技術進歩をともなう二部門成長モデル〔I〕

木　藤　正　典

1　はしがき

新古典派による二部門成長論は，宇沢[①]（〔13〕，〔14〕）Solow（〔11〕）Drandakis（〔5〕）等の人々の努力により，1つの完成したモデルが作り出された。しかしそれは技術進歩のない成長であり，適当な条件のもとでは，経済体系は一定の静学的均衡に収束することは想像し得ることである。しかしながら技術進歩がある場合は如何であろうか。技術進歩に関しては数多くの論説があるが，多くのものが巨視理論であり，部門理論については充分な展開が行なわれていない。特に biased technical change をもつ二部門成長モデルは天野（〔1〕，〔2〕）Diamond（〔3〕，〔4〕）高山（〔2〕）等の研究があるにすぎない。

技術進歩の理論は，ヒックス・ハロッドの先駆的研究以来，主として中立的技術進歩が論ぜられていた。しかしながら近年Kennedy（〔7〕）の提唱以来，biased technical chiauge の分析方法として innovation possibility function が導入され，Samuelson（〔10〕），Drandakis and Phelps（〔6〕），天野（〔2〕）等の学者により，その線に沿った研究が続けられている。しかしながらそれらは成長モデルとしては巨視理論であり，部門理論ではない。

以上のような理論の発展のなかで，以下の小論は innovation possibility function を用いて，biased technical changeをもつ二部門成長モデルを試作するものであり，拙論（〔9〕）の二部門理論への拡張である。

① 参考文献

〔1〕 天野明弘, “技術進歩と均衡成長” **理論経済学**, 16 No. 2 (Feb., 1964), 23—30.

〔2〕 ———, “Induced Bias in Technological Progress and Economic Groth.” **理論経済学**, 17 No.3 (March, 1967), 1—17.

〔3〕 Diamond, P.A., “Disembodied Technical Change in a Two-Sector Model”, *Review oj Economic Studies*, 32 (1965), 161—168.

〔4〕 ———, “Technical Change and the Measurement of Capital and Output”, *Review of Economic Studies*, 32 (1965), 289—298.

〔5〕 Drandakis, E.M., “Factor Substitution in the Two-Sector Growth Model”, *Review of Economic Studies*, 30 (1963), 217—228.

〔6〕 ——— and Phelps, E.S., “A Model of Induced Invention, Growth and Distribution”, *Economic Journal*, 76 (1966), 823—840.

〔7〕 Kennedy, C., “Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution”, *Economic Rournal*, 74 (1964), 541—547

〔8〕 木藤正典, “非一次同次生産関数”, **山口経済学雑誌**, 17 (1967), 469—508,

〔9〕 ———, “技術進歩と非一次同次生産”, **山口経済学雑誌**, 18 (1968), 191—210.

〔10〕 Samuelson, P.A., “A Theory of Induced Innovation along Kennedy-Weisäcker Lines”, *Review of Economics and Statistics*, 47 (1965), 343—356.

〔11〕 Solow, R.M., “Notes on Uzawa’s Two-Sector Model of Economic Growth”, *Rereiw of Economic Studies*, 29 (1961), 48—50.

〔12〕 Takayama, A., “On A Two-Sector Model of Economic Growth with Technological Progress”, *Review of Economic Studies*, 32 (1965), 251—262.

〔13〕 Uzawa, H., “On a Two-Sector Model of Economic Growth”, *Review of Economic Studies*, 29 (1961), 40—47.

〔14〕 ———, “On a Two-Sector Model of Economic Growth Ⅱ”, *Review of Economic Studies*, 30 (1963) 105—118.

2 基本的関係式

第１部門が投資財生産部門で第２部門が消費財生産部門である２部門モデルを考え，諸量の添文字の１，２はそれぞれ第１部門第２部門の量であることを

示し，添文字のない量は，全体系に対する量を示す。各部門の生産要素は資本と労働であるとし，生産量をY_i，資本量をK_i，労働量をL_i（$i=1,\ 2$），時間をtとし，各部門の生産関数を

$$Y_i=F_i(K_i,\ L_i,\ t),\quad (i=1,\ 2) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2,\ 1)$$

