コブ・ダグラス生産関数の拡張

木　藤　正　典

1 はしがき

P.Douglas によって提唱されて以来，Cobb-Douglas 生産関数は理論経済学或は経済統計学の上で，長らくその輝かしい位置を保持している。しかし近年，要素代替弾力性の問題よりして，ＣＥＳ生産関数が Cobb-Douglas 生産関数（以後ＣＤ生産関数と略記する）の拡張として出現した（〔1〕）①。更に最近では，ＣＥＳ生産関数は要素代替弾力性が一定であることに批判が加えられ，可変な要素代替弾力性をもつ生産関数が提案されている（〔6〕，〔8〕，〔9〕，〔10〕）。小論はＣＤ生産関数の直接の拡張として，可変な要素代替弾力性をもつ１つの生産関数を試作するものである。

ＣＤ生産関数はその数学的な表現が簡単であることが最も特色であるが，経済的な特色は

(イ) constant returns（一次同次生産）

(ロ) 要素生産弾力性一定（要素分配率一定）

(ハ) 要素代替弾力性＝1

(ニ) 中立的技術進歩

である。(ロ)，(ニ)は生産関数の同次性（1次同次とは限らない）と(ハ)とより導かれる（〔5〕）。従って本質的な特色は

（i） 1次同次性

（ii） 要素代替弾力性＝1

の２つである。 従ってＣＤ生産関数の拡張はこの２点についての拡張であるが，生産関数の同次性（1次同次とは限らない）の仮定は否定する根拠がない

様に思われる。しかし，1次同次性については従来多くの議論があるので，それを仮定しないのが一般的な取扱い方法であろう。従って以後は生産関数のm次同次性（$m>0$）を仮定する。

次に要素代替弾力性（以後ρにて表わす）についても問題があり，経済安定性の立場からは，$\rho=1$ は安定不安定の境界にある値であり，その様な特殊な値に固定しているCD生産関数は一般性を欠くこととなる。その意味において，CES生産関数の採用は当然のことであろう。しかしながら，規模の変動或は技術の進歩に対してρが一定であるという仮定は，生産関数としての資格に制限を付するものである。小論においては，ρは一定でなく，特別の場合にのみ$\rho=1$ となる様な生産関数を考えて見たい。ただし，その生産関数はCD生産関数の拡張とはなっているが，CES生産関数の拡張とはならないものである。

① 参考文献

〔1〕Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S. and Solow, R. M., "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", *Reirew of Economics and Statistics*, 43 (1961), 225—250.

〔2〕Brown, M. and Popkin, J., "A Measure of Technological Change and Returns to Scale," *Review of Economics and Statistics*, 44 (1962), 402—411.

〔3〕Dhrymes, P.J., "Some Extensions and Tests for the CES class of Production Functions", *Review of Ecenomics and Statistics*, 47 (1965), 357—366.

〔4〕Feldstein, M.S., "Alternative Methods of Estimating a CES Production Function for Britain", *Economica*, 34 (1967), 384—394.

〔5〕木藤正典, "技術進歩と非一次同次生産", **山口経済学雑誌**, 18巻3号 (1967), 1—20.

〔6〕Lu, Y. and Fletcher, R.F., "A Generalization of the CES Production Function', *Review of Ecenomics and Statistics*, 50 (1968), 449—452.

〔7〕Moroney, J.R., "Cross—Section Production Functions and the Neo-classical Theory of Income Distribution", *Metroeconomica*, 19 (1967), 184—195.

〔8〕Sato, R., "Linear Elasticity of Substitution Production Functions", *Metroeconomica*, 19 (1967), 33—41.

〔9〕Sato, R., and Hoffmann, R.F., "Production Functions with Variable Elasticity of Factor Substitution : Some Analysis and Testing", *Review of Economics and Statistics*, 50 (1968), 453—460.

〔10〕Soskice, D., "A Modification of the CES Production Function to Allow for Changing Returns to Scale over the Function", *Review of Economics and Statistics*, 50 (1968), 446—448.

〔11〕Solow, R., "A Skeptical Note on the Constancy of Relative Shares", *American Economic Review*, 48 (1958), 618—631.

