分割統治戦略による Bi-reduction 法の高並列化

High Parallelization of Bi-reduction Method for Tridiagonal Linear Systems with Divide and Conquer Strategy

成　富　　　敬
NARITOMI, Takashi

Abstract

Bi-reduction method for tridiagonal linear systems is combined with the divide and conquer strategy to a highly parallel tridigonal solver. The sequential cost of the highly parallel algorithm is $18N-10p-10q+5$ where p is the number of the division of the target tridiagonal linear system of order $N(=pq)$. Generally, divide and conquer based algorithms need to use conventional sequential algorithm to solve the divided and smaller tridiagonal linear systems. On the other hand, our algorithm utilizes the 'inherent' parallelism of the bi-reduction method.

Keywords: tridiagonal linear system, parallel algorithm, bi-reduction method, divide and conquer

1．はじめに

分割統治戦略を用いた並列解法は，並列計算性を向上させるための手段として，文献［1］，［2］，［6］，［7］などで提案されているが，これらのアルゴリズムでは，大規模方程式を分割して得られる小規模の方程式を解くときに，逐次解法であるガウスの消去法や LU 分解法を用いなければならない。

本稿では，三重対角連立一次方程式の解法のひとつで，本質的並列計算性を有する解法である Bi-reduction 法［4］と分割統治戦略とを組み合わせて，高並列計算が可能なアルゴリズムを提案する。

2．Bi-reduction 法

次の三重対角連立一次方程式を解くことを考える。

$$Ax = h. \tag{1}$$

ここで，A は N 行 N 列の正則な行列であり，対角優位とする。また $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{h}$ は N 次元の列ベクトルであり，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_N)^T$，$\boldsymbol{h}=(h_1, h_2, \cdots, h_N)^T$ とする。ただし，

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & & & & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & c_{N-1} & d_{N-1} & e_{N-1} \\ 0 & & & & c_N & d_N \end{pmatrix}. \tag{2}$$

このとき，式(1)を解くための Bi-reduction 法のアルゴリズムは，以下のとおりである［4］。

ステージⅠ　$d'_i(i=1, 2, \cdots, m)$ と $h'_i(k=N, N-1, \cdots, m+1)$ を計算する。

　ただし，$d'_1=d_1$，$d'_N=d_N$，$h'_1=h_1$，$h'_N=h_N$，$N=2m$,

$$d'_i=d_i-\frac{c_i}{d'_{i-1}}e_{i-1}, \tag{3a}$$

$$d'_k=d_k-\frac{e_k}{d'_{k+1}}c_{k+1}, \tag{3b}$$

$$h'_i=h_i-\frac{c_i}{d'_{i-1}}h'_{i-1}, \tag{4a}$$

$$h'_k=h_k-\frac{e_k}{d'_{k+1}}h'_{k+1}. \tag{4b}$$

ステージⅡ　x_m と x_{m+1} を計算する。ただし，

$$x_m=\frac{h'_m d'_{m+1}-h'_{m+1}e_m}{d'_m d'_{m+1}-c_{m+1}e_m}, \tag{5a}$$

$$x_{m+1}=\frac{h'_{m+1}d'_m-h'_m c_{m+1}}{d'_m d'_{m+1}-c_{m+1}e_m}. \tag{5b}$$

ステージⅢ　$x_i(i=m-1, m-2, \cdots, 1)$ と $x_k(k=m+2, m+3, \cdots, N)$ を計算する。ただし，

$$x_i=\frac{h'_i-e_i x_{i+1}}{d'_i}, \tag{6a}$$

$$x_k=\frac{h'_k-c_k x_{k-1}}{d'_k}. \tag{6b}$$

3．高並列 Bi-reduction 法

分割統治戦略では，大きな問題をより小さな問題に分割して解き，得られた部分問題の解を統合して，大きな問題の解を得る。ここでは，文献［3］の分割統治戦略を利用する。

いま，対象としている N 次元の問題 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}$ を，より小さな q 次元の問題に分解して解くことを考える。すなわち，

$$\begin{pmatrix} A_1 & (\boldsymbol{\epsilon}_q e'_1 \boldsymbol{\epsilon}_1^T) & & & 0 \\ (\boldsymbol{\epsilon}_1 c'_2 \boldsymbol{\epsilon}_q^T) & A_2 & (\boldsymbol{\epsilon}_q e'_2 \boldsymbol{\epsilon}_1^T) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (\boldsymbol{\epsilon}_q c'_{p-1} \boldsymbol{\epsilon}_1^T) & A_{p-1} & (\boldsymbol{\epsilon}_q e'_{p-1} \boldsymbol{\epsilon}_1^T) \\ 0 & & & (\boldsymbol{\epsilon}_1 c'_p \boldsymbol{\epsilon}_q^T) & A_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{p-1} \\ \boldsymbol{x}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_1 \\ \boldsymbol{h}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{p-1} \\ \boldsymbol{h}_p \end{pmatrix}. \tag{7}$$

