Vacuously Transitive 関係の性質

橋 本 寛

1. はじめに

ブール行列を用いて vacuously transitive 関係[3][9]の基礎的性質を調べ，主として与えられたブール行列が vacuously transitive 関係行列となるための条件を示している。この vacuously transitive 関係は，アサイクリック有向グラフや推移関係とはもちろん，非反射関係，非対称的 (asymmetric) 関係，反対称的 (antisymmetric) 関係，さらには非推移 (intransitive) 関係[10]や巡回的 (circular) 関係[2]とも密接な関連をもち，応用上も二彩色 (bicoloring) 問題や二部グラフ (bipartite graph)[1]と関連している重要な関係である。これまでに Sharp によってその組合せ的問題とくに数え上げの問題に関する研究がおこなわれている。[9]

本論文では，従来ごくわずかしか知られていない vacuously transitive 関係の行列論的性質について考察をおこない，以下で示すような多くの興味ある性質を明らかにすることができた。この研究の動機はブール関係行列の推移性に関する研究から生じたものである。すなわち，与えられたブール行列が推移的となる条件を調べている過程で，ある条件を満たして推移的となる行列がある特定のものだけに限定され，それが vacuously transitive 関係と呼ばれるものに相当することに気づいたことから，この研究は始まったものである。したがって，本論文で述べる vacuously transitive 関係の性質はすでに報告している推移関係の性質[7]とかなりの部分で対応している。

2. 定　義

本論文では0，1の要素からなるn次のブール行列を取り扱っている。ブール行列に関する演算等の定義は文献(7)などと同様である。このブール行列によって有向グラフや二項関係を表現することができ[8]，もちろんvacuously transitive関係もブール行列で表現することができる。以下ではブール行列を用いてvacuously transitive関係の性質を調べる。

与えられた関係を表現するブール行列Rが，$R^2=O$または$(R\wedge\overline{I})^2=O$を満たすとき，$R$で表現される関係はvacuously transitiveであるといわれる[3][9]。ここにOは零行列，Iは単位行列，$\overline{I}$はその否定である。いまGolumbic[3]にならって$R^2=O$を満足するRをvacuously transitiveと呼ぶことにすれば，Rがvacuously transitiveのとき明らかにRはべき零すなわち$R^n=O$であり，また推移的すなわち$R^2\leqq R$である[8]。さらにRは非反射的$(R\wedge I=O)$で，非対称的$(R\wedge R'=O)$，したがって反対称的$(R\wedge R'\leqq I)$で，非推移的[10] $(R^2\leqq\overline{R})$で，そして巡回的[2] $(R^2\leqq R')$である。このようにvacuously transitive関係は二項関係の多くの基本的性質を有しており，興味深い関係である。

3. 基本的性質

ここではvacuously transitive関係の基本的性質を示す。それらの大部分は自明または容易に証明できるものであるが，これまでvacuously transitive関係のこのような性質について述べた文献は，ほとんど見当らないようであるので，ここで整理しておくことにする。

〔性質1〕

(1)　$R^2=O,\ S^2=O,\ R\times S=S\times R=O \Longleftrightarrow (R\vee S)^2=O$

(2)　$R^2=O,\ R\times S=S\times R \Longrightarrow (R\times S)^2=O$

(3)　$S \times R = O \Longrightarrow (R \times S)^2 = O$

（証明）

(1)　一般に

$(R \vee S)^2 = R^2 \vee R \times S \vee S \times R \vee S^2$

であるから明らかである。

(2)　$(R \times S)^2 = R \times S \times R \times S$

$= R^2 \times S^2 = O$

(3)　$(R \times S)^2 = R \times S \times R \times S = O$　（証明終）

〔例１〕(1)いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおく。このとき明らかに $R^2 = O$, $S^2 = O$, $R \times S = S \times R = O$。また

$$(R \vee S)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。

(2)

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば，明らかに $R^2 = O$ であり，また

$$R \times S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S\times R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$(R\times S)^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}。$$

(3)

$$S=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

とおけば，このとき

$$S\times R=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$R\times S=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$(R\times S)^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}。$$

次の性質もほとんど自明であり，またいくつかのものはよく知られていると思われる。

〔性質2〕

(1)　$(R'\times R)\wedge I=O \iff R=O$

(2)　$(R\times R')\wedge I=O \iff R=O$

(3)　$R'\times R=O \iff R=O$

(4)　$R \times R' = O \Longleftrightarrow R = O$

(5)　$R^2 \wedge I = O,\ R' = R \Longleftrightarrow R = O$

(6)　$R^2 \leqq R,\ R \wedge I = O,\ R' = R \Longleftrightarrow R = O$

(7)　$R^2 = R,\ R \wedge I = O \Longleftrightarrow R = O$

(8)　$R^2 = O,\ R' = R \Longleftrightarrow R = O$

(9)　$R^2 = O,\ R' \times R = R \times R' \Longleftrightarrow R = O$

(証明)

(1)　(a)　$(R' \times R) \wedge I = O$ のとき

$$\bigvee_{k=1}^{n} r_{ki} \wedge r_{ki} = 0$$

したがって $r_{ki} = 0$ すなわち $R = O$。

(b)　$R = O$ のとき

明らかに $(R' \times R) \wedge I = O$

(2)—(8)省略

(9)　(a)　$R^2 = O,\ R' \times R = R \times R'$ のとき

性質 1 (2)によって $(R' \times R)^2 = O$。$R' \times R$ は対称だから上記の(8)によって $R' \times R = O$。また上の(3)によって $R = O$。

