御問題の最適制御の存在性については，H. J. Kushner の結果 [21] があり，これも E. Roxin の証明法に類似している。

その他，最近では菊池紀夫の論文 [35] があるが，彼は制御系方程式を contingent equation とみなして非線形最短時間制御問題の場合に，最適制御の存在性，更には Pontryagin の最大原理と Ban-Bang Principle が成立することを contingent equation の解の性質から統一的に考察している。

4． 今後の課題

今後の課題として，次のような課題が残されているように思われる。

1）最適制御の構成法としての数値解法を求める課題が残されている。特に最大原理による最適制御の構成法が得られないか。

2）Bang-Bang Principle がどれくらい一般に成立するか。

3）最適制御の存在性についての統一的理論が得られないか。

4）最適制御の一意性がいかなる条件のもとでいえるか。

5）非線形系に対して制御可能性を調べる課題が残されている。

6）最大原理と D. P. 法との間の関係を数学的に厳密に調べる課題が残されている。特に Pontryagin の最大原理と R. Bellman がダイナミック・プログラミングの解析に用いた最大変換 (maximum transform) との間の関係については最近アメリカの R. T. Rockafellar [31] が手がけているが，まだ完全に解決していないので数学的観点からの課題が残されている。

7）最適制御理論を工学，経済学，経営学などにいかに応用すべきか。

参考文献

〔1〕Bellman, R. E., Glicksberg, I., and Gross, O. A., "On the 'Bang-Bang' Control Problem", Quarterly Appl. Math., Vol. 14, No, 1, April 1956, pp. 11～18.

〔2〕Bellman, R. E., "Dynamic programming", Princeton Univeristy Press, Princeton, New Jersey, 1957.

〔3〕Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., and Pontryagin, L. S., "On the Theory of Optimal Processes", Doklady Akad. Nauk SSSR, Vol. 110, 1956, PP. 7～10.

〔4〕Boltyanskii, V. G., "The Maximum Priciple in the Theory of Optimal Processes", Doklady Akad. Nauk SSSR, Vol, 119, 1958, PP. 1070～1073.

〔5〕Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko, E. F., and Pontryagin, L. S., "The Maximan Principle in the Theory of Optimal Processes", Proc. First Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC), Moscow, 1960, PP. 454～459.

〔6〕Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko, E. F., and Pontryagin, L. S., "The Mathematical Theory of Optimal Processes", John Wiley & Sons, New York, English Translation from the Russian, Transtor : K. N. Trirogoff, Editor : L. W. Newstadt, 1962.

〔7〕Butkovskii, A. G., "Optimal Processes in Systems with Distributed Parameters", Avtomatika i Telemekhanika, Vol. 22, No. 1, 1961, PP. 17～26.

〔8〕Butkovskii, A. G., "The Maximum Principle for Optimum Systems with Distributed Parameters", Avtomatika i Telemekhanika, Vol. 10, 1961, pp. 1288～1301.

〔9〕Cesari, L., "An Existence Theorem in Problems of Optimal Control", SIAM. J. Control, Vol. 3, No. 1, 1965, PP. 7～22.

〔10〕Cesari, L., "Existence Theorems for Weak and Usual Optimal Solutions in Lagrange Broblems with Unilateral Constraints", I. PP. 369～412 & II. PP. 413 ～ 430, Trans. Ameri. Math. Society, Vol. 124, 1966.

〔11〕Cesari, L., "Existence Theorems for Multidimensional Lagrange Problems", J. Optimization Theory and Applications, Vol. 1, No. 2, 1967, pp. 87 ～ 112.

〔12〕Egorov, A. I., "On Optimal Control of Processes in Distributed Objects", PMM (J. Applied Mathematics and Mechanics), Vol. 27, No. 4, 1963, pp. 1045 ～ 1058.

〔13〕Egorov, A. I., "Optimal Processes in Distubuted Parameter Systems and Certain Problems in Invariance Theory", SIAM. J. Control, Vol. 4, No. 4, 1966, pp. 601 ～ 661.

〔14〕Egorov, Ju. V., "Necessary Conditions for the Optimality of Control in Banach Spaces", Mat. Sb. (N. S.), Vol. 64, 1964, pp. 79 ～ 101, American Mathematical Society Translations, Series 2, Vol. 49, 1966.

〔15〕Filippov, A. F., "On Certain Questions in the Theory of Optimal Control", SIAM. J. Control, Vol. 1, No, 1, 1962, pp. 76 ～84.