とする。ただしF_iはK_i，L_iのm次同次関数（$m>0$）であり，必要な回数まで各変数に関して連続的偏微分可能とし，その偏導関数をY_{iL}，Y_{iK}，Y_{it}にて表わす。また$\dot{Y}_i$等はtに関する導関数を示し，$\hat{Y}_i$等は増加率を示す。なお

$$F_{iK}(K_i,\ L_i,\ t)>0,\ F_{iL}(K_i,\ L_i,\ t)>0,$$

$$F_{iKK}(K_i,\ L_i,\ t)<0$$

と仮定する。次に以下の諸量を定義する。

$R_i=\dfrac{Y_{it}}{Y}$　（第i部門技術進歩率）

$a_i=\dfrac{Y_{iK}K_i}{Y_i}$　（第i部門資本生産弾力性）

$b_i=\dfrac{Y_{iL}L_i}{Y_i}$　（第i部門労働生産弾力性）

$k_i=\dfrac{K_i}{L_i}$　（第i部門資本労働比率）

$\rho_i=-\left\{\dfrac{d\,k_i}{d\,(Y_K/Y_{iL})}\cdot\dfrac{(Y_{iL}/Y_{iL})}{k_i}\right\}t=$一定
（第i部門要素代替弾力性）

$p_i=i$部門生産物価格

$p=\dfrac{p_1}{p_2}$　（投資財相対価格）

$w=$賃金率

$r=$資本利潤率

$w=\dfrac{w}{r}$　（相対賃金）

$s=$全体系に対する貯蓄率[1]（$0<s<1$）

$$K=K_1+K_2\quad（全資本量）\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2,\ 2)$$

$L=L_1+L_2$　(全労働量) ……………………………… (2, 3)

$k=\dfrac{K}{L}$　(資本労働比率)

$Y=p_1Y_1+p_2Y_2$ (全生産額) ……………………… (2, 4)

$\theta_i=\dfrac{Y_ip_i}{Y}$　(第 i 部門生産額比率)

以上より

$a_i+b_i=m,\ (i=1,\ 2)$ ……………………………… (2, 5)

$\theta_1+\theta_2=1$ ……………………………………… (2, 6)

$\widehat{Y}_i=R_i+a_i\widehat{K}+b_i\widehat{L}_i,\ (i=1,\ 2)$ ………………… (2, 7)

$p_1Y_1=sY$ ……………………………………………… (2, 8)

なる関係が成立する。ただし (2, 8) においては，投資と貯蓄との均等が仮定されている。

さて第1部門と第2部門の総合として，全体系に対して以下の諸量を定義する。

$R=\theta_1P_1+\theta_2P_2$ (価格一定のときの技術進歩率) ……… (2, 9)

$Y_K=Y_{1K}p_1\dfrac{K_1}{K}+Y_{2K}p_2\dfrac{K_2}{K}$ ② ……………………… (2, 10)

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{Y_KK}{Y}\\ b&=\frac{Y_LL}{Y}\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\ (2,\ 11)$$

$\rho=-\left\{\dfrac{dk}{d(Y_K/Y_L)}\cdot\dfrac{(Y_K/Y_L)}{k}\right\}_{t=一定}$ ……………… (2, 12)

(2, 8), (2, 9) から

$$R=\frac{1}{Y}\quad\frac{\partial}{\partial t}\{Y\}_{p_i=一定}$$

$$Y_K=\frac{\partial}{\partial K}\{Y\}_{\substack{p_i=一定\\ K_i\infty K}}$$

なる関係が成立する。従って Y_K, a, ρ は $p_i=$一定 $(i=1,\ 2)$, $K_i\infty K$, $(i=1,\ 2)$ が成立するという条件付での資本の限界価値生産力・資本の価

値生産弾力性・価値生産における要素代替弾力性を示すものである。

また

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1\theta_1 + a_2\theta_2 \\ b &= b_1\theta_1 + b_2\theta_2 \\ a + b &= m \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2, 13)$$

$$\theta_1 = s,\ \theta_2 = 1 - s \quad \cdots\cdots (2, 14)$$

なる関係が成立する。従って a は a_1, a_2 の加重平均を，b は b_1, b_2 の加重平均を示すものである。

次に（2，4），（2，7）より

$$\begin{aligned} \widehat{Y} &= \theta_1(\widehat{Y}_1 + \widehat{p}_1) + \theta_2(\widehat{Y}_2 + \widehat{Y}_2) \\ &= \theta_1(R_1 + a_1\widehat{k}_1 + b_1\widehat{L}_1 + \widehat{p}_1) + \theta_2(R_2 + a_2\widehat{K}_2 + b_2\widehat{L}_2 + \widehat{p}_2) \\ &= R + (\theta_1 a_1\widehat{K}_1 + \theta_2 a_2\widehat{K}_2) + (\theta_1 b_1\widehat{L}_1 + \theta_2 b_2\widehat{L}_2) \\ &\qquad + (\theta_1\widehat{p}_1 + \theta_2\widehat{p}_2) \quad \cdots\cdots (2, 15) \end{aligned}$$