(b)　$R = O$ のとき

明らかに $R^2 = O,\ R' \times R = R \times R'$。　(証明終)

〔性質 3〕[5][6]

次の条件は同値である。

(1)　$R^2 \wedge I = O$

(2)　$R \wedge R' = O$

(3)　$R \leqq \overline{R'}$

(4)　$\triangle R = R$

〔性質 4〕

$R^2 = O$ のとき

(1)　$R \wedge R' = O$

(2)　$R \leqq \overline{R'}$

(3)　$\triangle R = R$

(証明)

性質3による。　(証明終)

〔性質5〕

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 = O \Longrightarrow R^2 \leqq R$

(2)　$R^2 = O \Longrightarrow (R \vee I)^2 = R \vee I$

(証明)

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \leqq R \wedge \overline{I}$ であるから

$$((R \wedge \overline{I}) \vee (R \wedge I))^2 \leqq (R \wedge \overline{I}) \vee (R \wedge I)$$

よって $R^2 \leqq R$。

(2)　$(R \vee I)^2 = (R \vee I) \times (R \vee I)$

$$= R^2 \vee R \vee R \vee I = R \vee I$$

(証明終)

一般に $R^2 \leqq R$, $D \leqq I$ のとき $(R \vee D)^2 \leqq (R \vee D)$ となる。

〔性質6〕

$R \wedge \overline{I} \leqq S$, $S' = S$, $S^2 \leqq R \vee I$ のとき

$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 = O$

(証明)

(1)　$(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ のとき

$r_{ik} \wedge \overline{\delta_{ik}} \wedge r_{kj} \wedge \overline{\delta_{kj}} = 1$ とおく。このとき

$r_{ik} = 1$, $i \neq k$, $r_{kj} = 1$, $k \neq j$。

したがって $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ によって $i \neq j$。また $(R \wedge \overline{I})^2 \leqq S^2$ によって $s_{ij}{}^{(2)} = s_{ji}{}^{(2)} = 1$ となるので, $r_{ij} = r_{ji} = 1$。しかしこれは $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ と矛盾する。ゆえに $(R \wedge \overline{I})^2 = O$。

(2)　$(R \wedge \overline{I})^2 = O$ のとき

明らかに $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$。　(証明終)

〔例 2〕

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

とおけば，$R\wedge\overline{I}\leqq S$，$S'=S$，$S^2\leqq R\vee I$，$(R\wedge\overline{I})^2=O$ となる。

次の性質で示されるように，上の性質 6 を満足する行列 S は $S^2\leqq I$ を満たす。

〔性質 7〕

$S'=S$，$S^2\leqq R\vee I$，$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O \Longrightarrow S^2\leqq I$

(証明)

$S'=S$ なので $S^2\leqq R\vee I$ から $S^2\leqq R'\vee I$。したがって

$$S^2\leqq(R\vee I)\wedge(R'\vee I)=R\wedge R'\vee R\wedge I\vee I$$

ところで $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ によって

$$(R\wedge\overline{I})'\wedge(R\wedge\overline{I})=O$$

すなわち $R'\wedge R\leqq I$。よって $S^2\leqq I$。　(証明終)

〔性質 8〕

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge R'\vee I$，$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(証明)(1)$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge R'\vee I$，$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ のとき

$r_{ik}\wedge\overline{\delta_{ik}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{\delta_{kj}}=1$ とおく。このとき

$$r_{ik}=1,\ i\neq k,\ r_{kj}=1,\ k\neq j。$$

したがって $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ から $i\neq j$。また $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge R'\vee I$ によって $r_{ij}\wedge r_{ji}=1$。しかし，これは $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ と矛盾する。ゆえに $(R\wedge\overline{I})^2=O$。

(2)　$(R\wedge\overline{I})^2=O$ のとき

明らかに $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R\wedge R'\vee I$，$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$。　(証明終)

〔性質9〕

$R^2 \leqq R \wedge R'$, $R \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 = O$

(証明)

(1)　$R^2 \leqq R \wedge R'$, $R \wedge I = O$ のとき

$R^2 \leqq R$, $R \wedge I = O$ によって $R \wedge R' = O$。したがって $R^2 = O$。

(2)　$R^2 = O$ のとき

明らかに $R^2 \leqq R \wedge R'$, $R \wedge I = O$。　(証明終)

なお，$R^2 \leqq R'$, $R \wedge I = O \Longrightarrow R^2 = O$ とはいえない。いま

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，$R^2 \leqq R'$, $R \wedge I = O$ であるけれども $R^2 = O$ とはならない。

〔性質10〕

(1)　$n \leqq 2$ のとき

$R^2 \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 = O$

(2)　$(\triangle R)^2 \wedge I = O$

(3)　$n \leqq 2$ のとき　$(\triangle R)^2 = O$

(証明)