〔12〕Walters, A.A., "A Note on Economics of Scale", *Review of Economics and Statistics*, 45 (1963), 425—427.

2　m次同次生産関数

2生産要素（資本と労働）による生産を考え，資本量をK，労働量をL，生産物の量をY，時間をtにて表わし，生産関数を

$$\left.\begin{array}{l} Y=F(K,\ L,\ t) \\ Y_K(K,\ L,\ t)>0,\quad Y_L(K,\ L,\ t)>0 \end{array}\right\}\cdots(2,\ 1)$$

とする。なお関数はすべて必要な回数まで連続的微分可能であると仮定し，$F(K,\ L,\ t)$はKとLに関してm次同次（$m>0$）と仮定する。またY_K，Y_L等はYの偏導関数を示すものとし，次の諸量を定義する。

$$a\equiv\frac{Y_K}{Y}K \qquad \text{(資本の生産弾力性)}$$

$$b\equiv\frac{Y_L}{Y}L \qquad \text{(労働の生産弾力性)}$$

$$\omega\equiv\frac{Y_L}{Y_K} \qquad \text{(限界生産力比率)}$$

$$k\equiv\frac{K}{L} \qquad \text{(資本労働比率)}$$

$$\rho\equiv-\frac{\partial k}{\partial(Y_K/Y_L)}\quad\frac{(Y_K/Y_L)}{k}=\frac{1}{\frac{\partial\omega}{\partial k}}\cdot\frac{\omega}{k}$$

（資本労働代替弾力性）

ただし$\frac{\partial\omega}{\partial k}$は $\omega=\omega$（k, t）において t =一定であることを示す。

（2, 1）はK, Lのm次同次関数であるから

$$F_K K + F_L L = mY \quad \cdots\cdots \quad (2,\ 2)$$

$$Y = L^m F(k,\ 1,\ t)$$

なる関係が成立し

$$F(k,\ 1,\ t) = f(k,\ t)$$

とおけば

$$Y = L^m f(k,\ t) \quad \cdots\cdots \quad (2,\ 3)$$

となる。なお（2, 2）から

$$a + b = m$$

なる関係が成立し,（2, 3）から

$$\left.\begin{aligned} Y_K &= L^{m-1} f_k \\ Y_L &= L^{m-1}(mf - f_k k) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (2,\ 4)$$

を得る。従って

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{f_k}{f} k \\ b &= \frac{mf - f_k k}{f} \\ \omega &= \frac{mf}{f_k} - k \\ \rho &= \frac{(mf - f_k k)\ f_k}{\{(m-1) f_k{}^2 - mf f_{kk}\}\ k} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (2,\ 5)$$

となる。なお（2, 5）から

$$\frac{b}{a} = \frac{\omega}{k} \quad \cdots\cdots \quad (2,\ 6)$$

なる関係が成立する。

さて ρ の定義式から

$$\frac{\partial\omega}{\omega} = \frac{1}{\rho} \quad \frac{\partial k}{k}$$

であり，もし ρ が k の関数として与えられれば

$$\omega = c(t)\,exp\int\frac{dk}{\rho k},\quad (c(t)) > 0) \cdots\cdots (2,\ 7)$$

となる。ただし $c(t)$ は積分定数を示す。従って（2，5）から

$$\frac{f_k}{f} = \frac{m}{\omega + k} \cdots\cdots (2,\ 8)$$

となり

$$f = G(t)\int\frac{m}{\omega + k}dk \cdots\cdots (2,\ 9)$$

として関数 f （k，t）が確定する。また ρ が ω の関数として与えられる場合，或は ω（a 又は b でもよい）が k の関数として与えられる場合も（2，8）或は（2，6）より，全く同様にして f （k，t）が定まる。

3　可変的代替弾力性をもつ生産関数

可変的代替弥力性をもつ m 次同次生産関数（以後ＶＥＳ生産関数と略記する）の一般的導出法は（2，7），（2，8）で示されているが，以後はＣＤ生産関数の拡張であって，しかも数学的に取扱いが容易であるものを求めることとする。その条件に適するものとして，ρ が k の1次分数関数であって

$$\rho = \frac{C + Dk}{A + Bk},\ CD \fallingdotseq 0,\ \frac{d\rho}{dk} \fallingdotseq 0 \cdots\cdots (3,\ 1)$$