また（2，11）より

$$\widehat{Y}_K = \widehat{Y} + \widehat{a} - \widehat{K}$$

故に同様にして

$$\begin{aligned} a\widehat{Y}_K + b\widehat{Y}_L &= (a+b)\widehat{Y} + (a\widehat{a} + b\widehat{b}) - (a\widehat{K} + b\widehat{L}) \\ &= m\widehat{Y} - (a\widehat{k} + b\widehat{L}) \quad \cdots\cdots (2, 16) \\ \widehat{Y}_K - \widehat{Y}_L &= \widehat{a} - \widehat{b} - (\widehat{K} - \widehat{L}) \\ &= \widehat{a} + \frac{a}{m-a}\widehat{a} - (\widehat{K} - \widehat{L}) \end{aligned}$$

故に $$\widehat{a} = \frac{m-a}{m}(\widehat{Y}_K - \widehat{Y}_L - \widehat{K} - \widehat{L}) \quad \cdots\cdots (2, 17)$$

を得る。なお以後

〔仮定１〕 $\rho_i > 0$,（$i = 1$, 2），$\rho > 0$ …………（2，18）

が成立するものと仮定する。[3]

① 利潤部分に対する貯蓄率と賃金部分に対する貯蓄率とを区分しない。なお s は時間 t の関数と考える。

② Y_K はKに関する偏導関数を示す記号ではない。Y_L も同様である。

③ $\rho_1>0$，$\rho_2>0$ のとき $k_2 \geqq k_1$ 又は $\rho_1+\rho_2 \geqq 1$ であれば $\rho>0$ であることが証明される。（〔8〕P.496参照）また $\rho_i>0$ であることは，

$$m>\frac{F^2{}_K}{F^2_{iK}-F_iF^2_{iKK}}$$

と同等であることが証明される。（〔8〕P.491参照）

3 静学的均衡

静学的均衡を考察するため，均衡条件として次の限界生産力の法則を仮定する。

〔仮定2〕
$$\frac{\frac{\partial F_i}{\partial K_i}}{r}=\frac{\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}}{w}=\frac{1}{p_i(1-\eta)},\ (i=1,\ 2) \cdots\cdots\cdots\cdots (3,\ 1)$$

ただし η はパラメーターであって

$$0 \leqq \eta < 1,\quad 0 < m(1-\eta) \leqq 1$$

を満足するものとする①。仮定2と生産関数の同次性とより

$$\frac{\frac{\partial F_i}{\partial K_i}K_i+\frac{\partial F_i}{\partial L_i}L_i}{rK_i+wL_i}=\frac{mY_i}{r_iK+wL_i}=\frac{1}{p_i(1-\eta)}$$

故に　$Y_i=\dfrac{rK_i+wL_i}{m(1-\eta)p_i}$

故に　$Y=\dfrac{rK+wL}{m(1-\eta)}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ （3，2）

従って（3，1）より

$$\text{企業利潤}=Y-(rK+wL)$$
$$=Y\{1-m(1-\eta)\} \geqq 0$$

である。従って $m>1$ のときは $\eta \geqq \dfrac{m-1}{m}$ となり，完全競争（$\eta=0$）は成立しない。

さて $t=$ 一定のときの変数として Y_i, K_i, L_i, K, L, p_i, r, w の12個があるが，終りの4個は比のみが定まればよい故，変数は11と考えてよい。然るにそれらの間には（2，1），（2，2），（2，3），（2，8），

（3，1）の9個の関係式が成立する。この場合K，Lを所与と見做せば，均衡が存在するときは，（2，18）よりその均衡値は唯1通りに限ることが証明される[2]。以後は均衡の存在を仮定することとする。従ってK，L以外の変数の均衡値はK，L以外の変数の均衡値はK，L，tの関数として一意的に定まることとなる。従って静学的均衡に対しては

$$Y=F(K,\ L,\ t) \qquad \cdots\cdots (3,\ 3)$$

なる関数が存在することとなる。

静学的均衡においては（3，1）より

$$Y_{1K}p_1=Y_{2L}p_2=\frac{r}{1-\eta}$$

従って（2，10）より

$$\left.\begin{aligned} Y_K=Y_{iK}p_i=\frac{r}{1-\eta},\ (i=1,\ 2) \\ Y_L=Y_{iL}p_i=\frac{w}{1-\eta},\ (i=1,\ 2) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (3,\ 4)$$

故に $$\frac{Y_L}{Y_K}=\omega \qquad \cdots\cdots (3,\ 5)$$

また（3，1）より

$$\left.\begin{aligned} a_i=\frac{rK_i}{(1-\eta)Y_ip_i} \\ b_i=\frac{wL_i}{(1-\eta)Y_ip_i} \end{aligned}\right\}$$

