情報検索システムのブールモデル

橋　本　　　寛

1．はじめに

情報検索システムのブールモデルに関し，ブール行列の性質を用いて考察をおこなっている。とくに，ブールモデルの簡約問題をとりあげている。対象とするモデルはキーワード方式の文献検索システムであって，各文献にはあらかじめ一定の基準でキーワードが与えてあるものとする。もちろん，どのような基準で文献にキーワードを与えるかは重要な問題であるが，ここではこの問題にはふれず，すでにキーワードが文献に与えてあるという前提で議論をおこなっている。

ブールモデルは2値論理を採用したよく知られている基本的なモデルであって，実用上最も重要なモデルと考えられている〔1，2〕。ブールモデルは0，1の要素をもつブール行列によって表現できるので，ブール行列の簡約に関する性質を利用して，このブールモデルの考察をおこなうことができる。

ブール行列は古くから多くの分野に応用されていて，その性質はよく調べられており，またブール行列の理論は関係論理学やスイッチング理論，グラフ理論などと密接な関連をもっている〔3，4，5，6，7〕。

2．演算の定義

以下の議論において必要となるいくつかの演算を定める。まず，x，yを

0，1の値をとるブール変数とするとき，$x \vee y$，$x \wedge y$，$\bar{x}$，$x \ominus y$をつぎのように定める。

$$
\begin{aligned}
&x \vee y = \max(x,\ y),\\
&x \wedge y = \min(x,\ y),\\
&\bar{x} = 1 - x,\\
&x \ominus y = x \wedge \bar{y}。
\end{aligned}
$$

つぎに，各要素が0，1の値をとるブール行列$A=[a_{ij}](m\times n)$，$B=[b_{ij}](m\times n)$，$C=[c_{ij}](n\times l)$，$R=[r_{ij}](n\times n)$に対して，以下のような行列演算を定義する。

$$
\begin{aligned}
&A \vee B = [a_{ij} \vee b_{ij}],\\
&A \wedge B = [a_{ij} \wedge b_{ij}],\\
&\overline{A} = [\overline{a}_{ij}],\\
&A \ominus B = A \wedge \overline{B},\\
&A' = [a_{ji}]\,(\text{転置行列}),\\
&A \times C = [\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge c_{kj})],\\
&A \diamond C = [\bigwedge_{k=1}^{n} (a_{ik} \vee c_{kj})],\\
&A/R = A \ominus (A \times R),\\
&\varDelta R = R \wedge \overline{R'},\\
&R^0 = I = [\delta_{ij}]\ (\delta_{ij}\text{はクロネッカーのデルタ}),\\
&R^{k+1} = R^k \times R,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots。
\end{aligned}
$$

これらの演算はブール行列の理論における基本的な演算であって，多くの興味ある性質が知られている〔7，8〕。たとえば，つぎのようないわゆるド・モルガンの法則が成立する。

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B},$$

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B},$$
$$\overline{A \times C} = \bar{A} \diamond \bar{C},$$
$$\overline{A \diamond C} = \bar{A} \times \bar{C}。$$

また，つぎのような興味ある関係も成立する。

$$\varDelta(R') = (\varDelta R)' = \varDelta(\bar{R})。$$

この関係の成立することは，つぎのようにしてわかる。まず，定義によって

$$\varDelta R = R \ominus R'$$

となる。したがって，R を R' でおきかえて

$$\varDelta(R') = R' \ominus R。$$

また，$\varDelta R$ を転置して

$$(\varDelta R)' = R' \ominus R。$$

一方

$$\varDelta(\bar{R}) = \bar{R} \ominus (\bar{R})' = \bar{R} \wedge R' = R' \ominus R。$$

こうして

$$\varDelta(R') = (\varDelta R)' = \varDelta(\bar{R})。$$

この $\varDelta R$ の演算は，とくに推移関係を表現するブール行列の考察において有用である。

3．ブールモデル

情報検索のブールモデルについて述べる。以下に示すように，ブールモデルは0，1の要素をもつブール行列によって表現することができる。

3.1　文献対キーワード行列

文献とキーワードの間の関係を表現するブール行列を文献対キーワード行列とよぶ。この行列は各文献にどのようなキーワードが与えられているかを示すものである。いま，m 個の文献 D_1，D_2，…，D_i，…，D_m と n 個のキーワード K_1，K_2，…，K_j，…，K_n があるとき，文献対キーワード行列 A の (i, j) 要素 a_{ij} は，つぎのように定められる。すなわち，文献 D_i にキーワード K_j が与えられているとき 1，そうでないとき 0 と定められる。