(1)　$n=1$ のときは明らかであるから $n=2$ とする。$S = R^2$ とおく。このとき

$s_{ij} = r_{i1} \wedge r_{1j} \vee r_{i2} \wedge r_{2j}$

(a)　$R^2 \wedge I = O$ のとき

$R^2 \wedge I = O$ から $R \wedge R' = O$, $R \wedge I = O$。

(i)　$i=1$, $j=2$ のとき

$s_{ij} = r_{11} \wedge r_{12} \vee r_{12} \wedge r_{22} = 0$

(ii)　$i=2$, $j=1$ のとき

$s_{ij} = r_{21} \wedge r_{11} \vee r_{22} \wedge r_{21} = 0$

(iii)　$i=j$ のとき

$$s_{ij}=r_{i1}\wedge r_{1i}\vee r_{i2}\wedge r_{2i}=0$$

(b)　$R^2=O$ のとき

明らかに $R^2\wedge I=O$。

(2)　$S=(\triangle R)^2$ とおく。

$$s_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n} r_{ik}\wedge \overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}\wedge \overline{r_{jk}}$$

$$s_{ii}=\bigvee_{k=1}^{n} r_{ik}\wedge \overline{r_{ki}}\wedge r_{ki}\wedge \overline{r_{ik}}=0$$

(3)　上の(1)および(2)による。　(証明終)

〔性質11〕

(1)　$(\triangle R)^2=O$ のとき

$$\triangledown R\leqq I \iff R^2\leqq \triangle R\vee (R\wedge I)$$

(2)　$(\triangle R)^2=O,\ \triangledown R\leqq I \Longrightarrow R^2\leqq R$

(証明)

(1)　(a)　$\triangledown R\leqq I$ のとき

$$\begin{aligned} R^2&=(\triangle R\vee \triangledown R)^2\\ &=(\triangle R)^2\vee \triangle R\times \triangledown R\vee \triangledown R\times \triangle R\vee (\triangledown R)^2\\ &\leqq \triangle R\vee \triangledown R=\triangle R\vee (R\wedge I)\end{aligned}$$

(b)　$R^2\leqq \triangle R\vee (R\wedge I)$ のとき

$r_{ij}=r_{ji}=1$, $i\neq j$ とすれば, $r_{ii}=1$, $r_{ij}^{(2)}=r_{ji}^{(2)}=1$。$\triangle R$ は非対称的であるので, これは矛盾する。よって $\triangledown R\leqq I$。

(2)　一般に $\triangle R\vee (R\wedge I)\leqq R$ だから(1)によって $R^2\leqq R$。　(証明終)

〔例 3〕

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

とおけば，明らかに $(\triangle R)^2=O$，$\triangledown R\leqq I$，$R^2\leqq\triangle R\vee(R\wedge I)$，$R^2\leqq R$。

4. Vacuously Transitive 関係の主要な性質

与えられたブール行列が vacuously transitive 関係行列となるための条件について述べる。以下で述べる性質は大別すると，与えられたブール行列Rに関して，$R^2=O$ となるための条件，$(R\wedge\overline{I})^2=O$ となるための条件，および $(\triangle R)^2=O$ となるための条件の三つに関するものとなっている。また，与えられた条件が強くて，Rが零行列となったり，またそのような条件を満たす例が存在しなくなる場合があるが，そのような条件についても若干の考察をおこなっている。

〔性質12〕

$(\triangle R)^2\leqq R'\vee I$ のとき

(1) $R^2\leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2) $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(3) $R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(証明)

(1) $r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}=1$ とおく。

このとき $i\neq k$，$j\neq k$，$i\neq j$。$(\triangle R)^2\leqq R'\vee I$ から $r_{ji}=1$。また $R^2\leqq R$ によって $r_{jk}=1$ となるが，これは $r_{jk}=0$ と矛盾している。ゆえに $(\triangle R)^2=O$。

(2) $r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}=1$ とおく。このとき $i\neq k$，$k\neq j$，$i\neq j$。$(\triangle R)^2\leqq R'\vee I$ から $r_{ji}=1$。しかし $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$ によって $r_{ji}=0$。これは矛盾する。したがって $(\triangle R)^2=O$。

(3) 上の(2)によって明らかである。 (証明終)

上の性質12(2)から $(\triangle R)^2\leqq R'\vee I$ のとき，$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$ であれば $(\triangle R)^2=O$ となるが，次の性質13で示すように，さらに $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ であれば $(R\wedge\overline{I})^2=O$ となる。

〔性質13〕

(1)　$(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$，$((R \wedge \overline{I})^2 \vee (R \wedge \overline{I})^3) \wedge I = O \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 = O$

(2)　$(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$，$(R \wedge \overline{I})^6 \wedge I = O \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 = O$

(3)　$(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$，$(R \wedge \overline{I})^n = O \Longleftrightarrow (R \wedge \overline{I})^2 = O$

(証明)

(1)　(a)　$(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$，$((R \wedge \overline{I})^2 \vee (R \wedge \overline{I})^3) \wedge I = O$ のとき

$r_{ik} \wedge \overline{\delta_{ik}} \wedge r_{kj} \wedge \overline{\delta_{kj}} = 1$ とおく。このとき $i \neq k$，$k \neq j$。また $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ によって $i \neq j$，$r_{ki} = 0$，$r_{jk} = 0$。さらに $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$ によって $r_{ji} = 0$。しかし，$r_{ik} \wedge \overline{r_{ki}} \wedge r_{kj} \wedge \overline{r_{jk}} = 1$ だから，$(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$ によって $r_{ji} = 1$。これは矛盾する。よって $r_{ik} \wedge \overline{\delta_{ik}} \wedge r_{kj} \wedge \overline{\delta_{kj}} = 0$。すなわち $(R \wedge \overline{I})^2 = O$。