故に $$\left.\begin{aligned} a_i\theta_i=\frac{rK_i}{(1-\eta)Y} \\ b_i\theta_i=\frac{wL_i}{(1-\eta)Y} \end{aligned}\right\}\ (i=1,\ 2) \qquad \cdots\cdots (3,\ 6)$$

従って（2，13より）

$$\left.\begin{aligned} a=\frac{rK}{(1-\eta)Y} \\ b=\frac{wL}{(1-\eta)Y} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (3,\ 7)$$

従って

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_i\theta_i}{a}&=\frac{K_i}{K}\\ \frac{b_i\theta_i}{b}&=\frac{L_i}{L}\end{aligned}\right\}(i=1,\ 2)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3,\ 8)$$

故に $\widehat{K}=\dfrac{K_1}{K}\cdot\dfrac{\dot{K}_1}{K_1}+\dfrac{K_2}{K}\cdot\dfrac{\dot{K}}{K_2}=\dfrac{a_1\theta_1\widehat{K}_1+a_2\theta_2\widehat{K}_2}{a}$

同様に $\widehat{L}=\dfrac{b_1\theta_1\widehat{L}_1+b_2\theta_2\widehat{L}_2}{b}$　$\cdots\cdots\cdots$（3，9）

従って（2，15），（3，9）から

$$\widehat{Y}=R+a\widehat{K}+b\widehat{L}+\theta_1\widehat{p}+\theta_2\widehat{p}_2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3,\ 10)$$

故に（2，16）から

$$\begin{aligned}a\widehat{Y}_K+b\widehat{Y}_L&=mR+(m-1)(a\widehat{K}+b\widehat{L})+m(\theta_1\widehat{p}_1+\theta_2\widehat{p}_2)\\&=R+(m-1)\widehat{Y}+(\theta_1\widehat{p}+\theta_2\widehat{p}_2)\quad\cdots\cdots\cdots(3,\ 11)\end{aligned}$$

また（3，7），（3，4）から

$$a=\frac{mrK}{rK+wL}=\frac{m}{1+\dfrac{\omega}{k}}=\frac{mk}{k+\omega}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3,\ 12)$$

故に　$b=\dfrac{m\omega}{k+\omega}$

故に　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\omega}{k}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（3，13）

故に（3，12）より

$$\frac{da}{dk}=\frac{m\omega}{(\omega+k)^2}\left(1-\frac{k}{\omega}\ \frac{d\omega}{dk}\right)$$

然るに（2，13），（3，5）より

$$\rho=\frac{dk}{d\omega}\cdot\frac{\omega}{k}$$

故に　$\dfrac{da}{dk}=\dfrac{m\omega}{(\omega+k)^2}\cdot\dfrac{\rho-1}{\rho}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（3，14）

となり $\rho\lesseqgtr 1$ に従って $\dfrac{da}{dk}\lesseqgtr 0$ である[3]。即ち資本が労働に比して増大すれば，$\rho<1$ なら資本の生産弾力性（従って資本の分配率）は減少し，$\rho>1$ な

ら増加し，$\rho=1$ なら不変である。

また（3，1），（2，18）から

$$\frac{dk_i}{d\omega}=\rho_i\frac{k_i}{\omega}>0,\quad (i=1,\ 2)$$

$$\frac{dk}{d\omega}=\rho\frac{k}{\omega}>0$$

なる関係が成立する。即ち資本利潤率に比して賃金が増大すれば，各部門の資本（従って全体系の資本）は労働に比して増大する。

① （3，1）の$1-\eta$なる項は$m>1$のときの分配を可能ならしめるものである。従って，$\eta\neq0$ のときは各部門での利潤最大条件は成立していない。

② 木藤〔8〕P 494～497参照。そこでは仮定（I）のため均衡の存在が確保されている。

③ 各部門については勿論

$$a_i=\frac{mk_i}{k_i+\omega},\quad \frac{da_i}{dk_i}=\frac{m\omega}{(\omega+k_i)^2}\cdot\frac{\rho_i-1}{\rho_i}$$

等の関係が成立する。

4　Factor Augumenting の場合

さて（2，1）が Factor Augumenting である場合（以後FAである場合と略記する）即ち

$$Y_i=F_i\,(A_i(t)K_i,\ B_i(t)L_i),\quad (i=1,\ 2)\ \cdots\cdots\cdots\ (4,\ 1)$$