である場合[①] のみについて考える。ただし A，B，C，D は t の関数であると考える。

$CD \fallingdotseq 0$ であるから

$$\rho = \frac{1 + \frac{D}{C}k}{\frac{A}{C} + \frac{B}{D}\cdot\frac{D}{C}k}$$

であり

$$\frac{A}{C} = U,\ \frac{D}{C} = E,\ \frac{B}{D} = V$$

とおけば，$d\rho/dk \fallingdotseq 0$ より $U \fallingdotseq V$ であって

$$\rho=\frac{1+Ek}{U+VEk},\quad (U\fallingdotseq V) \quad\cdots\cdots (3,\ 2)$$

であり（2，7）は

$$\omega=c(t)k^{U}(1+Ek)^{V-U},\ (U\fallingdotseq V) \quad\cdots\cdots (3,\ 3)$$

となる。故に（2，8）は

$$\frac{f_k}{f}=\frac{m}{c(t)k^{U}(1+Ek)^{U-V}+k} \quad\cdots\cdots (3,\ 4)$$

となる。

求める生産関数が極限としてＣＤ生産関数となり，しかもその関数形が簡単なものであることが望ましいので，次の仮定をおく。

〔仮定Ⅰ〕　（3，2）において

$$\lim_{E\to 0}\rho=1 \quad 或は \quad \lim_{E\to\infty}\rho=1$$

の何れかが成立する。

〔仮定Ⅱ〕　（3，4）において，右辺はkの有理式で，分母の次数は２以下である[②]。

仮定Ⅰより$U=1$或は$V=1$の何れかが成立しなければならない。

(a)　$U=1$の場合

この場合は$V\fallingdotseq 1$であり

$$\frac{f_k}{f}=\frac{m}{c(t)k(1+Ek)^{V-1}+k}$$

であるから仮定Ⅱより$V=0$又は２でなければならない。

（i）$V=0$の場合

（3，2），（3，3），（3，4）はそれぞれ

$$\rho=1+Ek$$

$$\omega=\frac{ck}{1+Ek} \quad\cdots\cdots (3,\ 5)$$

$$\frac{f_k}{f}=\frac{m(1+Ek)}{k\{(1+c)+Ek\}}$$

となる。故に

$$f = G(t)\,k^{\alpha}\{(1+c)+E\,k\}^{\beta}$$

ただし

$$\alpha = \frac{m}{1+c},\quad \beta = \frac{m\,c}{1+c}\quad (=m-\alpha)$$

である。故に

$$\begin{cases} P(t) = G(t)(1+c)^{\beta} \\ Q(t) = \dfrac{E}{1+c} \end{cases}$$

とおけば

$$f = P\,k^{\alpha}(1+Q\,k)^{\beta} \cdots\cdots\cdots\cdots (3,\ 6)$$

故に　$F = PK^{\alpha}(L+QK)^{\beta} = PK^{\alpha}L^{\beta}(1+Q\dfrac{K}{L})^{\beta} \cdots\cdots$ (I)

を得る。

(ii)　$V=2$の場合

(3, 2), (3, 3), (3, 4) はそれぞれ

$$\rho = \frac{1+E\,k}{1+2E\,k}$$

$$\omega = c\,k(1+E\,k)$$

$$\frac{f_k}{f} = \frac{m}{k\{(1+c)+c\,E\,k\}}$$

となり

$$f = G(t)\,k^{\alpha}\{(1+c)+c\,E\,k\}^{-\alpha},\quad (\alpha = \frac{m}{1+c})$$

となる。故に

$$\begin{cases} P(t) = \dfrac{G(t)}{(1+c)^{\alpha}} \\ Q(t) = \dfrac{c\,E}{1+c} \end{cases}$$