ここで，$A_j(j=1, 2, \cdots, p)$ は q 行 q 列の三重対角行列，$\boldsymbol{x}_j(j=1, 2, \cdots, p)$ と $\boldsymbol{h}_j(j=1, 2, \cdots, p)$ は q 次元の列ベクトル，$\boldsymbol{\epsilon}_1=(1, 0, \cdots, 0)^T$ と $\boldsymbol{\epsilon}_q=(0, 0, \cdots, 1)^T$ は q 次元の単位列ベクトルである。また，

$$c'_j=c_{(j-1)q+1}, \quad (j=2, 3, \cdots, p), \tag{8a}$$

$$e'_j=e_{jq}, \quad (j=1, 2, \cdots, p-1). \tag{8b}$$

Bi-reduction 法と分割統治戦略とを組み合わせたアルゴリズムは以下の三つのステージから構成される。

ステージⅠ　Bi-reduction 法を用いて，次の $\boldsymbol{z}_j^1\,(j=2, 3, \cdots, p)$，$\boldsymbol{y}_j\,(j=1, 2, \cdots, p)$，$\boldsymbol{z}_j^q(j=1, 2, \cdots, p-1)$ を計算する。ただし，

$$A_j^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_1 c'_j=\boldsymbol{z}_j^1, \tag{9a}$$

$$A_j^{-1}\boldsymbol{h}_j=\boldsymbol{y}_j, \tag{9b}$$

$$A_j^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_q e'_j=\boldsymbol{z}_j^q. \tag{9c}$$

ここで，A_j^{-1}は行列A_jの逆行列である。

ステージⅡ　Bi-reduction 法を用いて，式(10)の（$2p-2$）行（$2p-2$）列三重対角連立一次方程式を解く。

$$\begin{pmatrix} z^q_{1,q} & 1 & & & & & & 0 \\ 1 & z^1_{2,1} & z^q_{2,1} & & & & & \\ & z^1_{2,q} & z^q_{2,q} & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & z^1_{p-1,1} & z^q_{p-1,1} & & \\ & & & & z^1_{p-1,q} & z^q_{p-1,q} & 1 & \\ 0 & & & & & 1 & z^1_{p,1} & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{1,q} \\ x_{3,1} \\ \vdots \\ x_{p-2,q} \\ x_{p,1} \\ x_{p-1,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,q} \\ y_{2,1} \\ y_{2,q} \\ \vdots \\ y_{p-1,1} \\ y_{p-1,q} \\ y_{p,1} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

ここで，$x_{p+1,1}=x_{0,q}=0$。また，$z^1_{j,s}$，$x_{j,s}$，$z^q_{j,s}$，$y_{j,s}$は，それぞれ$\boldsymbol{z}^1_j$，$\boldsymbol{x}_j$，$\boldsymbol{z}^q_j$，$\boldsymbol{y}_j$の s ($s=1, q$) 番目の要素である。

ステージⅢ　式(11)の各 $\boldsymbol{x}_j$ ($j=1, 2, \cdots, p$) を求め（ただし，($x_{2,1}$，$x_{1,q}$，$x_{3,1}$，$x_{2,q}, \cdots, x_{p,1}, x_{p-1,q}$) は既にステージⅡで求められている)，得られた$\boldsymbol{x}_j$を統合して，解$\boldsymbol{x}$を得る。ただし，

$$\boldsymbol{x}_j=\begin{cases} \boldsymbol{y}_1-x_{2,1}\boldsymbol{z}^q_1, & (j=1), \\ \boldsymbol{y}_j-x_{j-1,q}\boldsymbol{z}^1_j-x_{j+1,1}\boldsymbol{z}^q_j, & (j=2, 3, \cdots, p-1), \\ \boldsymbol{y}_p-x_{p-1,q}\boldsymbol{z}^1_p, & (j=p). \end{cases} \tag{11}$$

高並列 Bi-reduction 法の逐次計算量は，$18N-3p-10q-3$である（ステージⅠ：$14pq-11p-6q+6$，ステージⅡ：$16p-21$，ステージⅢ：$4pq-8p-4q+12$)。なお，ここでの計算量の算出には，文献［5］の結果を利用している。