3.2　シソーラス

シソーラス (thesaurus) は，情報検索において用いられるキーワードの管理をおこなう辞書であって，通常，各キーワードについてその同義語，同形異義語，上位概念，下位概念，関連語などを整理したものである。自然語をキーワードとして採用する場合にはシソーラスが必要である。これは文献の著者や専門分野によって用語の使い方が一般に統制されていないからである。

シソーラスを表現するブール行列を R で示す。この行列 R の (i, j) 要素 r_{ij} は，キーワード K_i がキーワード K_j の上位概念のとき 1，そうでないとき 0 と定められるものとする。行列 R の対角要素 r_{ii} は 1 とする。もし $r_{ij} = r_{ji} = 1$ のときはキーワード K_i と K_j は同義語であると考える。したがって，厳密にいえば，$r_{ij} = 1$ のとき，キーワード K_i はキーワード K_j の上位概念であるか，または K_i は K_j の同義語であるかのいずれかとなる。

ブール行列 R の対角要素がすべて 1 のとき，すなわち $R \geqq I$ のとき，行列 R は反射的といわれる。また，$R^2 \leqq R$ となるブール行列 R は推移的である。行列の要素でいえば，任意の i，j，k に対して，$r_{ik} = r_{kj} = 1$ のとき $r_{ij} = 1$ となるならば R は推移的である。一般に，シソーラスを表現するブール行列は反射的でかつ推移的である。反射的でかつ推移的であるブール行列は，反射的かつ推移的な 2 項関係を表現しており，そのような関係は擬順序または前順序とよばれる〔9，10〕。これらの関係は種々の応用において有用であり，たとえば選好関係の議論において重要な役割を演じている〔11，12〕。

不完全なシソーラスを表現するブール行列Rでは推移律が満たされないことがあるが，このときは行列Rの推移閉包

$$R^{+} = R \vee R^{2} \vee \cdots \vee R^{n}$$

を計算すればよい。一般に，R^{+}は推移的となる。推移閉包R^{+}はWarshallのアルゴリズムなどによって効率よく求めることができる〔13〕。

3.3 質問式

検索の要求を論理式で表現したものを質問式とよぶことにする。質問式はつぎのようにして構成される。いま，キーワードK_iとK_jの両方を含む文献を検索するときは質問式を$K_i \wedge K_j$とし，キーワードK_iまたはK_jを含む文献を検索するときは$K_i \vee K_j$とする。キーワードK_iを含まない文献を検索するときは$\overline{K_i}$とする。一般に，キーワード$K_{i(1)}$，$K_{i(2)}$，…，$K_{i(p)}$と演算子$\wedge$，$\vee$，$\overline{}$によって構成された質問式を

$$Q = Q(K_{i(1)}, K_{i(2)}, \cdots, K_{i(p)})$$

で表わすことにする。

たとえば，質問式

$$Q = (K_1 \wedge K_2) \vee (K_3 \wedge \overline{K_4})$$

は，キーワードK_1とK_2の両方を含むか，またはキーワードK_3を含みかつK_4を含まない文献を検索する場合の質問式である。

3.4 検索操作

文献対キーワード行列A，シソーラスすなわちキーワード間の階層構造を表現する行列R，および質問式Qが与えられたときの検索操作は，つぎのように定義される。まず，キーワードK_iに対しAK_iで行列Aの第i列を示すものとする。一般には，質問式Qに対して

$$AQ(K_{i(1)},\ K_{i(2)},\ \cdots,\ K_{i(p)}) \equiv Q(AK_{i(1)},\ AK_{i(2)},\ \cdots,\ AK_{i(p)})$$