とおけば

$$f = \frac{P\,k^{\alpha}}{(1+Q\,k)^{\alpha}} \cdots\cdots\cdots\cdots (3,\ 7)$$

故に　$F=P\dfrac{K^{\alpha}L^{\beta}}{(1+Q\dfrac{K}{L})^{\alpha}}=P\dfrac{K^{\alpha}L^{m}}{(L+QK)^{\alpha}}$ ……………………………… (Ⅱ)

を得る。ただし $\beta=m-\alpha$ である。

(b)　$V=1$ の場合

この場合は$U\fallingdotseq 1$であり

$$\frac{f_k}{f}=\frac{m}{c(t)k^{U}(1+Ek)^{1-U}+k}$$

であるから仮定Ⅱより$U=0$又は２でなければならない。

（i）　$U=0$の場合

（3，2），（3，3），（3，4）はそれぞれ

$$\rho=\frac{1+Ek}{Ek}$$

$$\omega=c(1+Ek)$$

$$\frac{f_k}{f}=\frac{m}{c+(1+cE)k}$$

故に　$f=G(t)\{c+(1+cE)k\}^{\alpha}$,　$(\alpha=\dfrac{m}{1+cE})$

故に　$\begin{cases} P(t)=G(t)(1+cE)^{\alpha} \\ Q(t)=\dfrac{c}{1+cE} \end{cases}$

をおけば

$$f=P(k+Q)^{\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3,\ 8)$$

故に　$F=P(K+QL)^{\alpha}L^{\beta}=PK^{\alpha}L^{\beta}(1+Q\dfrac{L}{K})^{\alpha}$ …………………… (Ⅲ)

を得る[③]。

（ii）　$U=2$の場合

（3，2），（3，3），（3，4）は

$$\rho=\frac{1+Ek}{2+Ek}$$

$$\omega=\frac{ck^{2}}{1+Ek}$$

$$\frac{f_k}{f}=\frac{m(1+Ek)}{k\{1+(c+E)k\}}$$

となる。故に

$$f=G(t)k^m\{1+(c+E)\}^{-\beta},\quad \left(\beta=\frac{mc}{c+E}\right)$$

故に

$$\begin{cases} P(t)=\dfrac{G(t)}{(c+E)^\beta} \\ Q(t)=\dfrac{1}{c+E} \end{cases}$$

とおけば

$$f=Pk^m(k+Q)^{-\beta} \quad \cdots\cdots (3,\ 9)$$

を得る。故に

$$F=\frac{PK^\alpha L^\beta}{(1+Q\frac{L}{K})^\beta},\quad (\alpha=m-\beta) \quad \cdots\cdots (\mathrm{IV})$$

となる ④。

① C又はDが0の場合は（2，7）の右辺に $e^{\lambda k}$ 又は $e^{\frac{\mu}{k}}$ の形の関数が現れて，後述の仮定Ⅱを満足する様な簡単な形とならない。

② 分母が3次以上の整式であれば，一般には f に $\tan^{-1}k$ 又は $e^{\lambda k}$ 等の因子が現れる。

③ （Ⅲ）において

$$\frac{1}{F}=F^*,\quad \frac{1}{P}=P^*,\quad \frac{1}{K}=K^*,\quad \frac{1}{L}=L^* \cdots\cdots (3,\ 10)$$

とおけば

$$F^*=P^*\frac{K^{*\alpha}L^{*\beta}}{\left(1+Q\frac{K^*}{L^*}\right)^\alpha}$$

となる。これは（Ⅱ）と同じ形である。

④ （Ⅳ）において（3，10）なる変換を行えば，

$$F^*=P^*K^{*\alpha}L^{*\beta}\left(1+Q\frac{K^*}{L^*}\right)^\beta$$

となる。これは（Ⅰ）と同じ形である。

4　VES生産関数の性質

（3，1）から生ずる生産関数或は（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ）の4種

の生産関数については次の様な性質がある。

〔定理1〕　(3, 1)から生ずる生産関数において，U, Vが定数であって，(2, 7)に関して

$$c(t)=sE^{U-1},\quad (s=\text{定数}) \qquad\cdots\cdots (4,\ 1)$$

が成立すれば，その生産関数はFactor Augumentig（以後FAと略記する）である。逆にU, Vが定数のとき，(3, 1)から生ずる生産関数がFAであれば，(4, 1)が成立する。