(b)　$(R \wedge \overline{I})^2 = O$ のとき

$\triangle R \leqq R \wedge \overline{I}$ だから $(\triangle R)^2 = O$。よって $(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$。また明らかに $((R \wedge \overline{I})^2 \vee (R \wedge \overline{I})^3) \wedge I = O$。

(2)—(3)上の(1)による。　(証明終)

一般に $(R \wedge \overline{I})^2 \wedge I = O$ のとき $R \wedge \overline{I} = \triangle R$ となる(7)。したがって上の性質13(1)の $((R \wedge \overline{I})^2 \vee (R \wedge \overline{I})^3) \wedge I = O$ は $((R \wedge \overline{I})^2 \vee (\triangle R)^3) \wedge I = O$ と同値である。

〔性質14〕

(1)　$(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$，$(R^2 \vee R^3) \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 = O$

(2)　$(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$，$R^6 \wedge I = O \Longleftrightarrow R^2 = O$

(3)　$(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$，$R^n = O \Longleftrightarrow R^2 = O$

(証明)性質13による。　(証明終)

〔性質15〕

$(\triangle R)^2 \leqq R'$ のとき

(1)　$R^2 \leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2 = O$

(2)　$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O \Longrightarrow (\triangle R)^2 = O$

(3)　$R^3 \wedge I = O \Longrightarrow (\triangle R)^2 = O$

〔性質16〕

(1)　$(\triangle R)^2 \leqq R'$，$((R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3)\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(2)　$(\triangle R)^2 \leqq R'$，$(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(3)　$(\triangle R)^2 \leqq R'$，$(R\wedge\overline{I})^n=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

〔性質17〕

(1)　$(\triangle R)^2 \leqq R'$，$(R^2\vee R^3)\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(2)　$(\triangle R)^2 \leqq R'$，$R^6\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(3)　$(\triangle R)^2 \leqq R'$，$R^n=O \Longleftrightarrow R^2=O$

〔性質18〕

$(R\wedge\overline{I})^2 \leqq R'\vee I$ のとき

(1)　$R^2\leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(3)　$R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

〔性質19〕

(1)　$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'\vee I$，$((R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3)\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'\vee I$，$(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(3)　$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'\vee I$，$(R\wedge\overline{I})^n=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(証明)性質13による。　　(証明終)

〔性質20〕

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'$ のとき

(1)　$R^2\leqq R \Longleftrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(証明)

(1)　(a)　$R^2\leqq R$ のとき

性質12(1)によって $(\triangle R)^2=O$

(b)　$(\triangle R)^2=O$ のとき

$r_{ik}=r_{kj}=1$ とおき，$r_{ij}=1$ となることを示す。

(i)　$i=k$ のとき

$r_{ij}=r_{kj}=1$

(ii) $k=j$ のとき

$r_{ij}=r_{ik}=1$

(iii) $i\neq k$, $k\neq j$ のとき

$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'$ によって $r_{ji}=1$。いま $r_{ij}=0$ とすれば，$(\triangle R)^2=O$ によって $r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}\wedge r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}=0$ であるから $r_{ki}=1$。同様に $r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}\wedge r_{ji}\wedge\overline{r_{ij}}=0$ であるから $r_{jk}=1$。よって $r_{ij}=1$ となるが，これは $r_{ij}=0$ と矛盾する。したがって $r_{ij}=1$ でなければならない。

(2) 省略。 (証明終)

なお，上記の性質20(2)から，$(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'$ のとき

$$R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$$

が成立し，さらに $R^3\wedge I=O$ のとき $R\wedge I=O$ だから，$R\wedge\overline{I}=R$ となるので

$$R^2\leqq R',\ R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$$

が得られる。しかし先で示す性質27(1)によれば，一般に

$$R^2\leqq R',\ R^3\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$$

が成立する。

〔性質21〕

(1) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'$, $((R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3)\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(2) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'$, $(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(3) $(R\wedge\overline{I})^2\leqq R'$, $(R\wedge\overline{I})^n=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

〔性質22〕

$R^2\leqq R'\vee I$ のとき

(1) $R^2\leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2) $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(3) $R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

〔性質23〕

$R^2\leqq R'\vee I$ のとき

(1)　$((R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3)\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(3)　$(R\wedge\overline{I})^n=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(証明)性質19による。　(証明終)

〔性質24〕

(1)　$R^2\leqq R'\vee I$，$(R^2\vee R^3)\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(2)　$R^2\leqq R'\vee I$，$R^6\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(3)　$R^2\leqq R'\vee I$，$R^n=O \Longleftrightarrow R^2=O$

〔性質25〕

$R^2\leqq R'$ のとき

(1)　$R^2\leqq R \Longleftrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(証明)性質20による。　(証明終)

上の性質25(2)からも，$R^2\leqq R'$ のとき，

$$R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$$

となることがいえるが，すでに述べたように先で示す性質27(1)によれば，

$$R^2\leqq R',\ R^3\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$$

が成立する。

〔性質26〕

$R^2\leqq R'$ のとき

(1)　$((R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3)\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(3)　$(R\wedge\overline{I})^n=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

〔性質27〕

(1)　$R^2\leqq R'$，$R^3\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(2)　$R^2\leqq R'$，$R^6\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(3)　$R^2\leqq R'$，$R^n=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(証明)

(1)　(a)　$R^2 \leqq R'$，$R^3 \wedge I = O$ のとき

$r_{ik} \wedge r_{kj} = 1$ とおく。$R^2 \leqq R'$ によって $r_{ji} = 1$。しかし，これは $R^3 \wedge I = O$ と矛盾する。ゆえに $R^2 = O$。