〔16〕Halkin, H., "Liapounov's Theorem on the Range of a Vector Measure and Pontryagin's Maximum Principle", Arc. Rational Mech. Anal., Vol. 10., 1962, pp. 296～304.

〔17〕Halkin, H., "The Principle of Optimal Evolution", International Symposium on "Non-linear Differential Equations and Non-linear Mechanics", 1963, pp. 284 ～ 302.

〔18〕Halkin, H., "Topological Aspects of Optimal Control of Dynamical Polysystems", Contributions to Differential Equations, 1963, pp. 377 ～ 385.

〔19〕 Kushner, H. J., "On the Stochastic Maximum Principle, Fixed Time of Control" , J. Math. Anal. Appl., Vol. 11, No. 1 ~ No. 3, 1965, pp. 78 ~ 92.
〔20〕 Kushner, H. J., "On the Stochastic Maximum Principle with 'Average' Constraints" , J. Math. Anal. Appl, Vol. 12, 1965, pp. 13 ~ 26.
〔21〕 Kushner, H. J., "On the Existence of Optimal Stochastic Controls" , SIAM. J. Control, Vol. 3, 1965, pp. 464 ~ 474.
〔22〕 Kushner, H. J., "Necessary Conditions for Continuous Parameter Stochastic Optimization Problems" , SIAM. J. Control, Vol. 10, No, 3, 1972, pp. 550 ~ 565.
〔23〕 LaSalle, J. P., "The Time Optimal Control Problem" , contributions to the Theory of Non-linear Oscillations, Vol. 5, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960, pp. 1 ~ 24.
〔24〕 LaSalle, J. P., "The 'Bang-Bang' Principle" , Proc. First Congrfss of the International Federation of Automatic Control (IFAC), Moscow, 1960, pp. 493 ~ 497.
〔25〕 Neustadt, L. W., "An Abstract Variational Theory with Applications to a Broad Class of Optimization Problems, I. General Theory" , SIAM. J. Control, Vol. 4, No. 3, 1966, pp. 505 ~ 527.
〔26〕 Neustadt, L. W., "An Abstract Variational Theory with Applications to a Broad Class of Optimization Probrems, II. Application" , SIAM. J. Control, Vol. 5, No. 1, 1967, pp. 90 ~ 137.
〔27〕 Neustadt, L. W., "A General Theory of Extremals" , J. Computer and System Sciences, Vol. 3, 1969, pp. 57 ~ 92.
〔28〕 Oguztöreli, M. N., "Time-lag Control Systems" , Academic Press, New York, 1966.
〔29〕 Olech, C., "Extremal Solutions of a Control System" , J. Dfferential Equations, Vol. 2, 1966, pp. 74 ~ 101.
〔30〕 Olech, C., "Existence Theorems for Optimal Problems with Vector-valued Cost Function" , Trans. Ameri. Math. Society, Vol. 136, 1969, pp. 159 ~ 180.
〔31〕 Rockafellar, R. T., "Conjugate Convex Functions in Optimal Control and the Calculus of Variations" , J. Math. Anal. Appl., Vol. 32, 1970, pp. 174 ~ 222.
〔32〕 Rozonoer, L. I., "The L. S. Pontryagin Maximum Principle in the Theory of Optimal Systems, I, II, and III" , Avotomatika i Telemekhanika, Vol. 20, 1959, pp. 1320 ~ 1334, pp. 1441 ~ 1458, pp. 1561 ~ 1578. English Translation in Automation and Remote Control, Vol. 20, 1960, pp. 1288 ~ 1302, pp. 1405 ~ 1421, pp. 1517 ~ 1532.
〔33〕Roxin, E. O., "The Existence of Optimal Controls" , The Michigan Mathematical Journal, Vol. 9, 1962, pp. 109 ~ 119.
〔34〕 Roxin, E. O., "A Geometric Interpretation of Pontryagin's Maximum Principle" , International Symposiun on "Non-linear Differential Equations and Non-linear Mechanics" , edited by J. P. Lasalle and S. Lefschetz, 1963, pp. 303 ~ 324.
〔35〕 菊地紀夫, "Contingent equation と制御問題", 日本数学会編集『数学』, 第24巻, 第4号, 1972年10月, pp. 257 ~ 268.
〔36〕 南正義・竹中淑子著, " 最適制御過程Ｉ" ,共立出版社, 情報科学講座Ａ・４・１, 1965.