〔証明〕　木藤〔5〕により(2, 1)がFAであるための必要十分条件は資本分配率aがtの関数とkとの積の関数であることであるが，(2, 6)よりその条件は

$$\frac{\omega}{k}=\frac{m-a}{a}$$

がtの関数とkとの積の関数であることである。

(イ)　前半の証明

(4, 1)が成立すれば(3, 3)から

$$\frac{\omega}{k}=c(Ek)^{U-1}(1+Ek)^{V-U},\quad (U,\ V\text{は定数})$$

となる故それから生ずる生産関数はFAである。

(ロ)　後半の証明

$$\frac{\omega}{k}=\varphi(k,\ t)$$

とおけば，(3, 3)から

$$\varphi(k,\ t)=c\,k^{U-1}(1+Ek)^{U-V} \qquad\cdots\cdots (4,\ 2)$$

であるが，$g(t)$をtのある関数とするときは仮定から

$$\varphi(k,\ t)=G\{k\,g(t)\}$$

である。ただし$G(x)$はxのある関数を示す。

故に

$$\begin{cases}\varphi_k=G'\,g(t)\\ \varphi_t=G'\,k\,g'(t)\end{cases}$$

より

$$\frac{k\varphi_k}{\varphi_t}=\frac{g(t)}{g'(t)}$$

となり $(k\varphi_k)/\varphi_t$ は k を含まない。然るに（4，2）から，U，V が定数であれば

$$\frac{k\varphi_k}{\varphi_t}=\frac{(2U-V-1)Ek+(U-1)}{\{\frac{c'}{c}E+(U-V)E'\}k+\frac{c'}{c}}$$

を得る故

$$\frac{\partial}{\partial k}\left\{\frac{k\varphi_k}{\varphi_t}\right\}=\frac{(U-V)\{\frac{c'}{c}E-(U-1)E'\}}{\left[\{\frac{c'}{c}E+(U-V)E'\}k+\frac{c'}{c}\right]^2}=0$$

である。$U \neq V$ であるから故に

$$\frac{c'}{c}=\frac{E'}{E}(U-1)$$

を得る。故に

$$c=sE^{U-1},\quad (s=\text{定数})$$

となる。

〔系〕　（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ）は何れもそれがＦＡであるための条件は α＝定数（或は β＝定数）である。

〔証明〕　（Ⅰ）は $U=1$，$V=0$，（Ⅱ）は $U=1$，$V=2$，（Ⅲ）は $U=0$，$V=1$，（Ⅳ）は $U=2$，$V=1$ である。（Ⅰ），（Ⅱ）の場合は（4，1）より $c=s$＝定数であるから

$$\alpha=\frac{m}{1+c}=\text{定数}$$

である。（Ⅲ）の場合は（4，1）より $cE=s$＝定数であるから

$$\alpha=\frac{m}{1+cE}=\text{定数}$$

である。（Ⅳ）の場合は（4，1）より $c/E=s$＝定数であるから

$$\alpha=\frac{mE}{c+E}=\frac{m}{1+s}=\text{定数}$$

である。

〔定理2〕（3，1）から生ずる生産関数の技術進歩が Hicks の意味で中立的であるための条件は（3，3）においてU，V，E，$c(t)$が何れも定数であることである。

〔証明〕（3，1）の技術進歩が Hicks の意味で中立的であるための必要十分条件は，$\omega=Y_L/Y_K$ が t を含まず，kのみの関数であることである。然るにその条件は（3，3）よりU，V，E，$c(t)$が何れも定数であることである。

〔系〕（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ）は何れもそれが Hicks の意味で中立的な技術進歩をなすための必要十分条件は α＝定数（或は β＝定数）であってQ＝定数であることである。