である場合について考える。そのときは

$$R_i=a_i\hat{A}_i+b_i\hat{B}_i$$

であるから，

$$R=\theta_1(a_1\hat{A}_1+b_1\hat{B}_1)+\theta_2(a_2\hat{A}_2+b_2\hat{B}_2)$$
$$=(a_1\theta_1\hat{A}_1+a_2\theta_2\hat{A}_2)+(b_1\theta_1\hat{B}_1+b_2\theta_2\hat{B}_2)$$

従ってもし

$$\frac{a_1\theta_1\hat{A}_1+a_2\theta_2\hat{A}_2}{a},\quad \frac{b_1\theta_1\hat{B}_1+b_2\theta_2\hat{B}_2}{b}$$

が，何れも t のみの関数であれば，

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_1\theta_1\hat{A}+a_2\theta_2\hat{A}_2}{a}=\hat{A}\\ \frac{b_1\theta_1\hat{B}_1+b_2\theta_2\hat{B}_2}{b}=\hat{B}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 2)$$

となる t の関数 $A(A)$，$B(t)$ が存在する。そのときは

$$R=a\hat{A}+b\hat{B} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 3)$$

となる。従って（３，３）は FA であると考えられる[1]。

さて

$$\frac{a_1\theta_1\hat{A}_1+a_2\theta_2\hat{A}_2}{a}=\frac{a_1\theta_1(\hat{A}_1-\hat{A}_2)}{a}+\hat{A}_2$$

$$\frac{b_1\theta_1\hat{B}_2+b_2\theta_2\hat{B}_2}{b}-\frac{b_1\theta_1(\hat{B}_1-\hat{B}_2)}{b}+\hat{B}_2$$

であるから，これらが t のみ関数であるためには，$\theta_1=s$ は t のみの関数であるから

$$\left.\begin{aligned}&\hat{A}_1=\hat{A}_2 \quad \text{或は}\frac{a_1}{a_2}\text{が } t \text{ のみの関数}\\ &\hat{B}_1=\hat{B}_2 \quad \text{或は}\frac{b_1}{b_2}\text{が } t \text{ のみの関数}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 4)$$

でなければならない。なお $\hat{A}_1=\hat{A}_2$，$\hat{B}_1=\hat{B}_2$ は $A_1=\lambda A_2$，$B_1=\mu B_2$，（λ，μ は定数）を意味するが，$\lambda=\mu=1$ と取り得るので結局は，

$$A_1=A_2=A,\ B_1=B_2=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 5)$$

となる。

〔定理１〕　第１部門および第２部門の生産関数が（４，１）であるとき，（４，４）が成立すれば，全体系は FA である。

さてこの定理を２，３の特別な場合について考えてみよう。

（Ⅰ）　Cobb−Douglas 生産関数の場合

（４，１）が

$$Y_i=C_i(t)K_i^{\alpha i}L_i^{\beta i},\quad (i=1,\ 2) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 5)$$

である場合を考える。ただし α_i, β_i は定数で

$$0<\alpha_i<1,\quad 0<\beta_i<1,\quad \alpha_i+\beta_i=m$$

であるとする。（4, 5）は$\boldsymbol{FA}$であって，

$$a_i=\alpha_i,\quad b_i=\beta_i$$

故に $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$

であって，これらは常数である。従って全体系も$\boldsymbol{FA}$である。

（Ⅱ）　CES生産関数の場合

（4, 1）が

$$Y_i=C_i(t)\{\beta_iK_i^{-\delta i}+\gamma_iL_i^{-\delta i}\}^{-\frac{m}{\delta i}},\quad (i=1,\ 2) \cdots\cdots\cdots (4,\ 6)$$

である場合を考える。ただし δ_i は0でない定数であって $\delta_i>-1$ であり，β_i, γ_i は何れも t の関数で $\beta_i\neq\gamma_i$ とする。従って（4, 6）は$\boldsymbol{FA}$である生産関数を示す。さて

$$Y_{iK}=m\beta_iY_iK_i^{-\delta i-1}\{\beta_iK_i^{-\delta 1}+\gamma_iL_i^{-\delta i}\}^{-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 7)$$

となる。従って

$$\left.\begin{aligned} a_i&=\frac{m\beta_i}{\beta_i+\gamma_ik_i^{\delta i}}\\ b_i&=\frac{m\gamma_ik_i^{\delta i}}{\beta_i+\gamma_ik_i^{\delta i}}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 8)$$

となる。また（3, 13）と同様な計算により

$$\frac{b_1}{a_1}k_1=\frac{b_2}{a_2}k_2 \quad (=\omega)$$

従って（4, 8）より

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\delta 1+1}k_2^{\delta 1-\delta 2}=\frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_2\gamma_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 9)$$