と定める。

たとえば

$$A(K_1 \vee K_2) = AK_1 \vee AK_2,$$
$$A(K_1 \wedge \overline{K_2}) = AK_1 \wedge \overline{AK_2}$$

となる。

キーワード間の階層構造を考慮する場合には

$$(A \times R)Q(K_{i(1)},\ K_{i(2)},\ \cdots,\ K_{i(p)}) \equiv Q((A \times R)K_{i(1)},\ (A \times R)K_{i(2)},\ \cdots,\ (A \times R)K_{i(p)})$$

を計算する。行列Rを種々の行列で置き換えて検索することにより，多様な検索を実現することができる。とくに，行列Rを単位行列Iでおきかえれば，$A \times I = A$であるので，キーワード間の階層構造を考慮しない場合の検索，すなわち，現在，文献に与えられているキーワードだけによる検索となる。なお，一般に

$$(A \times R)K_i = A \times (RK_i)$$

となる。

(例)　文献対キーワード行列Aおよびシソーラスを表現する行列Rがつぎのように与えられているものとする。

$$A = \begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R = \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}。$$

いま，質問式Qが$Q = K_1 \wedge K_2$として与えられたとする。このとき，AQを計算すればつぎのようになる。

$$AQ = A(K_1 \wedge K_2) = AK_1 \wedge AK_2 = \begin{array}{c} K_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \wedge \begin{array}{c} K_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{array} \begin{array}{c} Q \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}。$$

こうして，質問式 $Q = K_1 \wedge K_2$ に該当する文献，すなわちキーワード K_1 と K_2 の両方を持つ文献として，文献 D_1 が検索されることになる。

ところで，行列 R からわかるように，キーワード K_1 と K_3 は互いに同義語である。したがって，キーワード K_2 と K_3 をもつ文献 D_5 もとり出されるようにすべきであろう。このためには，$(A\times(R \wedge R'))Q$ を計算すればよい。すなわち，一般に $R \wedge R'$ は R の対称核とよばれ，同義語の関係を表現するブール行列となるからである。実際 $R \wedge R'$ は

$$R \wedge R' = \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

となり，キーワード K_1 と K_3 が同義語であることを示している。行列 A と $R \wedge R'$ の積をもとめれば

$$A\times(R \wedge R') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

となる。このように，行列Aに対して同義語を追加したものが $A\times(R \wedge R')$ となっている。この行列 $A\times(R \wedge R')$ に関して質問式 $Q = K_1 \wedge K_2$ で検索をおこなえば，つぎのようになる。

$$
(A\times(R \wedge R'))Q = \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}。
$$

こうして，文献 D_5 もとり出せることになる。

もし，行列Aに下位概念および同義語を追加して検索をおこないたいときは $A\times R$ を求め，これを用いて検索すればよい。いま，$A\times R$を求めれば，

$$
A\times R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

となり，$(A\times R)Q$ はつぎのようになる。

$$(A\times R)Q=(A\times R)(K_1\wedge K_2)=\begin{array}{c} D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5\end{array}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}。$$

また，行列Aに対し上位概念および同義語を追加して検索をおこなうのであれば $A\times R'$ を計算し，これに関して検索をおこなえばよい。いま，これをおこなってみれば

$$A\times R'=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

となり，したがって質問式 $Q=K_1\wedge K_2$ に関して

$$(A\times R')Q=\begin{array}{c} D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5\end{array}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

が得られる。

なお，行列Aに対して下位概念のみを追加するのであれば

$$A\times(I\vee \varDelta R)$$

を求めて，これに関して検索をおこなえばよい。また，同様に上位概念のみを追加して検索をおこなうのであれば

$$A \times (I \vee \Delta(R'))$$

を求めて検索をおこなえばよい。

4．主要な性質

文献対キーワード行列の簡約に関する興味深い性質を示す。まず，推移的な関係を表現するブール行列の基本的な性質に注目する。以下の2つの基本的性質はほとんど明らかであるので証明は省略する。