〔定理3〕$m \fallingdotseq 1$の場合は（3，1）から生ずる生産関数は Harrod の意味での中立的技術進歩をなすことはない。

〔証明〕木藤〔5〕より$m \fallingdotseq 1$のときm次同次生産関数が Harrod の意味で中立的であるのは

$$Y=C(t)K^{\alpha}L^{\beta},\quad (\alpha+\beta=m)$$

なる場合のみであり，そのときは$\rho=1$である。従って（3，1）は成立しない①。

次に（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ）は何れも

$$f(k,\ t)=k^{\lambda}(A+Bk)^{\mu},\quad (\lambda,\ \mu \text{は} t \text{のみの関数}) \cdots\cdots (4,\ 3)$$

なる形で表わされるが，それに関して次の定理が成立する。

〔定理4〕（3，1）から生ずる生産関数で$f(k,\ t)$が（4，3）の形で表わされるものは，（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ）のみである。

〔証明〕（4，3）より（2，5）によってρを計算すれば

$$\rho-1=\frac{m\mu ABk}{(\lambda+\mu)(m-\lambda-\mu)B^2k^2+2\lambda(m-\lambda-\mu)ABk+\lambda(m-\lambda)A^2}$$

となる。従って$\dfrac{d\rho}{dk} \fallingdotseq 0$で$k$の1次分数式となるのは次の4つの場合に限る。

(イ)　$\lambda+\mu=m$，　$\lambda(m-\lambda) \fallingdotseq 0$，

(ロ) $\lambda+\mu=0$,　$\lambda(m-\lambda)\fallingdotseq 0$,

(ハ) $\lambda=0$,　$(\lambda+\mu)(m-\lambda-\mu)\fallingdotseq 0$

(ニ) $\lambda=m$,　$(\lambda+\mu)(m-\lambda-\mu)\fallingdotseq 0$,

これらの場合はそれぞれ（Ⅰ）；$(\lambda=\alpha,\ \mu=\beta)$,（Ⅱ）；$(\lambda=\alpha,\ \mu=-\alpha)$,（Ⅲ）；$(\lambda=0,\ \mu=\alpha)$,（Ⅳ）；$(\lambda=m,\ \mu=-\beta)$ の場合であることは明らかである。

以上より（3，1）と仮定Ⅰ，Ⅱが成立すれば（4，3）が成立し，（3，1），（4，3）が成立するものは（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ）より他にはない。それらの場合，α＝定数であれば，何れもＦＡであり，更にQ＝定数（$\fallingdotseq 0$）ならHicks の意味で中立的技術進歩をなすが，$m\fallingdotseq 1$ の場合は Harrod の意味での中立的技術進歩はなし得ない。なおわれわれの求めている生産関数は，ＣＤ生産関数の拡張である点に留意して，以後は次の様に仮定する。

〔仮定Ⅲ〕　α, β は何れの場合も定数である。

① $m=1$ の場合，（Ⅰ），（Ⅱ）が Harrod neutral である条件は α＝定数 であって $P=s(\frac{1}{Q})^{\beta}$,（s＝定数）であることである。また（Ⅲ），（Ⅳ）については α＝定数であって $P=sQ^{\beta}$,（s＝定数）であることである。

5　VES生産関数の選択

前々節で４つのＶＥＳ生産関数を得たのであるが，そのうち何れがＣＤ生産関数の拡張として最も適当であるかを吟味したい。先づ４つの生産関数の性質を調べることとする。なおＣＤ生産関数の直接的な拡張とするため次の２つの仮定を追加する。

〔仮定Ⅳ〕　$0<\alpha<1$,　$0<\beta<1$

〔仮定Ⅴ〕　$\rho>0$

（Ⅰ）$F=PK^{\alpha}L^{\beta}(1+Q\frac{K}{L})^{\beta}$

$$f=Pk^{\alpha}(1+Qk)^{\beta} \qquad (5,\ 1)$$

故に　$\rho=1+\frac{m}{\alpha}Qk$

より　$Q>0$ なら　$1<\rho<\infty,\ \dfrac{d\rho}{dk}>0$

$$Q<0 \text{ なら} \left\{\begin{array}{ll} 0<k<-\dfrac{\alpha}{mQ}\ \left(<-\dfrac{1}{Q}\right) & \text{で } 1>\rho>0, \\ k\geqq-\dfrac{\alpha}{mQ} & \text{で } \rho\leqq 0, \end{array}\right\} \dfrac{d\rho}{dk}<0$$