を得る。然るに（3, 8）より

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2}&=\frac{\theta_2}{\theta_1}\cdot\frac{K_1}{K_2}\\ \frac{b_1}{b_2}&=\frac{\theta_2}{\theta_1}\cdot\frac{L_1}{L_2}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4,\ 10)$$

であるから，もし$\frac{a_1}{a_2}$，$\frac{b_1}{b_2}$がtのみの関数であればK_1/K_2，L_1/L_2もtのみの関数であり，

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{K_1}{K_2}\Big/\frac{L_1}{L_2} \qquad (4,\ 11)$$

もまたtのみの関数である。従って（4，9）より$\delta_1 \neq \delta_2$ならk_2もまたtのみ関数である。従って（4，9）よりk_1もまたtのみの関数となる。なお$\delta_1=\delta_2$ならk_1/k_2は常にtのみの関数である。故に$\hat{A}_1=\hat{A}_2$，$\hat{B}_1=\hat{B}_2$の場合をのぞけば，全体系がFAであるのは，K_1/K_2，L_1/L_2がK，Lに無関係な場合である。

（Ⅲ）　ヒックスの中立的技術進歩の場合

（4，1）がヒックスの意味で中立的技術進歩をなすときは

$$A_i=B_i,\quad (i=1,\ 2) \qquad (4,\ 2)$$

である ②。

(イ)　$A_1=A_2$の場合

この場合は（4，12）となり$B_1=B_2$となり，前定理より全体系はFAであって$A=B$となる。従ってこの場合は当然全体系がヒックスの意味で中立的技術進歩をなす。

(ロ)　$A_1 \neq A_2$の場合

この場合は明らかに$B_1 \neq B_2$であり，$\frac{a_1}{a_2}$，$\frac{b_1}{b_2}$が何れもtの関数であるときのみ全体系はFAである。しかしそのとき全体系がヒックスの意味での中立的技術進歩をなすためには

$$\frac{a_1\theta_1\hat{A}_1+a_2\theta_2\hat{A}_2}{a}=\frac{b_1\theta_1\hat{B}_1+b_2\theta_2\hat{B}_2}{b}$$

でなければならない。従って（4，12）より

$$\left(\frac{a_1\theta_1}{a}-\frac{b_1\theta_1}{b}\right)\left(\hat{A}_1-\hat{A}_2\right)=0$$

故に　$$\frac{a_1\theta_1}{a}=\frac{b_1\theta_1}{b} \qquad (4,\ 13)$$

従って（3，8）から

$$\frac{K_1}{K}=\frac{L_1}{L} \quad \cdots\cdots (4,\ 14)$$

となる。従って（2，2）（2，3）より $k_2=k$ を得る。従って

$$k_2=k_1 \quad \cdots\cdots (4,\ 15)$$

となる。なお（3，12），（3，13）より

$$a_1=a_2,\ \ b_1=b_2 \quad \cdots\cdots (4,\ 16)$$

を得る。

また逆に（4，16）（或は（4，15））が成立するとき各部門がヒックスの意味で中立的技術進歩をなせば，全体系もヒックスの意味で中立的技術進歩をなす。何となれば（4，16）から前定理の仮定が成立し，$A_1=B_1$，$A_2=B_2$から$A=B$を得るからである。

〔定理２〕　各部門がヒックスの意味で中立的技術進歩をなすとき，全体系もそうであるための条件は

(イ)　$A_1=A_2$（又は$B_1=B_2$）

(ロ)　$A_1 \neq A_2$であって$k_1=k_2$

の何れかが成立することである。

（Ⅳ）　ハロッドの中立的技術進歩の場合

（4，1）がハロッドの意味で中立的技術進歩をなすときは

$$Y_i=c_i(t)K_i^{\alpha i}L_i^{\beta i},\quad (\alpha_i \neq 1) \quad \cdots\cdots (4,\ 17)$$

であるか$m=1$であって

$$Y_i=F_i\{K_i,\ B_i(t)L_i\} \quad \cdots\cdots (4,\ 18)$$

でなければならない[3]。何れの場合にしても$\hat{A}_1=\hat{A}_2=0$であるから，全体系がFAであるためには（4，4）の後半の条件のみが成立すればよい。その条件が成立するときは$\hat{A}=\hat{A}_1=\hat{A}_2=0$より全体系はハロッドの意味で中立的技術進歩をなす。さて両部門共に（4，17）であるときは（Ⅰ）の結果より（4，4）の条件は成立する。その他の場合は$\dfrac{b_1}{b_2}$がtのみの関数であれば（従ってL_1/L_2がtのみの関数であれば），（4，4）の条件は成立する。