〔性質1〕 $n \times n$ ブール行列Rが推移的であれば，ΔRは非反射的，すなわち対角要素がすべて0で，かつ推移的である。

〔性質2〕 $n \times n$ ブール行列Rが非反射的でかつ推移的であれば，Rはべき零行列である。

上の2つの性質によって，ブール行列Rが推移的であれば，ΔRはべき零となる。したがって，このときΔRはRのべき零部分に相当していると考えることができる。

〔性質3〕 $m \times n$ ブール行列Aに対して，$n \times n$ 行列Rが推移的で，また$n \times n$ べき零行列Pに対し $P \leqq R$ ならば，このとき

$$(A/P) \times R = A \times R$$

となる。

（証明）　$A = [a_{ij}]$，$R = [r_{ij}]$，$P = [p_{ij}]$，$P^k = [p_{ij}^{(k)}]$ とし，さらに

$$B = [b_{ij}] = A \times R,$$
$$C = [c_{ij}] = (A/P) \times R$$

とおく。このとき

$$b_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge r_{kj}),$$

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge \bigwedge_{l=1}^{n} (\overline{a_{il}} \vee \overline{p_{lk}}) \wedge r_{kj})$$

となる。$b_{ij} \geqq c_{ij}$はあきらかであるから，$b_{ij} \leqq c_{ij}$を示せば十分である。

いま，$b_{ij}=1$と仮定する。このとき，$c_{ij}=0$と仮定すれば矛盾の生じることを示す。$b_{ij}=1$であれば，ある$k=l(0)$に対して

$$a_{il(0)}=1, \quad r_{l(0)j}=1$$

となる。ところが，$c_{ij}=0$であるから，ある$l=l(1)$に対して

$$a_{il(1)}=1, \quad p_{l(1)l(0)}=1$$

でなければならない。$P \leqq R$であるので$r_{l(1)l(0)}=1$となり，Rが推移的であるので

$$a_{il(1)}=1, \quad r_{l(1)j}=1, \quad p^{(1)}_{l(1)l(0)}=1$$

となる。また，$c_{ij}=0$であるので，ある$l=l(2)$に対して

$$a_{il(2)}=1, \quad p_{l(2)l(1)}=1$$

となる。$P \leqq R$およびRの推移性によって

$$a_{il(2)}=1, \quad r_{l(2)j}=1, \quad p^{(2)}_{l(2)l(0)}=1$$

が得られる。以下，同様にくりかえせば

$$a_{il(n)}=1, \quad r_{l(n)j}=1, \quad p^{(n)}_{l(n)l(0)}=1$$

となる。しかし，これはPがべき零行列であることと矛盾している。したがって，$c_{ij}=1$でなければならない。ゆえに$b_{ij} \leqq c_{ij}$となる。

(証明終)

〔性質4〕 $m \times n$ブール行列Aに対して，$n \times n$行列Rが推移的であれば，このとき

$$(A/\varDelta R) \times R = A \times R$$

となる。

（証明）　性質1および2によって ΔR はべき零かつ $\Delta R \leqq R$ 　であるので，性質3からただちに

$$(A/\Delta R)\times R = A\times R$$

が得られる。

（証明終）

〔性質5〕　$m\times n$ ブール行列 A に対して，$n\times n$ 行列 R が反射的かつ推移的であれば

$$((A\times R)/\Delta R)\times R = A\times R$$

となる。

（証明）　R が反射的でかつ推移的であれば，$R^2 = R$，すなわちべき等となる。したがって，性質4によって

$$((A\times R)/\Delta R)\times R = (A\times R)\times R = A\times R$$

が得られる。

（証明終）

（例）　行列 A および R がつぎのように与えられているとする。

$$A = \begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 & K_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R = \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 & K_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}。$$

まず，ΔR をもとめ，$A\times\Delta R$ および $A/\Delta R$ を計算する。

$$\Delta R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

よって

$$A \times \Delta R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A/\Delta R = A \ominus (A \times \Delta R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

行列Aと$A/\varDelta R$を比較することにより，$A/\varDelta R$では下位概念の除去されていることがわかる。また，行列Aにおいて1が1個以下の行は変化していないことがわかる〔14〕。

つぎに，$(A/\varDelta R)\times R$と$A\times R$を計算し，両者の等しいことを確認する。

$$(A/\varDelta R)\times R=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1&0\\0&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A\times R=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。
$$