(b)　$R^2 = O$ のとき

明らかに $R^2 \leqq R'$，$R^3 \wedge I = O$。

(2)—(3)性質24による。　(証明終)

上記の性質中の $R^2 \leqq R'$ なるRは巡回的 (circular) 関係[2]を表現するブール行列である。なお，$R^3 \wedge I = O$ は $R^2 \leqq \overline{R'}$ と同値であるので，これと $R^2 \leqq R'$ から $R^2 = O$ を導くこともできる。

〔性質28〕

$(\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \leqq R \vee I$ のとき

(1)　$R^2 \leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2 = O$

(2)　$(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O \Longrightarrow (\triangle R)^2 = O$

(3)　$R^3 \wedge I = O \Longrightarrow (\triangle R)^2 = O$

(証明)

明らかに $(\overline{R} \wedge \overline{I})^2 \leqq R \vee I$ のとき $(\overline{R'} \wedge \overline{I})^2 \leqq R' \vee I$ であるから $(\triangle R)^2 \leqq R' \vee I$ となる。したがって性質12によって成立する。　(証明終)

〔例４〕 (1)—(2)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば，このとき

$$(\overline{R} \wedge \overline{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R。$$

また明らかに $R^2=R$，$\triangle R=O$，$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$。

(3)

$$R=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

とおく。このとき

$$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}=R\vee I。$$

また $R^3\wedge I=O$，$\triangle R=O$。

〔性質29〕

$n\geqq 3$ のとき，$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$ かつ $((R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3)\wedge I=O$ となる Rは存在しない。

(証明)

$i\neq j\neq k\neq i$ とする。$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ によって次の場合を考えればよい。

(1)　$r_{ij}=0$，$r_{ji}=0$ のとき

(a)　$r_{ik}=0$ のとき

(i)　$r_{kj}=0$ のとき

$r_{ik}=0$，$r_{kj}=0$ により $r_{ij}=1$ となるが，これは矛盾する。

(ii)　$r_{jk}=0$ のとき

$r_{ij}=0$，$r_{jk}=0$ によって $r_{ik}=1$ となるが，これは矛盾する。

(b)　$r_{ki}=0$ のとき

(i)　$r_{kj}=0$ のとき

$r_{kj}=0$，$r_{ji}=0$ によって $r_{ki}=1$ となるが，これは矛盾する。

(ii)　$r_{jk}=0$ のとき

$r_{jk}=0$，$r_{ki}=0$ によって $r_{ji}=1$ となるが，これは矛盾する。

(2)　$r_{ij}=0$，$r_{ji}=1$ のとき

(a)　$r_{ik}=0$ のとき

(i)　$r_{kj}=0$ のとき

$r_{ik}=0$, $r_{kj}=0$ によって $r_{ij}=1$ となるが，これは矛盾する。

(ii)　$r_{jk}=0$ のとき

$r_{ij}=0$, $r_{jk}=0$ によって $r_{ik}=1$ となるが，これは矛盾する。

(b)　$r_{ik}=1$, $r_{ki}=0$ のとき

$r_{ki}=0$, $r_{ij}=0$ によって $r_{kj}=1$ となるが，これは $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$ と矛盾する。

(3)　$r_{ij}=1$, $r_{ji}=0$ のとき

(a)　$r_{ik}=0$, $r_{ki}=1$ のとき

$r_{ji}=0$, $r_{ik}=0$ によって $r_{jk}=1$ となるが，これは $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$ と矛盾する。

(b)　$r_{ki}=0$ のとき

(i)　$r_{kj}=0$ のとき

$r_{kj}=0$, $r_{ji}=0$ によって $r_{ki}=1$ となるが，これは矛盾する。

(ii)　$r_{jk}=0$ のとき

$r_{jk}=0$, $r_{ki}=0$ によって $r_{ji}=1$ となるが，これは矛盾する。

こうして，$n\geqq 3$ のとき与えられた条件を満足する R は存在しない。

(証明終)

〔性質30〕

$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2\leqq R$ のとき

(1)　$R^2\leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(3)　$R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

〔例5〕

(1)
$$R=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

とおく。このとき明らかに $R^2=R$ で,

$$\overline{R}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \overline{R}\wedge\overline{I}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \triangle R=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}。$$

したがって $(\overline{R}\wedge\overline{I})^2=O$, $(\triangle R)^2=O$。

(2)
$$R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

とおけば,

$$(\overline{R}\wedge\overline{I})^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=R。$$

また明らかに $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$, $\triangle R=O$。

(3)
$$R=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

とおく。このとき $(\overline{R}\wedge\overline{I})^2=O$ で

$$R^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$R^3=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}=R$$

$$(\triangle R)^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

〔性質31〕

$(\overline{R})^2\leqq R\vee I$ のとき

(1)　$R^2\leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(3)　$R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(証明)性質28による。　(証明終)

〔例 6〕

(1)−(2)

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

とおけば，明らかに $R^2\leqq R$，$\triangle R=O$ であって，また

$$(\overline{R})^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}=R。$$

$$(R\wedge\overline{I})^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$(R\wedge\overline{I})^3=R\wedge\overline{I}$

(3)

$$R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

とおけば，明らかに $(\overline{R})^2\leqq R\vee I$ かつ $R^3\wedge I=O$ で $(\triangle R)^2=O$ となる。