また　$f_k=Pk^{\alpha-1}(1+Qk)^{\beta-1}\alpha\rho>0$,（$Q<0$ のときは $0<k<-\dfrac{\alpha}{mQ}$）

$$f_{kk}=Pk^{\alpha-2}(1+Qk)^{\beta-2}\{m(m-1)Q^2k^2+2\alpha(m-1)Qk+\alpha(\alpha-1)\}$$

$$\text{故に}\quad Q>0 \text{ なら} \left\{\begin{array}{ll} m\leqq 1 \text{ では} & f_{kk}<0 \\ m>1 \text{ では} & k\gtrless-\dfrac{\alpha}{mQ}+\dfrac{1}{mQ}\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{m-1}} \text{ で } f_{kk}\gtrless 0 \end{array}\right.$$

$Q<0$ なら　$f_{kk}<0$　（ただし　$0<k<-\dfrac{\alpha}{mQ}$）

（Ⅱ）$F=PK^{\alpha}L^{\beta}\left(1+Q\dfrac{K}{L}\right)^{-\alpha}$

$$f=Pk^{\alpha}(1+Qk)^{-\alpha} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5,\ 2)$$

故に　$\rho=1-\dfrac{mQk}{\beta+2mQk}$

より　$Q>0$ なら　$1>\rho>\dfrac{1}{2}$,　$\dfrac{d\rho}{dk}<0$

$Q<0$ なら　$0<k<-\dfrac{\beta}{2mQ}\ \left(<-\dfrac{1}{Q}\right)$ で $1<\rho<\infty$, $\dfrac{d\rho}{dk}>0$

また　$f_k=P\alpha k^{\alpha-1}(1+Qk)^{-\alpha-1}>0$

$$f_{kk}=P\alpha k^{\alpha-2}(1+Qk)^{-\alpha-2}\{(m-1)\alpha-(\beta+2mQk)\}/m$$

故に $Q>0$，或は $Q<0$ で $m\leqq 1$ なら $f_{kk}<0$ であり，$Q<0$ で $m>1$ なら $k\lesseqgtr\dfrac{\alpha-1}{2Q}$ に従って $f_{kk}\lesseqgtr 0$ である。

（Ⅲ）$F=PK^{\alpha}L^{\beta}\left(1+Q\dfrac{L}{K}\right)^{\alpha}$

$$f=P(k+Q)^{\alpha} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5,\ 3)$$

$$\rho=1+\frac{mQ}{\beta k}$$

より　$Q>0$ なら　$\infty>\rho>1$，　$\frac{d\rho}{dk}<0$

$Q<0$ なら　$-\frac{m}{\beta}Q<k<\infty$ で　$0<\rho<1$，$\frac{d\rho}{dk}>0$

また　$f_k=P\alpha(k+Q)^{\alpha-1}>0$

$f_{kk}=P\alpha(\alpha-1)(k+Q)^{\alpha-2}<0$

（Ⅳ）$F=PK^{\alpha}L^{\beta}(1+Q\frac{L}{K})^{-\beta}$

$f=Pk^{m}(k+Q)^{-\beta}$

故に　$\rho=1-\frac{mQ}{2mQ+\alpha k}$

より　$Q>0$ なら　$\frac{1}{2}<\rho<1$，　$\frac{d\rho}{dk}>0$

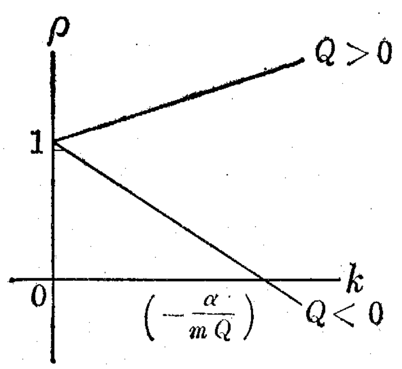
$Q<0$ なら　$-\frac{2mQ}{\alpha}<k<\infty$ で $Q>\rho>1$，$\frac{d\rho}{dk}<0$