〔定理３〕　各部門がハロッドの意味で中立的技術進歩をなすとき，全体系

が同様であるための条件は

(イ)　両部門の生産関数が，（4，17）で表わされる。

(ロ)　少くとも 1 つの部門が（4，17）で表わされないときは，$\frac{b_1}{b_2}$が t のみの関数である。

の何れかが我立することである。

① マクロ理論では（4，3）は（3，3）がFAであるための必要十分条件である（木藤〔9〕P.200）。しかし今の場合はY_K，Y_Lの定義が，マクロの場合と異るから，（4，3）を以てFAの定義とすべきである。（2，1）で考えられる技術進歩は価格変化には無関係なものである。然るに（3，3）では t の変化に対する価格変化も考慮している故，（3，3）より直接的に技術進歩を定義するのは適当でない。

② 木藤〔9〕P.198参照

③ 同上

5　体系の動学化

前々章より（2，1），（2，2），（2，3），（2，8），（3，1）から均衡の存在を仮定すれば，諸変数はK，L，t の関数として確定される。従って動学的な条件によってK，Lを想定することにより，そのモデルを動学化することができる。その条件として次の２個の仮定を設ける。

〔仮定３〕　$\dot{L}=\lambda L$ ……………………………………（5，1）

$\dot{K}=Y_1-\mu K$ ……………………………………（5，2）

（λ，μ は非負の定数で $\mu<1$）

〔仮定４〕　$s=s_0 l^{-\nu t}$ ……………………………………（5，3）

（ν，s_0 は定数で $\nu\geqq 0$，$0<s_0<1$）

（5，1）は労働の増加率が一定であることを示し，（5，2）は資本増加を規定するものである。（5，3）は貯蓄率が時間的に変化することを示すが，これは生産において技術進歩による変化を仮定したことに対応して，消費構造が変化することを仮定したものである。

（5，2）より

$$\hat{K}=\frac{Y_1}{K}-\mu$$

故に　$\dot{\hat{K}}=(\hat{K}+\mu)(\hat{Y}_1-\hat{K})$

然るに $p_1Y_1=s_0e^{-\nu t}Y$ であるから

$$\hat{Y}_1=\hat{Y}-\hat{p}_1-\nu$$

従って $\dot{\hat{K}}=(\hat{K}+\mu)(\hat{Y}-\hat{p}_1-\nu-\hat{K})$

故に（3，10），（5，1）より

$$\dot{\hat{K}}=(\hat{K}+\mu)\{R+(a-1)\hat{K}+b\lambda-\nu-\theta_2\hat{p}\} \quad \cdots\cdots (5,\ 4)$$

また（2，17），（5，1）より

$$\dot{a}=\frac{ab}{m}(\hat{Y}_K-\hat{Y}_L+\hat{K}-\lambda) \quad \cdots\cdots (5,\ 5)$$

さて技術進歩に関する仮定として，資本限界生産力の変動率 $\hat{Y}_K$ と労働限界生産力の変動率 $\hat{Y}_L$ との間には次の様な関係があるものとする。なお以後 $u=\hat{Y}_K$，$v=\hat{Y}_L$ とおく。

〔仮定5〕　u，v の間には

$$\left.\begin{array}{l} v=\varphi(u) \\ \varphi(o)>0,\ \varphi'(u)<0,\ \varphi''(u)<0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (5,\ 6)$$

なる関数が成立し，a＝一定のとき u，v は

$$S=\frac{au+bv}{m} \quad \cdots\cdots (5,\ 7)$$

を最大ならしめる。①

（5，7）において S は u，v の加重平均であるが，（3，11）より

$$S=\frac{au+bv}{m}=\frac{R+(m-1)\hat{Y}}{m}+\frac{\theta_1\hat{p}_1+\theta_2\hat{p}_2}{m} \quad \cdots\cdots (5,\ 8)$$

となり，$m=1$ で p_i＝一定（$i=1$，2）のときは S は技術進歩率 R と一致する。

さて仮定5より

$$\frac{dS}{du}=\frac{a+b\varphi'(u)}{m}=0 \quad \cdots\cdots (5,\ 9)$$

$$\frac{d^2S}{du^2}=\frac{b}{m}\varphi''(u)<0 \quad \cdots\cdots (5,\ 10)$$

（5，9）より

$$\varphi'(u)=-\frac{a}{m-a} \quad \cdots\cdots (5,\ 11)$$

故に u，v は a の関数として定まり

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{da}&=-\frac{m}{(m-a)^2\varphi''(u)}>0\\ \frac{dv}{da}&=\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{da}<0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5,\ 12)$$