4．高並列 Bi-reduction 法の並列分散計算

高並列 Bi-reduction 法では，p（対象問題の分割の個数）は，利用可能な計

算環境に応じて設定すればよく，様々な並列度の計算が可能である。ここでは，処理要素（Processing Element）を$2p$個（PE_{11}，PE_{12}，PE_{21}，$PE_{22}, \cdots$，PE_{p1}，PE_{p2}）用いた，実行方法について説明する。

ステージⅠ　式(9a)，式(9b)，式(9c)において，$\boldsymbol{z}_j^1$ $(j=2, 3, \cdots, p)$，$\boldsymbol{y}_j$ $(j=1, 2, \cdots, p)$，$\boldsymbol{z}_j^q$ $(j=1, 2, \cdots, p-1)$ の計算を，それぞれ $PE_{jk}(k=1, 2)$に割り当てる。たとえば，$A_2^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_1 c'_2=\boldsymbol{z}_2^1$，$A_2^{-1}\boldsymbol{h}_2=\boldsymbol{y}_2$，$A_2^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_q e'_2=\boldsymbol{z}_2^q$，の処理は，$PE_{21}$と$PE_{22}$を用いて Bi-reduction 法で解く。

ステージⅡ　式(10)をPE_{11}とPE_{12}，またはPE_{p1}とPE_{p2}を用いて Bi-reduction 法で解く。

ステージⅢ　各$\boldsymbol{x}_j$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ の計算を，それぞれPE_{j1}とPE_{j2}に割り当てて計算し，得られた$\boldsymbol{x}_j$を統合して，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}$の解$\boldsymbol{x}$を得る。

なお，高並列 Bi-reduction 法の並列計算量は，$2p$個のPEを用いた場合，$8p+11q-13$である（ステージⅠ：$10q-2$，ステージⅡ：$8p-10$，ステージⅢ：$q-1$）。

5．考察とまとめ

PEを$2p$個用いた並列処理では，その計算量は$8p+11q-13$であり，$8p=11q$，すなわち，$p=\sqrt{1.173N}$のとき最小となる。ただ，実際に並列分散処理をおこなうときには，主として利用可能な処理要素数によって並列度が制約を受け，さらに処理要素間の通信速度，あるいは処理要素同士がメモリを共有しているか否かによって全体の処理速度が異なってくる。このような，処理要素の構成の違いが処理性能にどのように影響するか，についての検討は今後の課題である。

本稿では，分割統治戦略を用いて Bi-reduction 法の並列度を向上させ，計算処理を高速におこなうアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムの特徴は，他の分割統治型並列解法と違い，最終的に解く必要のある三重対角連立一次方程式に対しても，並列計算が可能となる点である。これまで，Bi-reduction 法については，三重対角連立一次方程式の係数行列の要素をc_i, d_i,

e_iと一般化して表現してきたが，たとえば係数行列が対称である場合のアルゴリズムの導出も重要な検討課題のひとつである。

また，Bi-reduction 法は三重対角連立一次方程式の基本解法のひとつとして，科学技術計算のみでならず，金融派生証券の価格付け計算等にも利用できる。このような，あらたな展開も今後の課題である。

なお，本研究の一部は山口大学経済学部学術振興基金の助成による。ここに記して深謝します。

参考文献

[1] Bondeli, S., Divide and conquer: a parallel algorithm for the solution of a tridiagonal linear system of equations, Parallel Computing, vol.17, no.4-5, pp.419-434, 1991.

[2] Evans, D.J., Parallel numerical algorithms for linear systems, Parallel Processing Systems by Evans, D.J. ed., pp.357-384, Cambridge, 1982.

[3] Naritomi, T. and Aso, H., A highly parallel systolic tridiagonal solver, IEICE Trans. Inf. & Syst., Vol.E 79-D, No.9, pp.1241-1247, 1996.

[4] Naritomi, T, Bi-reduction: A parallel algorithm for tridiagonal linear systems, INFORMATION, vol.3, no.4, pp.479-484, 2000.

[5] 成富　敬，三重対角行列の並列逆行列計算アルゴリズム，山口経済学雑誌，第49巻，第 2 号，pp.225-235，2001.

[6] Sun, X.H., Zhang, H. and Ni, L.M., Efficient tridiagonal solvers on multicomputers, IEEE Trans. Comput., Vol.C-41, No.3, pp.286-296, 1992.

[7] Wang, H., A parallel method for tridiagonal equations, ACM Trans. Math. Software, Vol.7, No.2, pp.170-183, 1981.