すでに示した性質29によって $n\geqq3$ のとき $(\overline{R})^2\leqq R\vee I$ かつ $((R\wedge\overline{I})^2\vee(R\wedge\overline{I})^3)\wedge I=O$ となるRは存在しない。また $n\geqq2$ のとき，$(\overline{R})^2\leqq R\vee I$, $(R^2\vee R^3)\wedge I=O$ なるRは次の性質によって存在しない。

〔性質32〕

$n\geqq2$ のとき，$(\overline{R})^2\leqq R\vee I$ かつ $R^2\wedge I=O$ となるRは存在しない。

(証明)

$R^2\wedge I=O$ から $R\wedge I=O$。いま $i\neq j$ とする。

(1)　$r_{ij}=0$ のとき

$\overline{r_{ii}}\wedge\overline{r_{ij}}=1$ だから $r_{ij}=1$。しかしこれは $r_{ij}=0$ と矛盾する。

(2)　$r_{ij}=1$ のとき

$R^2\wedge I=O$ によって $r_{ji}=0$。したがって $\overline{r_{ji}}\wedge\overline{r_{ii}}=1$ によって $r_{ji}=1$ となるが，これは $r_{ji}=0$ と矛盾する。　(証明終)

〔性質33〕

$(\overline{R})^2\leqq R$ のとき

(1)　$R^2\leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

〔例7〕

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

とおけば，

$$(\overline{R})^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}=R,$$

$$(R\wedge\overline{I})^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$(R\wedge\overline{I})^3=R\wedge\overline{I}$, $R^2=R$, $\triangle R=O$。

$(\overline{R})^2\leqq R$ かつ $R^3\wedge I=O$ となるRは次の性質によって存在しない。なお，$(\overline{R})^2\leqq R$ のRを$\overline{S}$で置き換えれば $S^2\leqq\overline{S}$ となるが，このときのSは非推移的 (intransitive) 関係(10)を表現するブール行列である。

〔性質34〕

$(\overline{R})^2\leqq R$ かつ $R\wedge I=O$ となるRは存在しない。

(証明)

$(\overline{R})^2\leqq R$ によって $R\wedge I=I$ となり，これは $R\wedge I=O$ と矛盾する。

(証明終)

〔性質35〕

$((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(証明) $r_{ik}\wedge\overline{r_{ki}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{r_{jk}}=1$ とおく。このとき $i\neq k$, $k\neq j$, $i\neq j$。$((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$ から $((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R'\vee I$。したがって，$r_{ik}=r_{kj}=1$ なので $r_{ji}=1$。また，このとき $((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$ から $r_{jk}=1$。しかし，これは $r_{jk}=0$ と矛盾する。よって $(\triangle R)^2=O$。 (証明終)

〔性質36〕

$((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$ のとき

(1) $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(2) $(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(3) $(R\wedge\overline{I})^n=O \Longleftrightarrow (R\wedge\overline{I})^2=O$

(証明)

(1) (a) $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ のとき

$r_{ik}\wedge\overline{\delta_{ik}}\wedge r_{kj}\wedge\overline{\delta_{kj}}=1$ とおく。このとき $r_{ik}=1$, $i\neq k$, $r_{kj}=1$, $k\neq j$。したがって $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ から $i\neq j$。よって $((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R\vee I$ から $r_{ij}=1$。また $((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R'\vee I$ となるから $r_{ji}=1$。しかしこれは $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ と矛盾する。ゆえに $(R\wedge\overline{I})^2=O$。

(b)　$(R\wedge\overline{I})^2=O$ のとき

明らかに $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$。

(2)—(3)省略　　(証明終)

〔例8〕

$$R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

とおけば,

$$((R\vee R')\wedge\overline{I})^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\leqq R\vee I$$

$$(R\wedge\overline{I})^2=(R\wedge\overline{I})^6=(R\wedge\overline{I})^n=O$$

となる。

〔性質37〕

$((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R \implies (\triangle R)^2=O$

(証明)　性質35による。　　(証明終)

〔性質38〕

$((R\vee R')\wedge\overline{I})^2\leqq R$ のとき

(1)　$(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O \iff (R\wedge\overline{I})^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \iff (R\wedge\overline{I})^2=O$

(3)　$(R\wedge\overline{I})^n=O \iff (R\wedge\overline{I})^2=O$

〔性質39〕

$(R\vee R')^2\leqq R\vee I \implies (\triangle R)^2=O$

(証明) 性質35による。 (証明終)

〔性質40〕

$(R\vee R')^2\leqq R\vee I$ のとき

(1) $(R\wedge \overline{I})^2\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge \overline{I})^2=O$

(2) $(R\wedge \overline{I})^6\wedge I=O \Longleftrightarrow (R\wedge \overline{I})^2=O$

(3) $(R\wedge \overline{I})^n=O \Longleftrightarrow (R\wedge \overline{I})^2=O$

〔性質41〕

$(R\vee R')^2\leqq R\vee I$ のとき

(1) $R^2\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(2) $R^6\wedge I=O \Longleftrightarrow R^2=O$

(3) $R^n=O \Longleftrightarrow R^2=O$

〔性質42〕

$(R\vee R')^2\leqq R$ のとき

(1) $R'=R$

(2) $\triangle R=O$

(3) $R^2=R$

(証明)