となる。（3，11）から

$$R=\frac{au+bv-(m-1)(a\hat{K}+b\lambda)-m(\theta_1\hat{p}_1+\theta_2\hat{p}_2)}{m}$$

故に（5，4）から

$$\dot{\hat{K}}=(\hat{K}+\mu)\frac{m-a}{m}\left\{v-u+\lambda-\frac{m(\nu+\hat{p}_1-u)}{m-a}\right\}$$

また（2，17）から

$$\dot{a}=\frac{a(m-a)}{m}\{\hat{K}-(v-u+\lambda)\}$$

今

$$\left.\begin{aligned}G(a)&=v-u+\lambda\\ H(a)&=v-u+\lambda-\frac{m(\nu+\hat{p}_1-u)}{m-a}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5,\ 13)$$

とおけば

$$\left\{\begin{aligned}\dot{a}&=\frac{a(m-a)}{m}\{\hat{K}-G(a)\} \quad \cdots\cdots (5,\ 14)\\ \dot{\hat{K}}&=(\hat{K}+\mu)\frac{m-a}{m}\{H(a)-\hat{K}\} \quad \cdots\cdots (5,\ 15)\end{aligned}\right.$$

であって

$$G(a)-H(a)=\frac{m(\nu+\hat{p}_1-u)}{m-a} \quad \cdots\cdots (5,\ 16)$$

である。なお（5，12）から

$$G'(a)<0 \qquad (5, 17)$$

さて　$\widehat{Y}_i K = u_i$,　$(i=1, 2)$

とおけば（3，4）から

$$u = u_i + \widehat{p}_i, \quad (i=1, 2) \qquad (5, 18)$$

故に　$$H(a) = v - u + \lambda - \frac{m(\nu - u_1)}{m-a} \qquad (5, 19)$$

$$G(a) - H(a) = \frac{m(\nu - u_1)}{m-a} \qquad (5, 20)$$

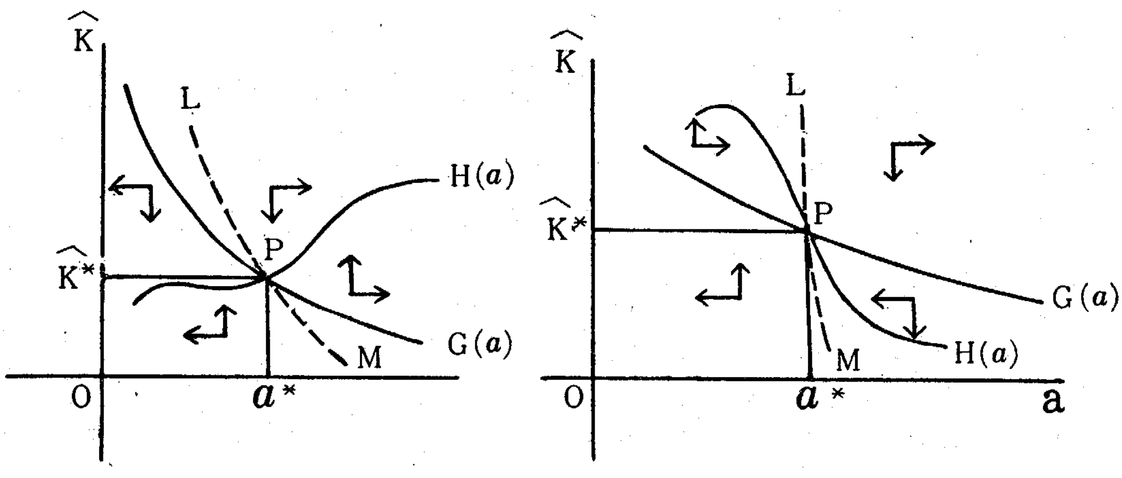
従って（5，9）とより

$$H'(a) = \frac{m(u_1 - \nu)}{(m-a)^2} - \frac{1}{u-a} \cdot \frac{d}{da}\widehat{p}_1 \qquad (5, 21)$$

従って（5，20），（5，14），（5，15）より $u_1 = \eta$ となる a の値が唯1つ存在するときは，唯1つの均衡解 $G(a^*) = H(a^*) = \widehat{K}^*$ が存在する。そのときは（5，17），（5，21）より，図に示すように均衡値は一般に不安定である（図において LPM に沿う径路のみが安定である）。なお（5，12），（5，18）より

$$\frac{du_1}{da} < 0, \qquad \frac{d\widehat{p}_1}{da} < 0$$

となる場合は起り得ない。



① Drandakis〔6〕および木藤〔9〕参照