こうして

$$
(A/\varDelta R)\times R = A\times R
$$

の成立していることがわかる。なお，すでに3.4節でも述べたように，行列Aと$A\times R$を比較すると，Aの各行において下位概念および同義語を追加したものが$A\times R$となっていることがわかる。

同様にして，行列Aから上位概念を除去することができる。この場合は，上述のRのかわりにR'を考えればよい。まず，$\varDelta(R')$を求め，ついで$A\times\varDelta(R')$と$A/\varDelta(R')$を計算する。

$$
\varDelta(R') = (\varDelta R)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A\times\varDelta(R') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
A/\varDelta(R') = A\ominus(A\times\varDelta(R')) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}。
$$

行列 A と $A/\varDelta(R')$ を比較することにより，A の各行において上位概念の除去されていることがわかる。また，この場合も A において1が1個以下の行は変化していないことがわかる。

つぎに，$(A/\varDelta(R'))\times R'$ をもとめ，これが $A\times R'$ に等しいことを示す。

$$
(A/\varDelta(R'))\times R' = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A \times R' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。
$$

こうして

$$(A/\varDelta(R')) \times R' = A \times R'$$

となることがわかる。この関係は一般に成立する。なぜなら，行列Rが推移的であれば，R'も推移的であるので，性質4が適用できるからである。なお，行列Aと$A \times R'$を比較することにより，Aの各行において上位概念および同義語の追加されていることがわかる。

この例における行列Rは反射的であるので，性質5の関係も成立する。このことを確認する。まず，$R \times \mathit{\Delta} R$を求める。

$$R \times \mathit{\Delta} R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathit{\Delta} R。$$

この場合，$R \times \mathit{\Delta} R$と$\mathit{\Delta} R$は等しくなるが，この関係は$R$が反射的でかつ推移的であれば一般に成立する〔15〕。こうして

$$(A \times R)/\mathit{\Delta} R = (A \times R) \ominus (A \times R \times \mathit{\Delta} R) = (A \times R) \ominus (A \times \mathit{\Delta} R)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

この例からわかるように，$(A\times R)/\varDelta R$ と $A/\varDelta R$ とは等しくない。しかし，以下に示すように $((A\times R)/\varDelta R)\times R$ は $A\times R$ と等しくなる。

$$((A\times R)/\varDelta R)\times R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=A\times R。$$

つぎに，$\varDelta R$ の性質について考える。$\varDelta R$ は行列 A の簡約において重要な役割を演じているが，$\varDelta R$ 自身の簡約においても，つぎのような興味ある性質を有している〔16〕。

〔性質6〕　行列Rが推移的であれば

$$\bigvee_{k=m}^{n-1}(\Delta R/\Delta R)^{k}=(\Delta R)^{m},\qquad m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

が成立する。ただし，n はRの次数とする。

この性質の特別な場合として，つぎの関係が得られる。

〔性質7〕　行列Rが推移的であれば

$$(\Delta R/\Delta R)^{n-1}=(\Delta R)^{n-1}$$

となる。

(例)　つぎの 4×4 行列Rについて考える。

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}。$$

このとき

$$\Delta R=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad(\Delta R)^{2}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$(\Delta R)^{3}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad(\Delta R)^{4}=O$$

となる。つぎに $\Delta R/\Delta R$ を求める。

$$\Delta R/\Delta R=\Delta R\ominus(\Delta R)^{2}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

また，$(\Delta R/\Delta R)^2$，$(\Delta R/\Delta R)^3$ はつぎのようになる。

$$(\Delta R/\Delta R)^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$(\Delta R/\Delta R)^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

したがって，以下の関係が得られる。

$$(\Delta R/\Delta R)\vee(\Delta R/\Delta R)^2\vee(\Delta R/\Delta R)^3=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\Delta R,$$

$$(\Delta R/\Delta R)^2\vee(\Delta R/\Delta R)^3=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=(\Delta R)^2,$$

$$(\Delta R/\Delta R)^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=(\Delta R)^3。$$