$S=R\vee R'$ とおく。すなわち $s_{ij}=r_{ij}\vee r_{ji}$。

(1) $r_{ij}=1$ とする。このとき $s_{ij}=r_{ij}\vee r_{ji}=1$, $s_{ji}=r_{ji}\vee r_{ij}=1$。また $s_{ii}^{(2)}\geqq s_{ij}\wedge s_{ji}=1$。したがって $r_{ii}=1$, $s_{ii}=1$ となるから $s_{ji}^{(2)}\geqq s_{ji}\wedge s_{ii}=1$。よって $r_{ji}=1$。ゆえに $R\leqq R'$ すなわち $R'=R$。

(2) $\triangle R=R\wedge \overline{R'}=O$

(3) $R^2\leqq (R\vee R')^2$ だから $R^2\leqq R$。また(1)から $R'=R$ であるので $R^2=R$ となる。 (証明終)

一般に対称かつ推移的な行列 R は $R^2=R$ すなわちべき等となる[4]。なお，上の性質42により

$$(R\vee R')^2\leqq R \Longleftrightarrow R'=R,\ R^2\leqq R$$

が成立する。

〔性質43〕

(1)　$(R\vee R')^2\leqq R,\ (R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O \iff R\wedge\overline{I}=O$

(2)　$(R\vee R')^2\leqq R,\ (R\wedge\overline{I})^6\wedge I=O \iff R\wedge\overline{I}=O$

(3)　$(R\vee R')^2\leqq R,\ (R\wedge\overline{I})^n=O \iff R\wedge\overline{I}=O$

(証明)

(1)　(a)　$(R\vee R')^2\leqq R,\ (R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ のとき

$r_{ij}\wedge\overline{\delta_{ij}}=1$ とおく。このとき $r_{ij}=1,\ i\neq j$。また $(r_{ij}\vee r_{ji})\wedge(r_{ji}\vee r_{ij})=1$ から $r_{ii}=1$。したがって $(R\vee R')^2\leqq R'$ によって $r_{ji}=1$。このとき $r_{ij}\wedge r_{ji}=1$ となり $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$ と矛盾する。

(b)　$R\wedge\overline{I}=O$ のとき

明らかに $(R\wedge\overline{I})^2\wedge I=O$。また $R\leqq I$ だから $(R\vee R')^2\leqq R$。

(2)—(3)省略　(証明終)

〔性質44〕

(1)　$(R\vee R')^2\leqq R,\ R\wedge I=O \iff R=O$

(2)　$(R\vee R')^2\leqq R,\ R^2=O \iff R=O$

(3)　$(R\vee R')^2\leqq R,\ R^3=O \iff R=O$

(証明)　(1)　(a)　$(R\vee R')^2\leqq R,\ R\wedge I=O$ のとき

いま $r_{ij}=1$ とすれば $(r_{ij}\vee r_{ji})\wedge(r_{ji}\vee r_{ij})=1$ だから $r_{ii}=1$。しかし，これは $R\wedge I=O$ と矛盾する。よって $R=O$

(b)　$R=O$ のとき

明らかに $(R\vee R')^2\leqq R,\ R\wedge I=O$

(2)—(3)省略　(証明終)

〔性質45〕

$((R\vee\overline{R'})\wedge\overline{I})^2\leqq R'\vee I$ のとき

(1)　$R^2\leqq R \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(2)　$(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(3)　$R^3\wedge I=O \Longrightarrow (\triangle R)^2=O$

(証明)　性質28による。　(証明終)

上記の性質45(1)に関しては，次の性質46によって，$n \geqq 3$ のとき $((R \vee \overline{R'}) \wedge \overline{I})^2 \leqq R' \vee I$ かつ $R^2 \leqq R$ となるRは，$R=E$ すなわち全要素が1の行列となる。また(2)，(3)を満足する行列Rは，以下で示す性質47によって $n \geqq 3$ のときは存在しない。もしRを1次または2次の行列とすれば，すでに示している性質10(3)によって，一般に $(\triangle R)^2=O$ となる。また $n \leqq 2$ であれば，性質10(1)によって $R^2 \wedge I=O$ のとき $R^2=O$ となる。

〔性質46〕

$n \geqq 3$ のとき

$((R \vee \overline{R'}) \wedge \overline{I})^2 \leqq R' \vee I$，$R^2 \leqq R \iff R=E$

(証明)

(1) $((R \vee \overline{R'}) \wedge \overline{I})^2 \leqq R' \vee I$，$R^2 \leqq R$ のとき

$i \neq j \neq k \neq i$ とする。また $S=(R' \vee \overline{R}) \wedge \overline{I}$ とおけば，$S^2 \leqq R \vee I$，$s_{ij}=(r_{ji} \vee \overline{r_{ij}}) \wedge \overline{\delta_{ij}}$。いま $r_{ij}=0$ とする。このとき $s_{ij}=1$。

(a) $r_{jk}=0$ のとき

$s_{ij}=1$，$s_{jk}=1$ だから $r_{ik}=1$。また $s_{ki}=1$，$s_{ij}=1$ によって $r_{kj}=1$。したがって $R^2 \leqq R$ から $r_{ij}=1$ となるが，これは矛盾する。

(b) $r_{jk}=1$ のとき

このとき $s_{kj}=1$。

(i) $r_{ki}=0$ のとき

このとき $s_{ki}=1$ で，また $s_{ij}=1$ だから $r_{kj}=1$。これから $s_{jk}=1$ となり，$r_{ji}=1$ となる。このとき $R^2 \leqq R$ から $r_{ki}=1$ が得られるが，これは矛盾する。