また　$f_k=Pk^{m-1}(k+Q)^{-\beta-1}(mQ+\alpha k)>0$

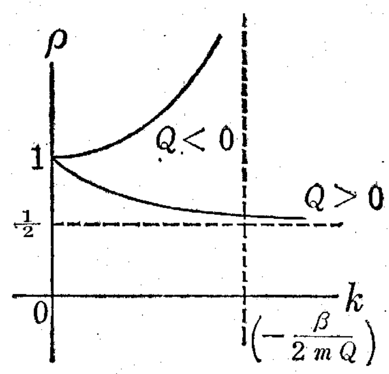
$f_{kk}=Pk^{\alpha-2}(k+Q)^{-\beta-2}\{-\alpha(1-\alpha)k^2-2mQ(1-\alpha)k+m(m-1)Q^2\}$

故に　$Q>0$ なら $\begin{cases} m\leqq 1 \text{ では } & f_{kk}<0 \\ m>1 \text{ では } & k\gtrless\frac{mQ}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m(1-\alpha)}}-1\right) \text{ で } f_{kk}\lesseqgtr 0 \end{cases}$

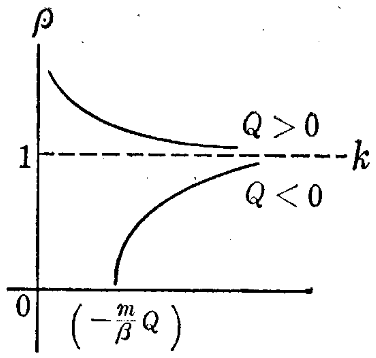
$Q<0$ なら $\begin{cases} m\leqq 1 \text{ では } & f_{kk}<0 \\ m>1 \text{ では } & k\gtrless\frac{mQ}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m(1-\alpha)}}+1\right) \text{ で } f_{kk}\lesseqgtr 0 \end{cases}$



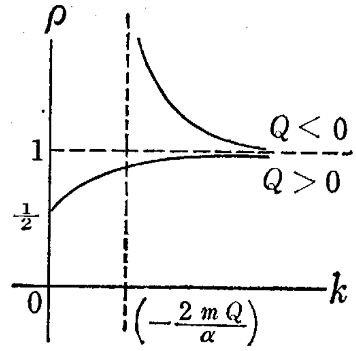
Ⅰ



Ⅱ



Ⅲ



Ⅳ

さて生産関数の性質として望ましい条件をあげれば次の様である。

(1)　kの変域

kの変域としては$0<k<Q$が望ましいが，それが満足されないときは０の近傍（$k>0$）が変域間に含まれることが望ましい①。

(2)　f_kの符号

資本の限界生産力は正であるから（２，４）から $f_k>0$ でなければならない。

(3)　f_{kk}の符号

（２，４）から$Y_{KK}=L^{m-2}f_{kk}$となるから，資本の限界生産力の漸減を仮定するなれば，$f_{kk}<0$ でなければならない。

(4)　ρの値

通常の場合は$0<\rho<1$と考えられる。

以上の各条件についての４つのＶＥＳ生産関数の適否は次の表の通りである。（表中○は適当を，×は不適当を，△はやや適することを示す。）

事項 / 関数	Qの符号	kの変域	f_kの符号	f_{kk}の符号	ρの値
Ⅰ	正	○	○	×	△
	負	△	○	○	○
Ⅱ	正	○	○	△	○
	負	△	○	○	△
Ⅲ	正	○	○	○	△
	負	×	○	○	○
Ⅳ	正	○	○	×	○
	負	×	○	×	△

従って表よりⅡ（特に$Q>0$

の場合）が最も適当であると考えられる。即ち

$$F=\frac{PK^{\alpha}L^{\beta}}{(1+Q\frac{K}{L})^{\alpha}},\quad (0<\alpha<1,\ 0<\beta<1)$$

を以てＣＤ生産関数を拡張することによって得られた１つのＶＥＳ生産関数としたい。

① Ｋ≑０である生産は考えられる。しかしＬ≑０の生産は考え難いから，ｋ＝∞の近傍は必ずしもｋの変域内に含まれなくてもよいであろう。