上の例からもわかるように，$\Delta R/\Delta R$ は ΔR の簡約形と考えることができ，シソーラスの構成や分類表の作成において有用であると考えられる。一般に，行列 R または R の表現する有向グラフの簡約は，多くの応用において重要な問題となっている〔17，18，19〕。

5．まとめ

情報検索のブールモデルにおける簡約の問題，とくにキーワード間の階層関係による文献対キーワード行列の簡約問題について考察をおこない，若干の興味ある結果を得た。ブールモデルの簡約を考える場合に，キーワード間の階層関係でなく文献間の階層関係を考慮してモデルを簡約することも可能であり，同様の結果が得られている〔16〕。また，一般にキーワードおよび文献の両方の階層関係を考慮してモデルの簡約をおこなうことも可能である〔16〕。

なお，ブールモデルを一般化した fuzzy モデルにおいても類似の結果の成立することが知られている〔20, 21〕。しかし，ブールモデルで成立するすべての性質が fuzzy モデルで成立するわけではなく，いくつかの性質は fuzzy モデルでは成立しない〔16〕。

文　　献

〔1〕 G. Salton: "Automatic Information Organization and Retrieval", McGraw-Hill (1968).

〔2〕 W. M. Turski: "On a model of information retrieval system based on thesaurus", Inform. Stor. Retr. Vol. 7, pp. 89-94 (1971).

〔3〕 I. M. Copilowish: "Matrix development of the calculus of relations", The Journal of Symbolic Logic, Vol. 13, No. 4, pp. 193-203 (1948).

〔4〕 F. D. Parker: "Matrices, relations, and graphs", Mathematics Magazine, Vol. 34, No. 1, pp. 5-9 (1960).

〔5〕 R. B. Marimont: "Applications of graphs and boolean matrices to computer programming", SIAM Rev. 2, pp. 259-268 (1960).

〔6〕 F. D. Parker: "Boolean matrices and logic", Mathematics Magazine, Vol. 37, No. 11, pp. 33-38 (1964).

〔7〕 M. A. Harrison: "Introduction to Switching and Automata Theory," McGraw-Hill (1965).

〔8〕 K. H. Kim: "Boolean Matrix Theory and Applications", Marcel Dekker, Inc. (1982).

〔9〕 A. Tarski: "Introduction to Logic", Oxford University Press (1965).

〔10〕 日本数学会："岩波数学辞典"，岩波書店（1971）.

〔11〕 K. J. アロー（長名訳）："社会的選択と個人的評価，" 日本経済新聞社（1977）.

〔12〕 T. J. ファラロ（西田，安田監訳）：“数理社会学 I ”，紀伊國屋書店（1980）.
〔13〕 S. Warshall: “A theorem on boolean matrices,” JACM, Vol. 9, No. 1, pp. 11-12 (1962).
〔14〕 橋本　寛：“非反射的推移関係を表わすブール行列とある行列演算の性質，” 電子通信学会技術研究報告，Vol. 79，No. 92，pp. 1-10（1979）.
〔15〕 橋本　寛：“推移関係を表わすブール行列の対称核とべき零部分”，電子通信学会技術研究報告，Vol. 80，No. 127，pp. 1-10（1980）.
〔16〕 橋本　寛：“推移関係とブール行列の簡約”，電子通信学会技術研究報告，Vol. 80，No. 24，pp. 65-72（1980）.
〔17〕 D. M. Moyles and G. L. Thompson: “An algorithm for finding a minimum equivalent graph of a digraph”, JACM, Vol. 16, No. 3, pp. 455-460 (1969).
〔18〕 A. V. Aho, M. R. Garey, and J. D. Ullman: “The transitive reduction of a directed graph”, SIAM J. Computing, Vol. 1, No. 2, pp. 131-137 (1972).
〔19〕 R. K. Shyamasundar: “Boolean matrix method for the construction of hierarchical graphs”, IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Vol. SMC-8, No. 2, pp. 132-133 (1978).
〔20〕 V. Tahani: “A fuzzy model of document retrieval systems”, Inform. Process. & Management, Vol. 12, pp. 177-187 (1976).
〔21〕 H. Hashimoto: “Reduction of a fuzzy retrieval model”, Information Sciences, Vol. 27, pp. 133-140 (1982).