(ii) $r_{ki}=1$ のとき

このとき $s_{ik}=1$ となり，また $s_{kj}=1$ であるので，$r_{ij}=1$ となる。しかしこれは矛盾する。

こうしてRの非対角要素は1となり，推移性によって全要素が1となる。

(2) $R=E$ のとき

明らかに $((R \vee \overline{R'}) \wedge \overline{I})^2 \leqq R' \vee I$，$R^2 \leqq R$。 (証明終)

〔性質47〕

$n \geqq 3$のとき

$((R \vee \overline{R'}) \wedge \overline{I})^2 \leqq R' \vee I$ かつ $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$ となるRは存在しない。

(証明)

$i \neq j \neq k \neq i$ とする。また $S = (R' \vee \overline{R}) \wedge \overline{I}$ とおけば，$S^2 \leqq R \vee I$，$s_{ij} = (r_{ji} \vee \overline{r_{ij}}) \wedge \overline{\delta_{ij}}$。

(1)　$r_{ij}=0$ のとき

このとき $s_{ij}=1$。

(a)　$r_{jk}=0$ のとき

このとき $s_{jk}=1$ となり，$s_{ij}=1$ によって $r_{ik}=1$ となる。またこれから $s_{ki}=1$ となり，$s_{ij}=1$ によって $r_{kj}=1$，また $s_{jk}=1$ によって $r_{ji}=1$ となるが，これは $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$ と矛盾する。

(b)　$r_{jk}=1$ のとき

このとき $s_{kj}=1$。

(i)　$r_{ki}=0$ のとき

このとき $s_{ki}=1$，したがって $s_{ij}=1$ から $r_{kj}=1$ となり，$s_{jk}=1$ が得られ，$s_{ij}=1$ によって $r_{ik}=1$。また $s_{ki}=1$ によって $r_{ji}=1$ となる。しかし，これは $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$ と矛盾する。

(ii)　$r_{ki}=1$ のとき

このとき $s_{ik}=1$ となり，$s_{kj}=1$ から $r_{ij}=1$。しかしこれは矛盾する。

(2)　$r_{ij}=1$ のとき

このとき $s_{ji}=1$。

(a)　$r_{jk}=0$ のとき

このとき $s_{jk}=1$。

(i)　$r_{ki}=0$ のとき

このとき $s_{ki}=1$ で，$s_{jk}=1$ によって $r_{ji}=1$ となる。また，これから $s_{ij}=1$ となり，$s_{jk}=1$ によって $r_{ik}=1$ となる。一方 $s_{ki}=1$，$s_{ij}=1$ によって $r_{kj}=1$ となるが，これは $(R \wedge \overline{I})^3 \wedge I = O$ と矛盾する。

(ii)　$r_{ki}=1$ のとき

このとき $s_{ik}=1$ となり $r_{jk}=1$ となるが，これは矛盾する。

(b)　$r_{jk}=1$ のとき

このとき $s_{kj}=1$ で $s_{ji}=1$ によって $r_{ki}=1$。しかしこれは $(R\wedge\overline{I})^3\wedge I=O$ と矛盾する。

こうして $n\geqq 3$ のとき与えられた条件を満足するRは存在しない。

(証明終)

5．まとめ

すでに述べたように，vacuously transitive 関係はブール行列で表現すれば，基本的にはその2乗が零となる特殊なべき零行列である(3)。このvacuously transitive 関係は明らかに推移的であるので，これまでに報告している推移性に関する性質(7)を手がかりとして，多数の新しい性質を示すことができた。

また，与えられたブール行列が vacuously transitive 関係を表現する行列となるための条件を調べる過程で，そのような行列が特殊なものに限定されて零行列となってしまう場合や，さらには限定が強すぎて存在しなくなってしまう場合などについても考察をおこなった。このような零行列に関する種々の条件や，空のクラスを与える条件についてさらに考察をおこなうこと，また vacuously transitive 関係を一般化してその性質を調べることなどは興味ある今後の課題である。

文　献

〔1〕Behzad, M., Chartrand, G., and Lesniak-Foster, L.: "Graphs & Digraphs," Wadsworth, California (1979).
〔2〕Birkhoff, G. and MacLane, S.: "A Survey of Modern Algebra," 3rd. Ed., The Macmillan Company, New York (1965)(奥川，辻訳："現代代数学概論，"白水社，1967年6月)．
〔3〕Golumbic, M. C.: "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs," Academic Press, New York (1980).
〔4〕橋本　寛："羃等ブール行列と推移的簡約，"電子通信学会研究会資料ＡＬ80-70(1981年1月)．
〔5〕橋本　寛："連結的推移関係行列の性質，"山口経済学雑誌，第34巻3・4号，pp. 387-405(昭和60年6月)．
〔6〕橋本　寛：連結的推移関係行列の性質Ⅱ，"山口経済学雑誌，第35巻3・4号，pp. 281-293(昭和61年1月)．
〔7〕橋本　寛："推移関係行列に関するいくつかの十分条件，"山口経済学雑誌，第35巻5・6号，pp. 425-436(昭和61年5月)．
〔8〕Kim, K. H.: "Boolean Matrix Theory and Applications," Marcel Dekker, New York (1982).
〔9〕Sharp, H., Jr.: "Enumeration of vacuously transitive relations," Discrete Mathematics, 4, pp. 185-196 (1973).
〔10〕Tarski, A.: "Introduction to Logic," Oxford University Press, New York (1965).